NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 87, noviembre de 2014, páginas 5-23

Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas

Laura Conejo y Tomás Ortega
(Universidad de Valladolid. España)

Fecha de recepción: 21 de octubre de 2013
Fecha de aceptación: 5 de abril de 2014

Resumen Se describe el análisis realizado sobre la evolución del tratamiento de la demostración matemática en libros de textos desde la Ley General de Educación hasta la Ley Orgánica de Educación. Concretamente, se presenta una síntesis sobre los procedimientos para establecer los teoremas de Bolzano, Darboux y Weierstrass en los textos de cuatro editoriales. Se han elaborado categorías de análisis que responden a un marco de integración de esquemas de prueba, funciones de la demostración, pruebas preformales y tipos de demostración, y una metodología de investigación de textos históricos. El artículo termina discutiendo el análisis realizado y las conclusiones de la investigación.

Palabras clave Esquemas de prueba, pruebas preformales, demostración, libros de texto, teoremas de continuidad, análisis matemático.

Abstract In this paper we present the analysis of the mathematical proof in textbooks of the last three Spanish Educations Laws and two last courses of Secondary Education. The article presents a summary of the procedures for establishing the theorems of Bolzano, Darboux and Weierstrass in four textbook publishers. We have developed some analysis categories which integrate proof schemes, proof functions, preformal proofs and different types of proofs, and a historical research methodology. Finally, we describe the analysis and conclusions of the study.

Keywords Proof Schemes, Preformal Proofs, Mathematical Proofs, Textbooks, Continuity Theorems, Mathematical Analysis.

1. Introducción

La demostración matemática es considerada uno de los procedimientos más importantes de las matemáticas, su motor de desarrollo. Su definición en el campo de las matemáticas es difícil, ya que depende en gran medida de las épocas y de las personas. Si recurrimos a definiciones formales podemos encontrar la descripción realizada por Bourbaki (1970), como teoría que comprende términos y relaciones siguiendo unas determinadas reglas, o Bouvier y George (1984), que explicitan las significaciones de la *demostración formal del cálculo de predicados* y de la *demostración formal del cálculo de proposiciones,* tal y como describen Ibañes y Ortega (2005). Desde el punto de vista de la Didáctica de la Matemática nos interesan las caracterizaciones realizadas por Van Dormolen (1977), Bell (1979), Balacheff (1987), Van Asch (1993) o Mizayaki (2000), que establecen diferentes niveles de demostración. Aunque su fin primordial siempre se ha considerado como verificar la proposición objeto de estudio, como investigadores en didáctica nos interesan más las funciones atribuidas por Bell (1976) o De Villiers (1993): verificación, explicación, sistematización, descubrimiento, comunicación, y tal y como defienden Ibañes y Ortega (2002a), creemos que el principal valor de la demostración es el de su función de explicación, aunque no sea único, y que ésta puede ser sustituida por otro tipo de pruebas.

Por otro lado, un elemento importante en los procesos de enseñanza-aprendizaje es el libro de texto (LT). Entendemos como *libro de texto* (LT), *manual escolar* o *libro escolar* los libros que utilizan los profesores y alumnos, a lo largo de un curso escolar, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un área de conocimiento (González, 2002). Se le atribuyen diferentes funciones: simbólica, pedagógica, social, ideológica y política, y cómo defiende Schubring (1987), los libros de texto, en la práctica, determinan la enseñanza de un país más que los decretos de los distintos gobiernos, ya que considera que tienen mayor influencia en la práctica educativa que los currículos educativos promulgados por las órdenes ministeriales. Además, su análisis nos proporciona información acerca del conocimiento matemático que una sociedad considera pertinente en un determinado momento histórico (González, 2002), ya que influyen en qué y cómo deben aprender los alumnos (García-Rodeja, 1997).

A lo largo de los años, las investigaciones realizadas en torno a estos elementos han sido muy numerosas, como por ejemplo, los trabajos desarrollados sobre la enseñanza y aprendizaje de la demostración (Hanna, 1989, 1990; Hanna y Barbeau, 2010; Ibañes y Ortega, 1998, 2001, 2002a, 2004; Dos Santos, 2010; González, 2012), sobre las funciones de la demostración (Bell, 1976; De Villiers, 1993; Ibañes y Ortega, 2001), sobre niveles de demostración (Balacheff, 1987; Van Asch, 1993; Harel & Sowder, 1998) y sobre la demostración en el aula (Hanna, 1990; Ibañes y Ortega, 2001, 2002a, 2005; Dos Santos, 2010; González, 2012). En torno a los LT, entre otros, encontramos las investigaciones realizadas por González (2002), Herdeiro (2010), López (2011) o Monterrubio y Ortega (2012). Sin embargo, en España apenas hemos encontrado investigaciones en las que se conjuguen ambos elementos, la demostración matemática y los libros de texto.

A raíz de los trabajos de Ibañes y Ortega (2001, 2002a,…) sobre los esquemas de prueba (EP) de los alumnos, hemos decidido realizar un análisis de cómo aparece tratada la demostración en los LT, y responder a los siguientes interrogantes que constituyen el objetivo general de la investigación: ¿qué importancia conceden los LT a las demostraciones matemáticas? Cuando no se demuestra, ¿qué tipo de justificaciones aparecen? ¿Qué función tienen las demostraciones en los LT? ¿Cómo ha evolucionado la demostración con los sucesivos cambios recientes de legislación?

El trabajo que aquí se presenta forma parte de un proyecto más general en el que se analiza el tratamiento que hacen los LT sobre las demostraciones en límites, continuidad y derivabilidad en los últimos currículos de 3º de BUP y COU de la Ley General de Educación (LGE) de 1970 y el Bachillerato de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990 y de la Ley Orgánica de Educación (LOE) de 2006 (alumnos entre 16 y 18 años en todas las legislaciones). Nuestra intención es determinar la evolución de la demostración en los LT de los cursos citados, clasificar los EP utilizados según el modelo de Ibañes y Ortega (2001) y determinar los procesos de enseñanza de las matemáticas a través de los LT en relación con la demostración o justificaciones alternativas.

2. Objetivos del estudio

Los objetivos de investigación vienen determinados por los interrogantes que se acaban de formular. En este artículo se presenta una investigación parcial con la que se ha tratado de dar respuesta a la evolución y a los tipos de justificaciones de los teoremas fundamentales de continuidad que aparecen en los textos de matemáticas de COU y 2º de Bachillerato LOGSE y LOE. Para ser más concretos, a continuación se especifican los objetivos de la investigación que aquí se describe:

- Analizar la presencia de la demostración en los libros de texto correspondientes a los teoremas de los contenidos curriculares de continuidad de las tres últimas leyes educativas.
- Establecer una clasificación de los tipos de justificación utilizados según los niveles (esquemas de prueba), la tipología, las funciones de la demostración.
- Determinar la evolución de las justificaciones de estos teoremas en los periodos en vigor de estas leyes educativas.
- Descubrir posibles errores relativos a la presentación de los enunciados y de las justificaciones de los teoremas.
- Proponer una secuencia didáctica que integre los resultados encontrados.

3. Metodología

Según Fox (1981), la investigación histórica en educación tiene como objetivo resolver problemas actuales mediante el estudio intensivo de materiales que ya existen. En nuestro caso, dicho problema está relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática. En esta investigación nos proponemos acercarnos al tratamiento que de ésta se ha hecho en los libros de texto desde los años 70. Por tanto, nuestro trabajo requiere de una metodología adecuada a este tipo de estudio. Es por esta razón que, para la realización de nuestro trabajo, estamos siguiendo el método histórico de investigación en educación (Ruiz-Berrio, 1976), utilizado por González (2002), González y Sierra (2003) y López (2011) con éxito. Dicho método consta de cuatro fases: heurística, crítica, hermenéutica y exposición. La primera fase (heurística) consiste en la búsqueda y selección de fuentes documentales sobre las que realizaremos nuestra investigación, tanto para conocer los antecedentes de nuestro estudio como para determinar la muestra que vamos a analizar. La segunda fase (crítica) conlleva el análisis de toda la documentación seleccionada en la primera fase, tras la cual, pasamos a la tercera fase (hermenéutica), en la que se interpretan los datos obtenidos a la luz de los análisis realizados. Finalmente, en la cuarta (exposición) damos a conocer los resultados obtenidos. A continuación, y siguiendo este esquema de fases, describimos el contenido de cada una de ellas en el presente trabajo, lo que conlleva una descripción de la metodología.

3.1. Fase 1: revisión de la literatura y búsqueda y selección de la muestra (heurística)

En la primera fase de nuestro trabajo, diferenciamos dos partes: por un lado, revisamos, las investigaciones realizadas en torno a los dos puntos centrales de nuestro trabajo, la DM y el LT, lo que, tras una segunda fase de análisis, dio lugar a las categorías de análisis que describimos más adelante; por otro lado, realizamos la selección de la muestra a analizar. Para determinar esta muestra, fijamos en primer lugar la restricción temporal.

Esta restricción se corresponde a las tres últimas legislaciones educativas españolas, esto es, la Ley General de Educación de 1970 (LGE), la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo de 1990 (LOGSE) y la Ley Orgánica de Educación de 2006 (LOE). Una vez delimitada temporalmente la población, restringimos el estudio a parte de los conceptos del Análisis Matemático que se estudian en Educación Secundaria, y que a nuestro juicio eran susceptibles de ser demostrados en los niveles seleccionados. Los conceptos a los que nos referimos son los de límite, continuidad y derivabilidad, aunque el trabajo que aquí se presenta muestra únicamente el análisis realizado en torno a tres teoremas fundamentales de continuidad, esto es, el teorema de Bolzano, el teorema de los valores intermedios, también conocido como propiedad de Darboux, y el teorema de Weierstrass.

En la Educación Secundaria, la presentación y posible justificación de los teoremas descritos anteriormente se realiza en el último curso, es decir, en COU para la LGE y en 2º de Bachillerato para la LOGSE y la LOE. Por esta razón, sólo presentamos el análisis realizado para los libros correspondientes a dichos cursos.

Dada la inviabilidad de analizar todos los libros de texto escritos para los cursos seleccionados, hemos elegido cuatro editoriales atendiendo a dos criterios: amplia difusión (los libros más utilizados por profesores y alumnos para las edades consideradas) y continuidad en el tiempo (que su edición y utilización haya sido continua desde la década de 1970). El primer criterio nos pareció importante por dos razones: porque la muestra fuera lo más representativa posible y porque los libros fueran más accesibles, sobre todo aquellos que corresponden a legislaciones que ya no están en vigor. Por otro lado, consideramos que es necesario que las editoriales tengan continuidad en el tiempo con el objetivo de que las conclusiones extraídas tras el análisis de los diferentes LT sean independientes de la línea editorial en sí, sino debidas a la legislación a la que se corresponden. Esto dio lugar a la elección de las editoriales Anaya, Santillana, SM y Vicens-Vives. Debido al carácter efímero de este tipo de libro (ya que las editoriales sacan nuevas versiones cada pocos años con pequeños cambios y los modifican para adaptarse a las leyes generales), hemos encontrado serias dificultades para localizar al menos un ejemplar de cada periodo y cada editorial, a pesar de que las editoriales seleccionadas son conocidas y ampliamente utilizadas. Finalmente, hemos encontrado una muestra de 13 textos, correspondientes a las editoriales anteriormente citadas. Aunque pueden encontrarse las referencias completas en la bibliografía, para simplificar su notación, debido a que en muchos casos el número de autores es muy numeroso, en la descripción del análisis invocaremos a cada LT por la editorial a la que pertenece y el año de edición del ejemplar que hemos considerado, es decir, usaremos el código *editorial (año de edición)*. En la tabla 1 se presentan codificados los 13 libros que componen la muestra.

<table>
<tr><th colspan="6">Libros de texto analizados</th></tr>
<tr><td>LGE</td><td>1979-1989</td><td>Anaya (1989)</td><td>Santillana (1981)</td><td>SM (1980)</td><td>Vicens-Vives (1979)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">LOGSE</td><td rowspan="2">1997-2004</td><td rowspan="2">Anaya (2003)</td><td rowspan="2">Santillana (1997)</td><td rowspan="2">SM (2001)</td><td>Vicens-Vives (1999)</td></tr>
<tr><td>Vicens-Vives (2004)</td></tr>
<tr><td>LOE</td><td>2009-2010</td><td>Anaya (2009)</td><td>Santillana (2009)</td><td>SM (2010)</td><td>Vicens-Vives (2009)</td></tr>
</table>

Tabla 1. Libros de texto de COU y 2º de Bachillerato LOGSE y LOE analizados.

No obstante, cabe destacar que los LT correspondientes a LOGSE y LOE de una de las editoriales, Anaya, son prácticamente iguales (únicamente difieren en las introducciones de los temas y en las actividades). Por tanto, el análisis realizado en ambos es el mismo. Por otro lado, se puede ver que en una de las editoriales, Vicens-Vives, se han localizado dos textos diferentes para la misma ley educativa y se han analizado ambos.

3.2. Fase 2: establecimiento de las categorías de análisis y análisis del saber institucional (hermenéutica)

Esta fase consta de dos partes, una consiste en el análisis de la literatura relacionada con nuestro trabajo, y el establecimiento de las categorías de análisis que nos sirven para analizar la muestra seleccionada, y la otra, comprende el análisis del saber institucional, es decir, de los planes de estudio de cada periodo elegido y las referencias que hacen a los procesos de justificación.

Establecimiento de las categorías de análisis para la recogida de datos en los libros

Para la definición de las siguientes categorías se han considerado diferentes trabajos en torno a la DM y los LT. En primer lugar, para analizar el tipo de justificación utilizada en los LT hemos partido del concepto de esquema de prueba (EP), definido por Harel & Sowder (1998), y utilizado por Ibañes y Ortega (2001) y Dos Santos (2010) en sus respectivos trabajos, y las pruebas preformales (González, 2012). El EP definido por Harel & Sowder se refiere a esquemas personales, por lo que hemos adaptado dicha definición al contexto de los LT, entendiendo que un EP de un LT es lo *que el LT considera como persuasión y convencimiento para un posible lector*, entendiendo que convencimiento es *el proceso utilizado por el LT para eliminar las dudas del lector sobre la veracidad de una afirmación* y persuasión es *el proceso del libro que, utilizado por un individuo, elimina las dudas de otros sobre la veracidad de una afirmación*. Por su parte, las pruebas preformales (PP) consisten en *una línea de razonamiento, que podría formalizarse a una prueba formal, y en la cual la idea esencial de la demostración se encuentra reflejada* (Van Asch, 1993). Estas dos definiciones dan lugar a las siguientes categorías de análisis de las justificaciones (ya que no siempre son demostraciones) de los teoremas:

- No se hace ningún tipo de justificación del enunciado.
- EP inductivo de un caso: se trata de convencer de la validez de una conjetura mediante la evaluación cuantitativa de un caso particular.
- EP inductivo de varios casos: como en el caso anterior, pero se realiza con varios casos particulares.
- EP inductivo sistemáticos: como en los casos anteriores, pero los ejemplos particulares se eligen de forma organizada, tratando de cubrir las posibles diferentes casuísticas.
- EP transformacionales: se realizan transformaciones de imágenes o signos por medio de la deducción.
- EP axiomáticos: se realiza la demostración a partir de axiomas, entendiendo como tales los enunciados primarios y los resultados que se han deducido mediante demostraciones.
- Pruebas preformales: se incluye como EP por su carácter de convencimiento y persuasión. Refleja la esencia de una demostración formal (EP transformacional y EP axiomático) y, por tanto, hereda el carácter axiomático y transformacional de estos EP.

Estas categorías no son excluyentes y, de hecho, se pueden encontrar combinaciones de más de una de ellas en algunos casos.

Se utiliza la clasificación de demostraciones realizada por Ibañes y Ortega (1998). Esta clasificación está hecha desde la perspectiva de la propia matemática y en ella consideran el tipo, método, estilo y modo. Nosotros, en nuestro análisis, también consideramos estas técnicas para clasificar los esquemas de prueba que son utilizados en los LT. Se describen brevemente las características de cada una de estas técnicas y en la propuesta didáctica se aconseja el uso de técnicas más explicativas que faciliten la comprensión de las pruebas.

1. Tipo: atendemos a la estructura lógica del enunciado, ya que consideramos que la forma de enunciar éste influye en el tipo de EP utilizado.
    a. En relación a la implicación puede ser de condición necesaria, suficiente, y necesaria y suficiente.
    b. En relación al cuantificador universal, puede ser de existencia simple, imposibilidad, y existencia y unicidad.
2. Método: atendemos a los procedimientos lógicos utilizados en el EP. Puede ser por silogismo, por casos, por reducción al absurdo, por inducción completa, constructivo, ya sea de ejemplo o contraejemplo, por analogía y por dualidad. Únicamente tiene sentido considerar estás categorías en los EP axiomáticos, transformacionales o en las Pruebas Preformales.
3. Estilo: atendiendo a los procedimientos matemáticos. Depende del área en el que nos encontramos. En este caso, como estudiamos las justificaciones de los resultados correspondientes al Análisis Matemático, el estilo más habitual será el propio del área, aunque puede ser de dos tipos: global, cuando se aplican teoremas y local, si realiza una discusión en un entorno. También podemos encontrar estilos gráficos, utilizando coordenadas, y algebraicos, caracterizados principalmente por manipulación simbólica. En general, esta categoría tiene sentido si se trata de EP axiomáticos, transformacionales o PP, pero en el caso de EP inductivos de uno o varios casos y sistemático haremos la distinción de si el EP es algébrico o gráfico.
4. Modo: en función del procedimiento de exposición. Puede ser sintético o directo, y analítico o indirecto.
    a. El modo sintético o directo: se utilizan los conceptos básicos para razonar.
    b. El modo analítico o indirecto, se utilizan elementos que ya han sido justificados anteriormente.

Otro aspecto que nos interesa analizar son las funciones de la DM reflejadas en el texto. Para ello hemos considerado el modelo creado por de Villiers (1993), que es una ampliación del que definió Bell (1976), y que ha sido utilizado posteriormente por Ibañes y Ortega (2001) y Dos Santos (2010). Este modelo comprende las siguientes funciones:

1. Verificación: concerniente a la veracidad de una afirmación.
2. Explicación: profundización en por qué es verdad.
3. Sistematización: la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas. Esta función se supone que el autor del LT ya la ha realizado antes de plasmarlo en el texto; por tanto, no ha lugar su estudio. No obstante, podría ocurrir que en algunos casos la sistematización no se hubiera realizado de forma correcta.
4. Descubrimiento: es decir, el descubrimiento o invención de nuevos resultados implícitos en la propia demostración, pero diferentes del teorema que prueba.
5. Comunicación: la transmisión del conocimiento matemático.

Hemos aplicado este modelo a cada EP que aparece en los LT tratando de descubrir cuáles de estas funciones son consideradas. También consideramos la posibilidad de que no aparezca explícitamente ninguna de las funciones y de que se consideren otras diferentes. Este análisis puede reflejar la intencionalidad del autor: verificativa, explicativa,…

En cuanto a las expresiones utilizadas, analizaremos las expresiones matemáticas que aparecen, en el enunciado y la demostración, si explica su significado, y los sistemas de representación (Janvier, 1987) usados (descripción verbal, tabla, gráfica y fórmula). Asimismo, en este apartado se realiza un análisis semántico de los enunciados, independientemente del tipo de los mismos.

Por último, realizaremos ciertas consideraciones globales sobre la justificación utilizada y sobre el enunciado en general, observando si el LT reconoce el EP utilizado como tal y si se refiere a las consecuencias de esta justificación (aplicación del resultado, no necesidad de comprobaciones posteriores o búsqueda de contraejemplos), si explica globalmente el proceso (las líneas generales que se han seguido en la demostración en sí), si comenta el significado del teorema (las relaciones que establece, su utilidad), si separa con claridad el enunciado de la justificación y si indica otras posibles vías de justificación.

Análisis del saber institucional. Planes de estudio

Si bien es cierto que en la realidad los libros de texto determinan en mayor medida los currículos que las órdenes ministeriales (Schubring, 1987), los LT se debieran haber construido siguiendo las instrucciones de estas leyes, pero el hecho de que en la actualidad no son sometidos a ningún control ministerial no implica que den respuesta fielmente al currículo legal, pero como éste debe regular la actividad docente, las editoriales tratan de ajustarse al mismo. Por esta razón es imprescindible que antes de acometer un análisis de los LT revisemos qué directrices debieran seguir, ya que la presencia o no de justificaciones puede estar determinada por lo que indiquen los documentos oficiales.

En la revisión realizada sobre las directrices curriculares de COU (*Resolución por la que se establecen los contenidos y orientaciones metodológicas del Curso de Orientación Universitaria y se dictan instrucciones sobre el mismo de 17 de marzo de 1978)*, no encontramos ninguna referencia explícita a la demostración matemática. Por otro lado, el mismo documento indica que el carácter del curso está orientado hacia la preparación para el acceso a la enseñanza superior y que las diferentes especialidades a las que puede acceder el alumno (estudios de matemáticas, ciencias experimentales e ingenierías) aconsejan que la enseñanza sea adecuada a estos fines. Por tanto, nosotros consideramos que la demostración será necesaria en la formación de dichos alumnos, cuyos estudios están orientados hacia la enseñanza superior en especialidades de ciencias.

Por su parte, en las revisiones de los currículos de Bachillerato de LOGSE, tanto en la primera versión de 1992 (Ministerio de Educación y Ciencia, 1992) como en la modificación de 2001 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2001), observamos ciertas indicaciones sobre la demostración, tales como la introducción de las demostraciones y de encadenamientos conceptuales y lógicos, la necesidad de verificación y la utilización de los modos de argumentación que el propio currículo considera que son propios de las matemáticas, lo que implica el uso de demostraciones matemáticas en esta etapa educativa.

En la misma línea, LOE, en sus concreciones curriculares para Bachillerato (Ministerio de Educación, Política Social y Deporte, 2008) se indica que los alumnos deben conocer la existencia de demostraciones rigurosas, sentir la necesidad de verificación, aplicar la inducción y deducción, y realizar formulaciones orientadas a la aceptación o rechazo de conjeturas formuladas por ellos. Todos estos indicadores están orientados a la enseñanza de la demostración y el profesor no puede eludirlos, ya que debe cumplir la ley y los alumnos, por la misma razón, deben aprenderlas.

Tras la revisión de los planes de estudio se puede interpretar que la presencia de la demostración matemática en los LT de la muestra podría ser indiscutible, pero en los LT pueden aparecer justificaciones alternativas a la demostración, por ejemplo, poniendo en valor el razonamiento inductivo. Por tanto, en nuestro análisis deberíamos observar y, de hecho, analizamos el reflejo de estas alternativas curriculares.

3.3. Fase 3: análisis de los materiales seleccionados. (Hermenéutica)

A continuación mostramos el análisis de los libros de texto realizado a partir de las categorías de análisis anteriormente descritas. El primer punto que nos ha llamado la atención es la alteración del orden en la presentación de los teoremas más importantes y la no uniformidad de sus títulos. La mayoría de los textos consideran el orden Bolzano-Darboux-Weierstrass y también es mayoritaria, pero no uniforme, la coincidencia de los títulos de Bolzano y Weierstrass, pero no sucede lo mismo con Darboux:

- SM (1980) considera Weierstrass en primer lugar, seguido de Bolzano y a continuación Darboux.
- Vicens Vives (2004) titula primer teorema de Weierstrass al propio teorema de Weierstrass y segundo teorema de Weierstrass a una variación del teorema de Darboux, ya que considera los valores intermedios entre el mínimo y el máximo. Después presenta Bolzano como consecuencia de su segundo teorema de Weierstrass.
- En Vicens Vives (1979), Santillana (1981), Anaya (1989), Santillana (1997), Vicens Vives (1999), SM (2001), Anaya (2003), Santillana (2009), SM (2010) no nombran como tal al teorema de Darboux, sino como teorema de los valores intermedios.
- En Vicens Vives (1979) el teorema de Weierstrass recibe el nombre del teorema del máximo y del mínimo absolutos; este mismo teorema, en Santillana (1997) recibe el nombre de teorema de los extremos absolutos; en Santillana (1981) lo nombra como teorema de Bolzano-Weierstrass; finalmente, Anaya (1989) lo titula principio de existencia de máximo de Weierstrass.
- Vicens Vives (1979) nombra el teorema de Bolzano como el teorema de cambio de signo y Santillana (1997) como teorema de los ceros de Bolzano

Esta pluralidad de nombres y ordenaciones favorece la confusión para estudios posteriores y manifiesta una mala función de sistematización desde la perspectiva de la demostración. Una correcta sistematización exige que el teorema de Darboux se enuncie después de Bolzano, ya que su demostración se apoya (se fundamenta) en este último, y si se enuncia en los términos de máximo y mínimo, después de Weierstrass. El orden de Bolzano y Weierstrass es irrelevante, aunque cronológicamente es anterior el primero. Por tanto, la función de sistematización en los modelos de Bell y De Villiers es incorrecta.

Para el estudio de los EP, presentamos tres tablas, en cada una de las cuales mostramos los EP que reflejan los LT para el teorema de Bolzano en la tabla 2, para el teorema de Darboux en la tabla 3 y para el teorema de Weierstrass en la tabla 4. Además, para poder apreciar la evolución, hemos ordenado los LT en columnas en función de la editorial y los años de publicación, y por filas los EP utilizados en cada uno. De esta manera podemos comparar entre editoriales y por periodo educativo.

Para sintetizar la información recogida en las tres tablas se han codificado las categorías descritas para los esquemas de prueba de la siguiente manera: EP0, no se realiza ninguna justificación; EPind1, para los EP inductivos de un caso; EPind Var, los inductivos de varios casos; EPind Sist, los inductivos sistemáticos; EPax, para los EP axiomáticos; EP trans, para los que son transformacionales; y PP, para las pruebas preformales.

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Anaya</th><th>Santillana</th><th>SM</th><th>Vicens-Vives</th></tr>
<tr><td>LGE</td><td>1979-1989</td><td>EPax</td><td>EPax</td><td>EPax</td><td>EPax</td></tr>
<tr><td rowspan="2">LOGSE</td><td rowspan="2">1997-2004</td><td rowspan="2">EPind1</td><td rowspan="2">EPax</td><td rowspan="2">EPax</td><td>EPind Var</td></tr>
<tr><td>EPind1</td></tr>
<tr><td>LOE</td><td>2009-2010</td><td>EPind1</td><td>EPind Var</td><td>EPax</td><td>EPax</td></tr>
</table>

Tabla 2. EP reflejados en los LT para el teorema de Bolzano.

Para el teorema de Bolzano (tabla 2) vemos que la prueba más abundante es el EP axiomático, aunque en los ejemplares más recientes hay pasos de la justificación que estarían incompletos. Por editoriales, vemos que Anaya sustituye el EP axiomático por una EP inductivo de 1 caso, tanto en LOGSE como en LOE; Santillana utiliza EPax en los LT de los dos primeros periodos y luego lo sustituye por un EP inductivo de varios casos; finalmente, Vicens-Vives, aunque en los LT de LOGSE utiliza EP inductivos, recupera el EP axiomático en el último periodo. La única editorial que mantiene EP axiomáticos en los tres periodos es SM.

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Anaya</th><th>Santillana</th><th>SM</th><th>Vicens-Vives</th></tr>
<tr><td>LGE</td><td>1979-1989</td><td>EPax y trans</td><td>Epax y trans</td><td>EPax y trans</td><td>EPax y trans</td></tr>
<tr><td rowspan="2">LOGSE</td><td rowspan="2">1997-2004</td><td rowspan="2">EPind1</td><td rowspan="2">EPax y trans</td><td rowspan="2">EPax y trans</td><td>EPax y trans</td></tr>
<tr><td>EPind Var</td></tr>
<tr><td>LOE</td><td>2009-2010</td><td>EPind1</td><td>EPind1</td><td>EPax y trans</td><td>EPind1</td></tr>
</table>

Tabla 3. EP reflejados en los LT para el teorema de Darboux.

En las justificaciones del teorema de Darboux (tabla 3) apreciamos una utilización generalizada de EP axiomáticos combinados con EP transformacionales, aunque casi todos los LT que usaban un EP inductivo de 1 o varios casos para el teorema de Bolzano continúan usando ese mismo tipo de esquemas en éste. Únicamente dos de los textos de Vicens-Vives cambian de tipo de EP con respeto al resultado anterior. Es destacable el hecho de que la demostración axiomática de este teorema se puede considerar de menor dificultad que las otras dos, ya que ésta es consecuencia directa del teorema de Bolzano. Todos los LT que utilizan EP axiomáticos y transformacionales han enunciado el teorema entre $f(a)$ y $f(b)$, por lo que la justificación utilizada es la usual: consideran una función auxiliar, como diferencia de la función de las hipótesis y un valor, y_0, entre $f(a)$ y $f(b)$, y luego aplican el teorema de Bolzano a esta función, $f(x)-y_0$. Únicamente un LT ha enunciado el teorema entre el mínimo y el máximo (Vicens-Vives, 2004) pero este LT altera el orden de los teoremas, enunciando el teorema de Darboux después de Weierstrass. Lógicamente, en los textos que presentan el teorema de Darboux entre el mínimo y el máximo, que es más general que entre $f(a)$ y $f(b)$, previamente tienen que haber establecido el teorema de Weierstrass. En caso contrario no habrían tenido en cuenta la función de sistematización.

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Anaya</th><th>Santillana</th><th>SM</th><th>Vicens-Vives</th></tr>
<tr><td>LGE</td><td>1979-1989</td><td>EPax y trans</td><td>Epax y trans</td><td>EPax y trans</td><td>EPax y trans</td></tr>
<tr><td rowspan="2">LOGSE</td><td rowspan="2">1997-2004</td><td rowspan="2">EPind1</td><td rowspan="2">EPax y trans</td><td rowspan="2">EP0</td><td>EP0</td></tr>
<tr><td>EPind1</td></tr>
<tr><td>LOE</td><td>2009-2010</td><td>EPind1</td><td>EPind Var</td><td>EP0</td><td>EP0</td></tr>
</table>

Tabla 4. EP reflejados en los LT para el teorema de Weierstrass.

En el caso del teorema de Weiertrass (tabla 4), los textos de LOGSE y LOE de las editoriales SM y Vicens-Vives no justifican el teorema, se limitan a enunciarlo, quizá porque consideran que el nivel de dificultad de esta demostración es mayor. En estas editoriales, este teorema se enuncia con la finalidad de ser aplicado. Anaya continua con la tendencia de justificar mediante un EP inductivo de un caso en LOGSE y LOE, y Santillana vuelve a utilizar un EP inductivo de varios casos en LOE. En este texto se presentan dos representaciones gráficas de sendas funciones que cumplen las hipótesis del teorema, en ellas se señalan su máximo y su mínimo (figura 1). Es destacable el hecho de que uno de los LT (Anaya, 1989) realiza una demostración errónea del teorema de Weierstrass. Esta editorial trata de hacer una demostración parecida a la del teorema de Bolzano construyendo la sucesión de intervalos encajados y omite la posible argumentación que establecería el teorema, hecho que se describe posteriormente.

Si observamos la evolución en el tiempo, la tendencia es sustituir los EPax y EPtrans, al menos en los teoremas más complicados de demostrar, o que requieren más resultados previos, por EPI de uno o varios casos. Este hecho es más claro en el teorema de Weierstrass que, salvo en los textos de LGE y Santillana de LOGSE, sólo se enuncia o, como mucho, se complementa con EPI de uno o de varios casos, bien con gráficos o bien con ejemplos algebraicos.

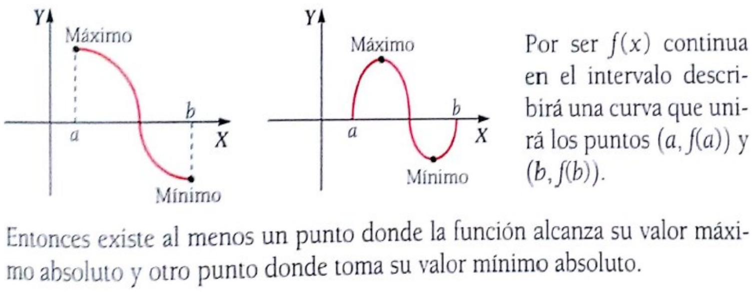


Figura 1. EP inductivo de varios casos para el teorema de Weierstrass en Santillana (2009).

En cuanto a las técnicas empleadas (tipo de enunciado, método, estilo y modo), no encontramos gran variación. En el enunciado, aparte de las diferentes formas verbales utilizadas para la misma acción. Si atendemos a su estructura lógica, encontramos sobre todo condición suficiente y existencia simple, aunque dicha simplicidad no se expresa siempre de manera específica (no se indica que existe al menos uno). Para el análisis del método, estilo y modo utilizados, podemos establecer una división: en primer lugar, las justificaciones tipo EP axiomático o transformacional y, en segundo, las que consideran EP inductivos de uno o varios casos (ya que no consideramos los EP0 porque en las ausencias de justificación no se puede encontrar ni método ni estilo ni modo). En general, todos los LT que utilizan EP axiomáticos o transformacionales, con mayor o menor completitud, realizan pruebas similares: en el caso de Bolzano, consideran un razonamiento local utilizando el teorema de conservación de signo en un entorno; en el caso de Darboux, consideran la función auxiliar descrita anteriormente; finalmente, en el caso de Weiertrass, construyen una función que contradice las hipótesis. Por tanto, la clasificación de método, estilo y modo en estos casos es similar: el método utilizado en Bolzano y Weierstrass es la reducción al absurdo (combinado con casos o silogismo) y en el teorema de Darboux el silogismo.

En cuanto al estilo, se utiliza fundamentalmente el del Análisis Matemático (global en el caso de Darboux, local en Bolzano, y global y local en Weierstrass), pero también aparece el algebraico en Darboux y Weierstrass; en cuanto al modo, quizá por la naturaleza de los teoremas, es analítico en todos los casos. La demostración del teorema de Weierstrass, utilizada por Anaya (1989), aunque la hemos clasificado como EP axiomática y transformacional por el carácter de la misma, es errónea; su intención es repetir un proceso de razonamiento local similar al efectuado para el teorema de Bolzano, pero la conclusión a la que conduce es una nueva situación con las mismas hipótesis del enunciado únicamente resoluble realizando el razonamiento usual llevado a cabo en la demostración de dicho teorema. Además, considera inmediato para el lector el punto en el que esta justificación falla, por lo que la demostración no sólo no es más clara, sino que es errónea.

Los LT que utilizan EP inductivos de uno o varios casos, en general, utilizan el estilo gráfico, aunque en ocasiones lo complementan con el algebraico, y en el caso de Santillana (2009) utiliza coordenadas para justificar los teoremas (figura 2). Aunque no se trate de demostraciones propiamente dichas, los EP inductivos en los que se utilizan gráficas cumplen mejor su función de convencer al lector que aquellos que muestran un EP axiomáticos de manera incompleta. Desde la perspectiva de Balacheff (1987) se trataría de un *ejemplo genérico*. Sin embargo, nosotros no consideramos esta clasificación porque entendemos que los Esquemas de Prueba se adaptan mejor al análisis que estamos realizando.

La demostración de forma gráfica de este teorema es la siguiente:

Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ estarán situados uno por debajo y otro por encima del eje X. Como la función es continua en todo el intervalo, $f(x)$ describirá una curva que unirá los dos puntos.

Por tanto, dicha curva debe cortar, al menos una vez, al eje X, es decir, la función se anula en un punto del intervalo.

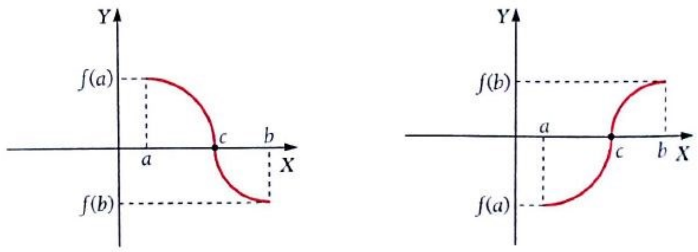


Figura 2. Utilización de coordenadas en la justificación del teorema de Bolzano en Santillana (2009).

Si observamos las funciones de la demostración, ya hemos mencionado que existe un error de sistematización en los textos que alteran el orden usual de estos tres resultados: SM (2010), que considera que Darboux es una generalización de Bolzano y Vicens Vives (2004), que considera que Bolzano es una consecuencia del 2º teorema de Weierstrass (teorema de los valores intermedios entre el mínimo y el máximo). El resto de los LT consideran que el teorema de Darboux es consecuencia de Bolzano, aunque algunos (Vicens-Vives, 1979; SM, 1980; Santillana, 1981; Santillana, 1997; Vicens Vives, 1999; Vicens Vives, 2004; Santillana, 2009) no lo indican. Por lo demás, las únicas funciones de la demostración que se aprecian en todos los LT son las de comunicación y verificación. Aunque los textos no lo indican, podríamos hablar de la función de descubrimiento en dos casos (SM, 2001 y SM, 2010), ya que la sucesión de intervalos encajados que se construye en la demostración del teorema de Bolzano constituye la regla de bisección para calcular los ceros de una función de forma aproximada. En la figura 3 vemos un ejemplo de dicha función de descubrimiento.

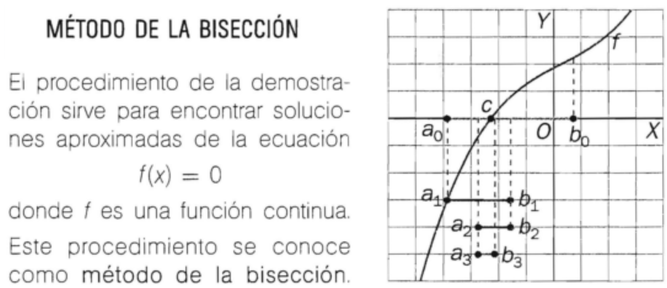


Figura 3. Función de descubrimiento en el LT de SM (2010).

En Ibañes y Ortega (2002b) se establece que los esquemas de prueba dependen de los enunciados y, por esta razón se hace un breve análisis de las acciones verbales de los mismos y del simbolismo presente. El sistema de representación más habitual es el verbal, combinado con algunos símbolos básicos matemáticos, que no se explican, sino que se utilizan de forma rutinaria. No se utilizan ni signos de implicaciones, ni de cuantificadores universales, ni existenciales. Por otra parte, encontramos numerosas acciones verbales diferentes para el mismo teorema: “existe” y “se anula” en el caso de Bolzano, “alcanza”, “existe” y “toma” para Darboux y “alcanza”, “admite”, “existen”, “tiene” y “se cumple que” para Weierstrass. La significación de las acciones verbales es muy diferente y, nuevamente, esto contribuye a confusión de los alumnos en sus estudios posteriores. Por ejemplo, existir significa ser real y verdadero, alcanzar tiene muchas acepciones y la más repetida es llegar a tocar o juntarse con algo, tomar tiene muchas más y la que mejor se ajusta es adquirir, admitir significa tener cierta cabida… Esta diversidad de acciones verbales conlleva a errores por la confusión semántica asociada (Socas, 2007)

Todos los LT utilizan gráficas funcionales de forma recurrente en todos los teoremas, a excepción del teorema de Weierstrass en aquellos textos que se limitan a enunciarlo (EP0). La utilización de estas gráficas ilustra o clarifica la situación descrita en el teorema, pero es conveniente ser cuidadoso en la elección que se realiza de éstas. Aunque Socas (2007) relaciona algunos errores con la presencia de esquemas cognitivos inadecuados, Arce y Ortega (2013) detectan que la imprecisión en los trazados de gráficas por parte de los alumnos no representan correctamente las propiedades de las funciones representadas y, por tanto, son fuente de dificultades para el aprendizaje. Aunque en este caso las gráficas estudiadas no corresponden a las realizadas por los estudiantes, dado que se encuentran en una de sus herramientas de estudio, el LT, pueden originar dichas dificultades asociadas a la percepción de estas gráficas, por lo que dichas representaciones deben ser elegidas de forma cuidadosa. En los textos analizados encontramos algunos ejemplos destacables de mala construcción en las representaciones gráficas que ilustran los teoremas. Por ejemplo, en las figuras 1 y 2 observamos que las funciones representadas nos hacen pensar que, por facilidad de su trazado, están formadas por cuartos de circunferencia y semielipses. Tales gráficas son poco representativas de funciones generales y pueden confundir a los alumnos, atribuyendo a las funciones características propias de estos ejemplos.

Otro ejemplo de mala elección de una gráfica de una función es la que encontramos en la figura 4 (Vicens-Vives, 1979), en la que se muestran varios errores: los puntos que en el enunciado se consideran dentro del intervalo, en la gráfica se representan fuera del mismo; una de las desigualdades está mal escrita, $f(x_1) < \eta < f(x_1)$, aunque creemos que puede ser un error tipográfico, pero, en general, la gráfica reproduce una situación diferente a la del enunciado del teorema.

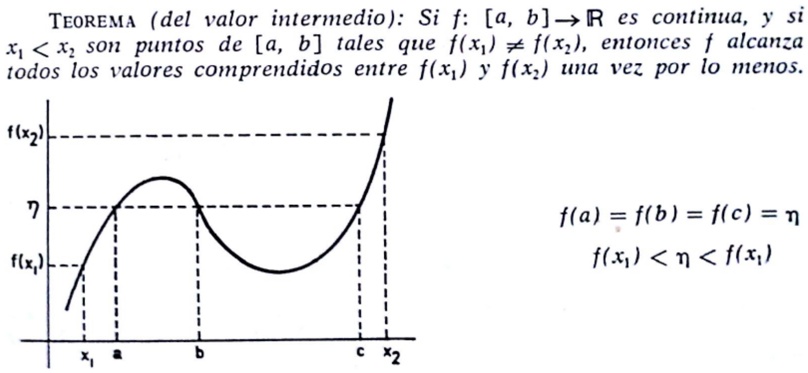


Figura 4. Errores en la representación gráfica del teorema de Darboux en Vicens-Vives (1979).

En el caso de Bolzano encontramos que todos los LT complementan sus justificaciones con gráficas en las que se refleja la situación básica descrita en el enunciado, aunque en muchos casos dichas gráficas se restringen a funciones monótonas con un único punto de corte, como se muestra en la figura 5.

No obstante, tres de los trece LT analizados sí que utilizan gráficas (figura 6) para mostrar tanto la necesidad de las hipótesis como la posibilidad de existencia de más de un punto en el que la función se anula, lo que refuerza la interpretación más general del teorema y el carácter justificativo del EP utilizado (Santillana, 1981), cuyo esquema de prueba es axiomático (tabla 2), es decir, se trata de una demostración.

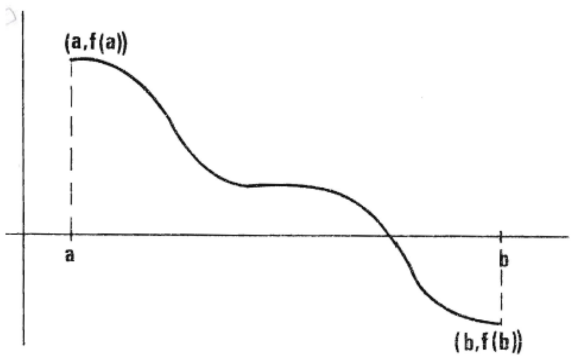
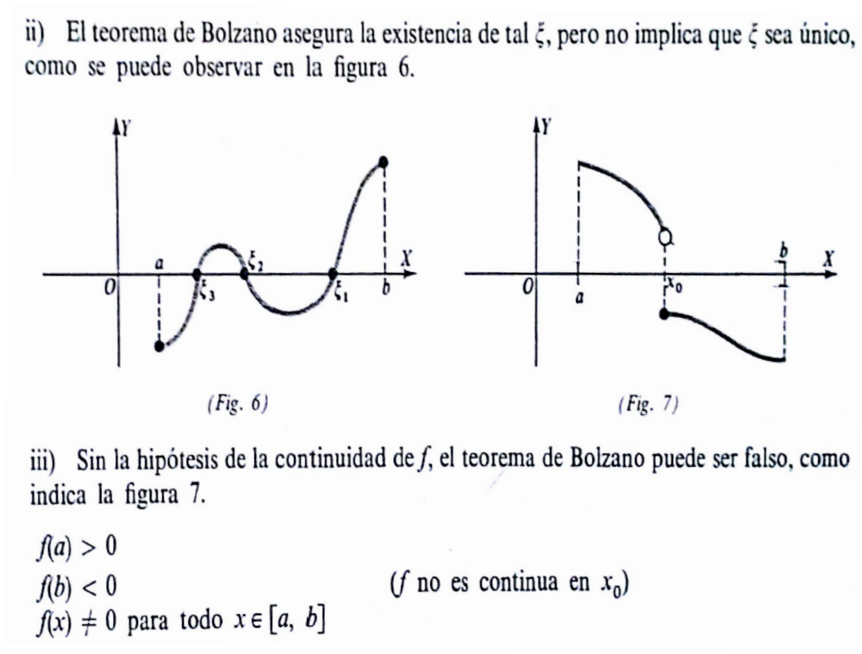


Figura 5. Ilustración del teorema de Bolzano en el LT de SM (1980).

Destaca el caso de Darboux donde, siete de los trece LT analizados, las funciones representadas son o bien monótonas, o bien las imágenes de los extremos del intervalo coinciden con el mínimo y el máximo de la función (figuras 7 y 8). Este hecho explica el que se considere el enunciado de Darboux entre f(a) y f(b) en lugar de entre el mínimo y el máximo de la función (más fuerte), y permite que se enuncie Weierstrass después de Darboux, pero el enunciado puede dar lugar a interpretaciones erróneas. Además, de estas gráficas los alumnos pueden inferir que f(a) es diferente de f(b), situación que no tiene por qué ser así. Por tanto, sería más adecuado enunciar Darboux después de establecer Weierstrass y considerar cualquier valor entre el mínimo y el máximo.


ii) El teorema de Bolzano asegura la existencia de tal ξ, pero no implica que ξ sea único, como se puede observar en la figura 6.

(*Fig. 6*) (*Fig. 7*)

iii) Sin la hipótesis de la continuidad de f, el teorema de Bolzano puede ser falso, como indica la figura 7.

$f(a) > 0$
$f(b) < 0$ (f no es continua en x_0)
$f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$

Figura 6. Santillana (1981) representa gráficamente tanto la posibilidad de que exista más de un punto, como la necesidad de las hipótesis para el teorema de Bolzano.

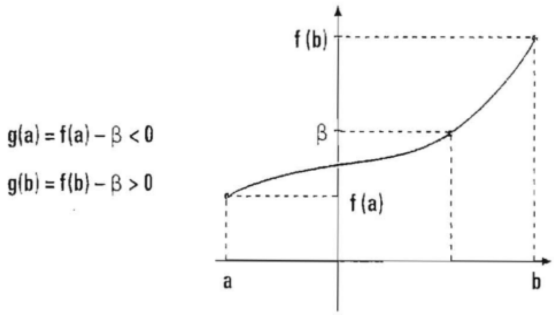


Figura 7. Gráfica para el Teorema de Darboux en Vicens Vives (1999).

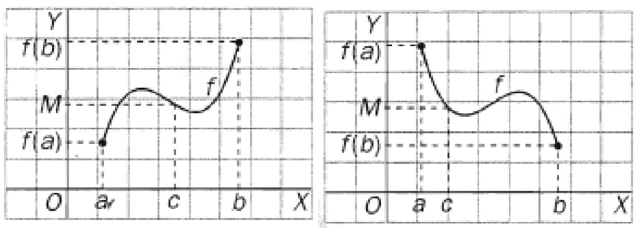


Figura 8. Gráficas para el Teorema de Darboux en SM (2010).

En aquellos textos contienen algún tipo de justificación de los teoremas, no se reflexiona sobre el procedimiento que realizan, aunque, cuando se trata de una demostración, en algunos casos sí que la distinguen del enunciado porque la etiquetan o utilizan tipografías diferentes; tampoco se explica globalmente el proceso utilizado, ni se señalan otras vías de justificación. En ocasiones, la prueba se inicia enunciando el resultado que se va a aplicar, pero sin indicar tal comienzo.

4. Conclusiones y propuesta didáctica

En resumen, hemos visto que, en general, la DM rigurosa de estos teoremas ha perdido protagonismo en los LT con la puesta en vigor de las tres últimas Leyes Orgánicas de Educación españolas, ya que no sólo se producen cambios de una legislación a otra, sino que en diversos momentos de una misma ley, los LT han adoptado posturas diferentes sobre las justificaciones de los teoremas, tratando de seguir las orientaciones de los currículos legales. En las nuevas legislaciones, los EP axiomáticos y transformacionales se sustituyen por EP inductivos, o bien los resultados únicamente se enuncian, y en los casos que se mantiene un EP axiomático, se hace con menos rigor, no justificando algunos pasos (EP axiomáticos incompletos). Además, cada LT sigue una línea uniforme en la elección del EP, ya que tienden a justificar todos los resultados con el mismo tipo de EP, salvo en algunos casos en los que el teorema de Weierstrass es únicamente enunciado, independientemente de los resultados anteriores. Por otro lado, el uso de las gráficas es cada vez más significativo, llegando a sustituir éstas a las demostraciones como forma de convencer al lector. Desde el punto de vista de la demostración, la enseñanza de ésta se ha relegado a un segundo plano, procediendo a convencer desde la intuición antes que desde el razonamiento matemático. No se han encontrado ninguna prueba preformal, aunque consideramos que sería una justificación muy interesante en este nivel educativo, ya que permite reflejar la esencia del razonamiento de una demostración y, por tanto, no privar al alumno del contacto con este tipo de procesos, preparándolo para la etapa universitaria, pero restando la abstracción que dificulta la comprensión de las demostraciones a público no especializado, ya que se realiza con un caso particular. También se pueden considerar las pruebas preformales como un paso previo a las demostraciones.

Convencer únicamente desde la intuición antes que desde el razonamiento matemático, aunque en un principio pueda ser más rápido y "eficaz", no abordaría los objetivos que el currículo actual considera desde el punto de vista de la demostración, y quizá los alumnos no llegaran a comprender las significaciones de los teoremas (Hanna, 1995, resalta la importancia de la demostración matemática para la comprensión de las matemáticas).Tal y como encontramos en la *ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato,* en Bachillerato, el alumno debe conocer la existencia de demostraciones rigurosas, desarrollar destrezas propias de las matemáticas, algunas de ellas relacionadas con la demostración, mostrar actitudes como la visión crítica y la necesidad de verificación. Si bien es cierto que no se indica en qué contenidos deben mostrarse estos aspectos, consideramos que algunos de los teoremas anteriormente citados podrían servir para abordar estos elementos. Por otra parte, nuestro planteamiento coincide con Hanna y Barbeau (2010), quienes afirman que la demostración matemática es esencial en la enseñanza, ya que contienen los métodos, herramientas, estrategias y conceptos que se necesitan para resolver problemas, y éstos elementos suponen la esencia principal de las matemáticas. Por esta razón, consideramos que las demostraciones matemáticas son portadoras del conocimiento matemático, y cómo tales deben utilizarse en la enseñanza preuniversitaria. Sin embargo, también pensamos que deberían combinarse la intuición con el razonamiento riguroso. Además, cabe destacar el hecho de que, aunque la LGE mostrase indicios de la necesidad de la DM, esta no aparecía de forma explícita como en LOGSE y LOE, y es precisamente en esa etapa de la LGE cuando más formalismo se aprecia en los LT, lo que no deja de ser contradictorio.

En cuanto a la diversidad en el orden de los teoremas, los nombres que reciben, las acciones verbales que se utilizan, o las variaciones del enunciado que se consideran, sería aconsejable unificar estos elementos, para resaltar el carácter de universalidad de la Matemática, ya que como hemos mencionado, sistematizaciones diferentes pueden confundir a los alumnos en la fundamentación de los teoremas en estudios posteriores y, desde luego, hay que desterrar las erróneas.

En las técnicas empleadas, en general, se aprecia homogeneidad dentro del mismo EP, aunque en los EP inductivos de uno o varios casos podemos encontrar dos estilos: algebraico y gráfico. Consideramos que los EP inductivos de tipo gráfico son más convincentes que los de tipo algebraico, pero recomendaríamos que, en la medida de lo posible, se utilizaran ambos, independientemente de si se utilizan EP axiomáticos y EP transformacionales y, además, sería útil que se consideraran EP sistemáticos, intentando cubrir todas las casuísticas posibles

Las funciones de la demostración que hemos apreciado son la de comunicación y la de verificación, pero sería interesante encontrar también las funciones de descubrimiento (que si hemos visto en dos de los LT) y la de explicación que, según Hanna (1995), en el campo de la educación matemática sería la función principal de la demostración, razón por la cual ensalza las demostraciones que explican frente a las que sólo prueban. Además, Ibañes y Ortega (2005) ya constataron que los alumnos valoran más las demostraciones explicativas ya que, en ocasiones, les ayudan a identificarlas y a distinguirlas de otros procesos.

No se utilizan apenas conectores matemáticos, se limitan a un leguaje verbal más coloquial. Sería interesante introducir dichos conectores, para habituar a los alumnos al lenguaje más específico de la matemática. Por otro lado, la utilización de diferentes sistemas de representación para un mismo concepto (verbal, tabular, gráfico y algebraico) debiera ser obligada, ya que sólo la utilización fluida de los mismos garantiza el aprendizaje de los conceptos (Duval, 1998).

Terminamos este artículo con una propuesta didáctica que tiene en cuenta las conclusiones anteriores. Con ella se pretende unificar el título de los tres teoremas, el orden de presentación de los mismos, el enunciado de cada uno de ellos y el tipo de justificación en cada caso. Se redacta con los títulos, orden y enunciado que, con nuestro criterio, debieran presentarse estos teoremas. En la redacción, inspirados en Spivak (1981), se evita la utilización de palabras excesivamente coloquiales (toma, alcanza,…) y presentamos expresiones más propias del lenguaje matemático, dejando que el profesor utilice vocabulario más general en sus explicaciones o debates.

Teorema de los ceros de Bolzano: Si una función, f, es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y las imágenes de los extremos del intervalo tienen (son de) signos distintos ($f(a)<0$ y $f(b)>0$ o $f(a)>0$ y $f(b)<0$), entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$.

Posibles justificaciones: como una posible alternativa a la demostración formal, proponemos una prueba preformal con una función sencilla y conocida por los alumnos, por ejemplo, $f(x)=x^3/2-2x+5/3$ en el intervalo $[-3, 2]$. En esta prueba se reproduciría el método de bisección, se construiría la sucesión de intervalos encajados, y además su representación gráfica muestra la posibilidad de más de un punto en el que se anula la función. Por otra parte, no se trata de una función monótona y es un representante de las funciones más usuales en estos niveles, las polinómicas. Además, el ejemplo nos permite el tratamiento algebraico del modelo, aislando las raíces y mostrando cómo se aplica el método de bisección. También acompañaríamos la justificación con algunos ejemplos de funciones que no cumplen las hipótesis, uno para cada una de estas hipótesis.

Teorema de los valores extremos de Weierstrass: Si una función es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces la función tiene un mínimo y un máximo en dicho intervalo, es decir, existen al menos dos valores c y d del intervalo $[a, b]$ tales que $f(c) \le f(x) \le f(d)$ para todo x del intervalo.

Posibles justificaciones: para establecer la veracidad de este enunciado con una prueba axiomática o transformacional, necesitaríamos haber estudiado el teorema de acotación (toda función real y continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada) y los axiomas del extremo inferior y superior en $\Re$ (todo conjunto acotado de números reales tiene extremos inferior y superior). En el caso de conocer éste resultado se podría realizar una prueba formal, pero si no es así, se puede presentar una prueba preformal porque se dispone de la gráfica de la función elegida y, por tanto, la acotación está implícita en la propia representación. Se puede utilizar el ejemplo anterior u otra función sencilla. En caso contrario, utilizaríamos un EP inductivo de varios casos, tanto de forma gráfica como algebraica, considerando representantes de algunas familias de funciones elementales: polinómicas, racionales, exponenciales, trigonométricas o logarítmicas. También sería adecuado mostrar ejemplos en los que no se cumplen las hipótesis.

Teorema de los valores intermedios de Darboux: Si f es continua en $[a, b]$, entonces todos los valores entre el mínimo, m, y el máximo, M, de la función en $[a, b]$ son imágenes de al menos un valor del intervalo $[a, b]$. Es decir, para cualquier número y_0 del intervalo $[m, M]$, existe al menos un $x_o \in [a,b]$ tal que $f(x_0)=y_0$ (en realidad, si el mínimo y el máximo son las imágenes de x_1 y x_2, respectivamente, $x_o \in [x_1,x_2]$ o $x_o \in [x_2,x_1]$).

Posibles justificaciones: en este caso se puede optar por un EP axiomático, ya que la prueba es inmediata utilizando el teorema de Bolzano. De esta manera se muestra al alumno pruebas realizadas sobre objetos generales, y no sólo sobre ejemplos concretos (pruebas preformales). Además, convendría acompañar la justificación de ejemplos gráficos que ilustren la situación del teorema en funciones no solo monótonas.

Además, sugerimos presentar otros resultados que complementen a estos tres y tales que sus justificaciones sean fáciles de establecer aplicando los teoremas anteriores.

Bibliografía

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. En Berciano, A., Gutiérrez, G., Estepa, A. y Climent, N. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (147-155). Bilbao: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

Bell, A. W. (1979). The learning of process aspects of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 361-387.

Bourbaki, N. (1970). *Éléments de Mathématique (Théorie des ensembles).* París: Hermann.

Bouvier, A y George, M. (1984). *Diccionario de Matemáticas.* Madrid: AKAL.

Colera, J. García, R., y Oliveira, M. J. (2003). *Matemáticas II. Bachillerato*. Madrid: Anaya.

Colera, J. y Oliveira, M. J. (2009). *Bachillerato 2. Matemáticas II*. Madrid: Anaya.

Corbalán, F., Fernández, J., Muñoz, J., y Queralt, T. (2004). *Omega 2. Matemáticas*. Barcelona: Vicens Vives.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*, 26, 15-30. Original de 1990.

Dos Santos, C. (2010). *A demostraçao matemática e o profesor. Formulaçao e ensino.* Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Escoredo, A., et al. (2009). *Matemáticas II. 2 Bachillerato*. Madrid: Santillana.

García-Rodeja, I. (1997) ¿Qué propuesta de actividades hacen los libros de primaria? *Alambique,* 11, 35-43.

Gil, J., Rivera, M., y Vázquez, C. (1981). *Matemática (COU).* Madrid: Santillana.

González, J. C. (2012). *Estudio de contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y preformales.* Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos.* Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca

González, M. T. y Sierra, M. (2003). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En Castro, Encarnación (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (109-130). Granada: Universidad de Granada.

Grupo Azul 21. (1997). *Matemáticas. 2. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*. Madrid: Santillana.

Guzmán, M., & Colera, J. (1989). *Matemáticas II COU.* Madrid: Anaya.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, 45-51. Paris.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21, 6-13

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the learning of Mathematics,* 15(3), 42-49.

Hanna, G. and Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. In G. Hanna et al. (Eds.), *Explanantion and proof in mathematics: philosophical and educational perspectives.* (85-100). New York: Springer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies. En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III., 234-283. American Mathematical Society, Providence, USA.

Herdeiro, C. (2010). *La resolución de problemas en los libros de texto de matemáticas del 9º año de escolaridad.* Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Hernández, E., Quirós, A., y Tarrés, J. (2001).*Ciencias de la naturaleza y de la salud/tecnología. Euler. Matemáticas 2.* Madrid: SM.

Ibañes, M. y Ortega, T. (1998) La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria. *Educación matemática.* 9 (2), pp. 65-104.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO*, 28, 39-60.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2002a). Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de Trigonometría en Bachillerato. *Actas del VI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2002b) "Interpretación de algunas expresiones usuales en los enunciados de los teoremas", *Quadrante. Revista teorica e de Investigaçao*. Vol. 10, Nº 2, pp. 97-123. Associação de Professores de Matemática ISNN 00872-3915. Lisboa.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de bachillerato. *NÚMEROS*, 57, 19-32.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *NÚMEROS*, 61, 19-40.

Janvier, C. (1987). *Traslation Processes in Mathematics Education*. En C. Janvier (edt.), Problems of *Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

López, M. C. (2011). *La formación inicial de maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto.* Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1978). *Resolución por la que se establecen los contenidos y orientaciones metodológicas del Curso de Orientación Universitaria y se dictan instrucciones sobre el mismo de 17 de marzo de 1978.* BOE de 17 de marzo.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1992). *Real Decreto 1179/1992, de 2 de octubre, por el que se establece el currículo del Bachillerato.* BOE de 21 de octubre.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2001). *Real Decreto 938/2001, de 3 de agosto, por el que se modifica el Real Decreto 1179/1992, de 2 de octubre, por el que se establece el currículo de Bachillerato.* BOE de 7 de septiembre.

Ministerio de Educación, Política Social y Deporte. (2008). *ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato.* BOE de 18 de junio de 2008.

Mizayaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 41, 47-68.

Monterrubio, C. y Ortega, T., (2012). Creación de un modelo exhaustivo de análisis de textos escolares matemáticos. *Revista de Educación. Ministerio de Educación*. 351, 471-495. Madrid.

Pancorbo, L. (2009). *Matemáticas-2*. Barcelona: Vicens Vives.

Primo, A. (1980). *Matemáticas. Curso de Orientación Universitaria.* Madrid: Ediciones SM.

Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la Educación. *Revista Española de Pedagogía,* 134, 449-475.

Ruiz, A., y Álvarez, F. (1999). *Límites 2. Matemáticas*. Barcelona: Vicens Vives.

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En Camacho, M., Flores, P. y Bolea, P. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (19-52). La Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Spivak, M. (1981). *Calculus. Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: Reverté.

Trillas, E., y Vila, A. (1979). *Matemáticas. Espacios. COU.* Barcelona: Vicens Vives.

Van Ash, A.G. (1993). To prove, why and how? *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, 2, 301-313.

Van Dormolen, J. (1997). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 27-34.

Vizmanos, J.R., Hernández, J., y Alcaide, F. (2010). *Matemáticas 2*. Madrid: SM.

Laura Conejo. Profesora Asociada de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid. Investigadora en Didáctica del Análisis.
Email: lconejo@am.uva.es

Tomás Ortega. Catedrático de Universidad. Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid. Amplia experiencia investigadora en Didáctica de la Matemática (Didáctica del Análisis y Desarrollo Curricular) avalada por sus publicaciones en este campo
Email: ortega@am.uva.es