NUMEROS.20 - 1990
S.C.P.M. "ISAAC NEWTON"

UNA EXPERIENCIA CON EL ANÁLISIS EN TERCERO DE B.U.P.

JUAN ANTONIO GARCÍA CRUZ
C.E.I. DE LA LAGUNA

Como todos los años, debía comenzar el Análisis de 3° y desconocía lo que sabían los alumnos del asunto. Según ellos, lo desconocían por completo. En 2° "*habían visto*": sucesiones, límite de sucesiones, funciones, límite de funciones y algo del cáculo de derivadas.

Años atrás, en 1983, leí un artículo de Judith V. Grabiner [1] que no analizaré aquí. Una de sus ideas centrales ("la derivada primero se usó, después se descubrió, exploró y desarrolló y finalmente se definió"), me hizo pensar durante cierto tiempo en la posibilidad de que esa podría ser la secuencia de estudio de la derivada en el aula.

Lo que necesitaba era un problema para empezar, un problema que no fuera teórico y, mejor, de contexto real. Un problema que entendieran los alumnos y que sirviera de hilo conductor de la trama; una trama con la que yo no quería acabar en la definición de derivada, sino continuarla hasta el concepto de integral definida.

Este es el problema:

"*Un paracaidista se lanza desde un avión. La altura que recorre en función del tiempo viene dada por la función (o la tabla siguiente):*

$$h(t) = \begin{cases} 4t^2 , & si\ 0 \le t \le 3 \\ ? , & si\ 3 \le t \le 4 \\ 6t + 22 , & si\ 4 \le t \le 5'5 \end{cases}$$

(midiéndose t en segundos y h en metros)

t	0	1/2	1	1 1/2	2	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2
h	0	1	4	9	16	25	36	42	46	49	52	55

(tabla 1)

Algunas cuestiones:

¿En qué instante empieza a abrirse el paracaídas?

¿En qué instante se ha abierto del todo?

¿Cuál es la velocidad instantánea en el momento en que empieza a abrirse el paracaídas?

¿Cuál es la velocidad instantánea en el momento en que se termina de abrir?

... Lo que sigue es, más o menos, una reproducción de lo ocurrido en clase durante dos meses aproximadamente.

Como el propósito no es obtener la función a partir de la tabla, les facilito las dos cosas: la tabla y la función.

Después de algún rato, más de un alumno sugiere que el paracaídas empieza a abrirse después del instante 3 y ya está completamente abierto en el instante 4. Lo primero era fácil de suponer; la secuencia de números cuadrados perfectos quedaba rota en el instante 3 1/2; la segunda ya no era tan evidente. Pero algún alumno se había dado cuenta de que, después del instante 4, los espacios que recorre el paracaidista en cada instante son constantes e iguales a 3 metros. Se había dado una respuesta a las dos primeras cuestiones. Pero ... ¿cómo responder a las otras dos?

El concepto de velocidad media es bastante conocido y usado por los alumnos, pero no así el de velocidad instantánea. Después de haberles sugerido el cálculo de velocidades medias en intervalos que cada vez se hacen más y más pequeños, y estudiadas las correspondientes tendencias, llegamos a la siguiente tabla:

t	v_1	cálculos
1	8	$\lim_{t \to 1} \frac{4t^2 - 4}{t - 1}$
1'5	12	$\lim_{t \to 1'5} \frac{4t^2 - 9}{t - 1'5}$
2	16	$\lim_{t \to 2} \frac{4t^2 - 16}{t - 2}$
3	24	$\lim_{t \to 3} \frac{4t^2 - 36}{t - 3}$
4	6	$\lim_{t \to 4} \frac{(6t^2 + 22) - 46}{t - 4}$
5	6	$\lim_{t \to 5} \frac{(6t^2 + 22) - 52}{t - 5}$

(tabla 2)

Para los instantes 3 y 4 hemos calculado las tendencias, v_1, sólo para valores por la izquierda y derecha, respectivamente. Además, en todos los casos ha sido muy útil disponer de la función para la realización de los correspondientes cálculos.

USANDO LA DERIVADA

Como en el curso anterior se les introdujo en el cálculo de derivadas, les propongo que realicen la derivada de las dos ramas conocidas de la función $h(t)$, obteniendo:

$$h'(t) = \begin{cases} 8t, & si\ 0 \le t \le 3 \\ ?, & si\ 3 \le t \le 4 \\ 6, & si\ 4 \le t \le 5'5 \end{cases}$$

(mantengo los signos ≤ por conveniencia didáctica)

Si ahora completamos la tabla siguiente:

t	$h'(t)$
1	8
1'5	12
2	16
3	24
4	6
5	6

(tabla 3)

¡Resulta idéntica a la obtenida para las velocidades instantáneas!

Luego, concluimos:

$$h'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$$

Afortunado el profesor que tenga en clase un alumno que sea capaz de notar la diferencia entre el cálculo del límite para $t \to 3$, del correspondiente para $t \to 5$, por poner un ejemplo.

Ello nos lleva a definir los límites laterales y a completar la definición de derivada de una función en un punto.

Pero antes hemos de resolver un problema: al no disponer de la función en el intervalo]3, 4[..., ¿cómo haremos los cálculos correspondientes?

Nos vemos abocados, inevitablemente, al problema de la interpolación.

LA INTERPOLACIÓN

¿Interpolación lineal o cuadrática?

Si interpolamos una recta que pase por los puntos de coordenadas (3, 36) y (4, 46), obtenemos:

$$h(t) = 10t + 6 \text{ , si } 3 \leq t \leq 4$$

lo que nos da para $t = 3\ 1/2$ el valor 41, y no el valor 42 que da la tabla 1, aunque ello no quiere decir que la aproximación sea mala.

Si interpolamos una parábola, obtenemos:

$$h(t) = -4t^2 + 38t - 42 \text{ , si } 3 \leq t \leq 4$$

Si la $h'(t)$ es una velocidad, entonces la $h''(t)$ será una aceleración.

Tenemos por tanto:

$$h''(t) = \begin{cases} 8 & , \quad si\ 0 < t < 3 \\ -8 & , \quad si\ 3 < t < 4 \\ 0 & , \quad si\ 4 < t < 5'5 \end{cases}$$

¡La aceleración es negativa en el intervalo en que se está abriendo el paracaídas! . Es decir, se frena la caída. Esta es una conclusión que está de acuerdo con la situación estudiada.

Damos por mejor aproximación la cuadrática.

Por tanto, tenemos:

$$h(t) = \begin{cases} 4t^2 & , \quad si\ 0 \leq t \leq 3 \\ -4t^2 + 38t - 42 & , \quad si\ 3 \leq t \leq 4 \\ 6t + 22 & , \quad si\ 4 \leq t \leq 5'5 \end{cases}$$

Ahora sí que ya podemos calcular los límites siguientes:

$$\lim_{t \to 3^+} \frac{h(t) - h(3)}{t - 3} \qquad \lim_{t \to 4^-} \frac{h(t) - h(4)}{t - 4}$$

obteniendo 14 y 6, respectivamente.

Volvimos a la tabla 3 para observar si los resultados aquí calculados concordaban con lo que allí teníamos, y constatamos que la velocidad instantánea en el segundo 3 nos daba 24, en contradicción con el resultado aquí obtenido. Sin embargo, podríamos habernos consolado con la igualdad obtenida allí y aquí para la velocidad instantánea en $t = 4$. ¿Algo fallaba?, ¿qué?.

DEFINIENDO LA DERIVADA

Había que precisar más el significado de la expresión

$$h'(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{h(t) - h(t_o)}{t - t_o}$$

Teniendo como referencia los valores obtenidos para $t = 3$ y notando la diferencia entre ellos, establecimos que era necesaria la coincidencia de los límites laterales para la existencia de la derivada. ("Si dos tendencias son distintas, ninguna predomina sobre la otra", algo así oí por la clase).

Luego la función dada era derivable en todo el intervalo [0, 5'5], excepto para $t = 3$.

Además, si partíamos de la función $h(t)$ y derivábamos dos veces, obteníamos las funciones $v(t)$ y $a(t)$, pero con algunas salvedades para los extremos de los intervalos, dado que se trata de funciones definidas a trozos y puede ocurrir (de hecho ocurre) que los límites laterales en los extremos de un intervalo y los adyacentes no coincidan.

Por tanto tenemos:

$$h(t) = \begin{cases} 4t^2 & , \ si\ 0 \le t \le 3 \\ -4t^2 + 38t - 42 & , \ si\ 3 \le t \le 4 \\ 6t + 22 & , \ si\ 4 \le t \le 5'5 \end{cases}$$

Si derivamos:

$$h'(t) = v(t) = \begin{cases} 8t & , \ si\ 0 \le t < 3 \\ -8t + 38 & , \ si\ 3 < t \le 4 \\ 6 & , \ si\ 4 \le t \le 5'5 \end{cases}$$

Y volviendo a derivar:

$$h''(t) = a(t) = \begin{cases} 8 & , \ si\ 0 \le t < 3 \\ -8 & , \ si\ 3 < t < 4 \\ 0 & , \ si\ 4 < t \le 5'5 \end{cases}$$

Para los extremos 0 y 5'5 acordamos dar el valor del límite lateral por la derecha e izquierda, respectivamente.

Representamos las tres funciones y estudiamos algunos aspectos de la continuidad intuitivamente.

LA INTEGRAL

Disponer de las funciones $h(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ me sirve para introducir el concepto de primitiva de una función. Hacemos algunos ejercicios de cálculo de primitivas.

Luego, y a la vista de las gráficas de las tres funciones, propongo calcular las áreas encerradas por las respectivas curvas, empezando por la de $a(t)$, el eje OX y las rectas de abscisas los extremos de los subintervalos de definición para cada una de las ramas de dichas funciones.

Obtenemos:

Areas bajo la curva $a(t)$ en el intervalo [0, 5'5]:

$a(t)$	$s_1(t)$	$v(t)$	dif.	
8	$8t$	$8t$	0	si $0 < t < 3$
-8	$-8(t-3)$	$-8t+38$	14	si $3 < t < 4$
0	0	6	6	si $4 < t < 5'5$

Luego $s_1'(t) = v'(t) = a(t)$ y, por tanto, $s_1(t)$ y $v(t)$ son primitivas de $a(t)$.

Areas bajo la curva $v(t)$ en el intervalo [0, 5'5]:

$v(t)$	$s_2(t)$	$h(t)$	dif.	
$8t$	$1/2\, t\cdot 8t = 4t^2$	$4t^2$	0	si $0 < t < 3$
$-8t+38$	$-4t^2+38t-78 = \frac{1}{2}\left[14+(-8t+38)\right](t-3)$	$-4t^2+38t-42$	36	si $3 < t < 4$
6	$6(t-4)$	$6t+22$	46	si $4 < t < 5'5$

Luego $s_2'(t) = h'(t) = v(t)$ y, por tanto, $s_2(t)$ y $h(t)$ son primitivas de $v(t)$.

Las diferencias notadas entre las superficies y las funciones $v(t)$ y $h(t)$ son constantes (!).

Si aplicamos ahora lo aprendido para calcular la primitiva de una función, tenemos la tabla siguiente:

primitiva general (aceleración)	superficie (s_1)
$\int 8\, dt = 8t + C$	$8t$
$\int -8\, dt = -8t + C$	$-8t + 24$
$\int 0\, dt = C$	0

primitiva general (velocidad)	superficie (s_2)
$\int 8t\ dt = 4t^2 + C$	$4t^2$
$\int (-8t + 38)\ dt = -4t^2 + 38t + C$	$-4t^2 + 38t - 78$
$\int 6\ dt = 6t + C$	$6t - 24$

Por tanto, podemos concluir que, para un determinado valor de la constante C (0, − 78 ó − 24), la primitiva general coincide con el área bajo la curva.

¡El área bajo la curva es, pues, una primitiva particular de la función!

Estamos a sólo un paso de la Regla de Barrow.

Sabemos que $v(t) = 8t$, para t en]0, 3[.

La primitiva general es $4t^2 + C$, y para C = 0 coincide con $s_2(t) = 4t^2$ que da el área encerrada por la curva en dicho intervalo.

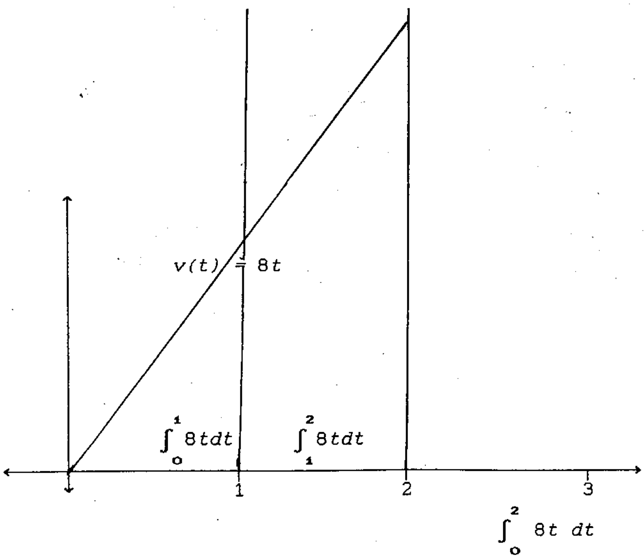
Definimos por tanto el área encerrada por la curva en el intervalo]0, t[por:

$$s(t) = \int_0^t 8t\ dt$$

Ejemplo: $s(1) = \int_0^1 8t\ dt = 4$ y $s(2) = \int_0^2 8t\ dt = 16$

Areas encerradas por la curva $v(t) = 8t$ en los intervalos [0, 1] y [0, 2], respectivamente.

Una rápida ojeada a la figura siguiente, nos hace ver que el área encerrada entre la curva y el eje en el intervalo [1, 2] es:



$$s(2) - s(1) = \int_1^2 8t\ dt = \left[4t^2 \right]_1^2$$

Resultado conocido como Regla de Barrow:

> Si F(x) es tal que F'(x) = $f(x)$, entonces:
>
> $$\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)$$

Y estas fueron las variaciones introducidas en el desarrollo normal del tema en un grupo de tercero de B.U.P. en el último trimestre del curso 87/88.

REFERENCIAS

[1] *The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass.* Judith V. Grabiner. Mathematics Magazine, vol.56, n° 4, septiembre 1983.