NUMEROS. 22 - 1992
S.C.P.M. "ISAAC NEWTON"

UN PROBLEMA DE GEOMETRIA

Rafael Rodríguez Montesdeoca
I. B. "Tomás Morales"
Las Palmas de Gran Canaria

INTRODUCCION

Expondré a continuación el enunciado del problema en dos versiones, una de tipo coloquial, la forma en que me fue propuesto por un conocido, y la otra de tipo general inducida de la anterior:

Enunciado I: Dos hermanos comparten un huerto circular. Uno de ellos decide cultivar lechugas en su mitad del huerto, mientras que el otro quiere emplear su mitad para pasto de una cabra. Si ésta se amarra a un punto de la circunferencia exterior al huerto, ¿Qué longitud deberá tener la cadena.?

Enunciado II: Encontrar el radio de la circunferencia con centro en la circunferencia exterior de un círculo dado, tal que divida a éste en dos áreas iguales.

SOLUCION

Es fácil ver que la condición exigida por el enunciado se cumplirá cuando los triángulos mixtilíneos sombreados en la figura tengan igual área. Hemos de imponer esta condición mediante relaciones geométricas que sean evidentes en la figura (por supuesto la figura surge de un proceso de maduración para hacer evidentes estas relaciones) y que sean reducibles a una sola igualdad que determine una solución única, si es que esta existe.

Ver figura 1

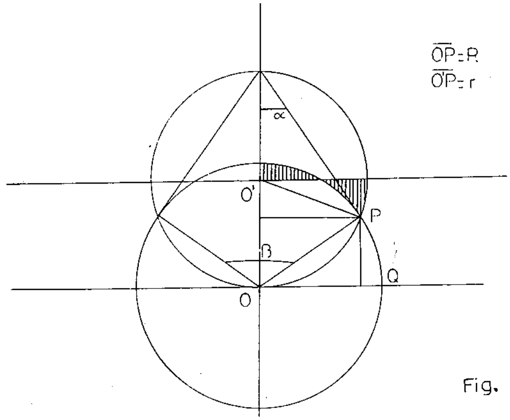


Fig. 1

La condición queda impuesta por:

$$\boxed{\frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi r^2}{4} = S \qquad (1)}$$ (Ver figura 2)

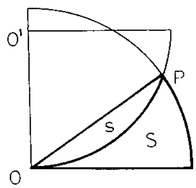


Fig. 2

Las coordenadas del punto P donde se cortan las dos circunferencia respecto de O son:

$$x = R\left(1 - \left(\frac{R}{2r}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad y = \frac{R^2}{2r}$$

Pero S = **{Area del sector circular O PQ}** − s

El arco PQ es por tanto **arcsen** $\frac{R}{2r}$ y el área del sector OPQ es

$$\frac{R^2}{2}\textbf{arcsen}\ \frac{R}{2r}$$

El área s = {Area del sector circular O' OP} - {Area del triangulo de vértices O'OP}.

El arco OP es: $\arcsin \frac{R}{r} (1 - (\frac{R}{2r})^2)^{\frac{1}{2}}$ y, por tanto, el área del sector circular O' OP es:

$$\frac{r^2}{2} \arcsin \frac{R}{r} (1 - (\frac{R}{2r})^2)^{\frac{1}{2}}$$

y el área del triángulo O'OP:

$$\frac{R\,r}{2} (1 - (\frac{R}{2r})^2)^{\frac{1}{2}}$$

La condición (1) queda como:

$$\boxed{\frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi r^2}{4} = \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{R}{2r} - \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{R}{r} (1 - (\frac{R}{2r})^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{R\,r}{r} (1 - (\frac{R}{2r})^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ultiplicando por $\frac{2}{r^2}$ y cambiando $\frac{R}{2r} = \operatorname{sen} \alpha$, donde α tiene el significado geométrico expresado en la figura 1, resulta:

$$2 \pi \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{\pi}{2} = 4 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \alpha + \operatorname{sen} 2 \alpha ;$$

$$(2 \alpha - \pi)2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen} 2 \alpha - 2 \alpha + \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$(2 \alpha - \pi)2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen} 2 \alpha + (\pi - 2 \alpha) - \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$(\pi - 2 \alpha) (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + \operatorname{sen} 2 \alpha - \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$(\pi - 2 \alpha) \cos 2 \alpha + \operatorname{sen} 2 \alpha - \frac{\pi}{2} = 0 ;$$

y haciendo el cambio $\beta = \pi - 2 \alpha$ con el significado geométrico expresado en la figura 1 queda:

$$\boxed{- \beta \cos \beta + \operatorname{sen} \beta - \frac{\pi}{2} = 0}$$

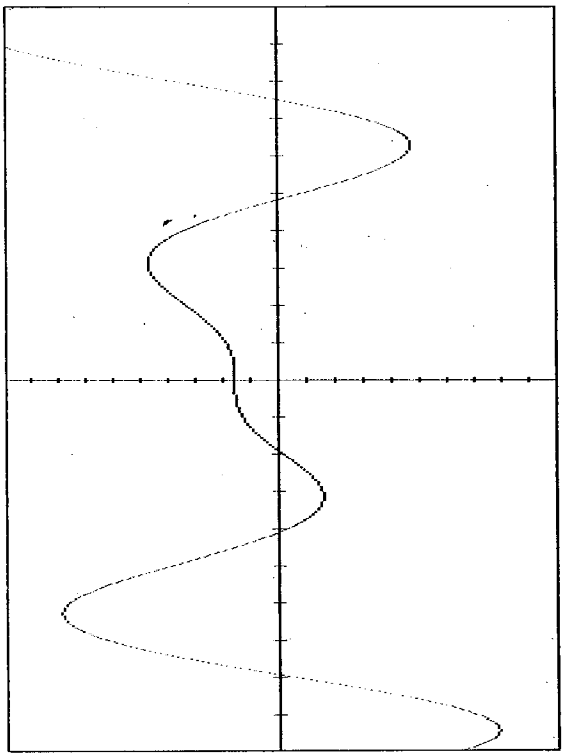
Ecuación trascendente de la que podemos encontrar una solución entre $\pi/2$ y $2\pi/3$ (intervalo mas acotado que de nuevo nos sugiere la geometría de la figura), frente al intervalo $(0, \pi)$ en el que el Teorema de Rolle nos asegura la existencia de una raíz. Por supuesto nuestra acotación es posterior y está garantizada por el T. de Rolle, puesto que $f(\beta)$ aún cambia de signo en sus extremos.

Cualquier método de aproximación* (de Newton, Fourier mejorado, etc.), nos dará una solución con su correspondiente acotación de error. He elegido un método gráfico de ordenador**, obteniendo $\beta = 1{,}9056957$ con un error $< 10^{-7}$ lo cual da para la relación R/r pedida, el valor 1,1587284 con un error menor que la diezmillonésima.

---

*Por ejemplo el método de Newton para el intervalo $(\pi/2, 2\pi/3)$ tomando $\pi/2$ como solución aproximada. En un primer intento da: $\beta = \pi/2 + 1 - 2/\pi = 1{,}9341$....con un error menor que $\pi/36 = 0{,}0872$.....

**Hay que advertir que no vale el método de iteración pues en el intervalo considerado $f(\beta)$ tiene un punto de inflexión. (Se adjunta gráfica de $f(\beta)$)



GRÁFICA $f(\beta)$

BIBLIOGRAFIA

(1) Recomendamos la lectura del Prólogo de:
CUESTA DUTARI, N. 1968. *Geometría vectorial. Introducción intuitiva al Algebra lineal*: 1ª Edición. Editorial Alhambra, S.A. Madrid, Buenos Aires, México.