Problemas comentados

A cargo del Club Matemático

En el artículo anterior proponíamos dos problemas para su resolución. Estaban señalados con los números 5 y 7. Vamos a dedicar la primera parte de éste a las estrategias necesarias para resolverlos.

Problema nº 5: **Si el número de mi casa fuese múltiplo de 3, entonces se trataría de un número comprendido entre 50 y 59, inclusive. Si el número de mi casa no fuese múltiplo de 4, entonces se trataría de un número comprendido entre 60 y 69, inclusive. Si el número de mi casa no fuese múltiplo de 6 , entonces se trataría de un número comprendido entre 70 y 79, inclusive. ¿Cuál es el número de mi casa?**

De entrada se evidencia que el heurístico más apropiado para su resolución es la ELIMINACIÓN de números a partir de un conjunto previo y de las condiciones impuestas que determina el problema.

Parece lógico comenzar por determinar si el número de la puerta tiene que estar situado entre 50 y 79 o, por el contrario, puede ser cualquier otro número.

Si el número no perteneciera a este intervalo tendría que ser, por la tercera condición, múltiplo de 6. Pero, por la primera condición, no puede ser múltiplo de 3. Imposible porque todos los múltiplos de 6 son múltiplos de 3.

Concluyendo, el número de la casa ha de ser forzosamente un número del intervalo [50, 79].

a) Ahora comenzaremos por analizar las tres condiciones, una a una, y por eliminación encontraremos el valor correcto.

   Si N es múltiplo de 3, entonces N está entre 50 y 59:

   N puede ser: 51, 54 o 57.

   Pero si N no es múltiplo de 3 tampoco es múltiplo de 6 (todos los múltiplos de 6 lo son también de 3). Por la tercera condición concluimos que debe estar entre 70 y 79.

   Si N es múltiplo de 6, entonces N está entre 70 y 79:

   N puede ser: 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77 o 79.

Pero entre 70 y 79, por la segunda condición, tiene que ser múltiplo de 4. Sirven el 72 y el 76.

Como no puede ser múltiplo de 3, de las dos posibilidades anteriores tenemos que eliminar el 72.

La solución es 76.

b) No obstante, puede haber otros puntos de partida. Por ejemplo, hacer una lista de los números entre 50 y 79 e ir eliminando los que no cumplan las condiciones.

Entre todos éstos hay que hallar uno tal que **no sea múltiplo de 3**, **sí sea múltiplo de 4** y **no sea múltiplo de 6.**

Al no poder ser múltiplos de 3 se excluyen todos los del 50 al 59, por la primera condición.

Los múltiplos de 4 restantes son: 60, 64, 68, 72 y 76.

Al no poder ser múltiplos de 6 se excluyen los anteriores a 70, por la tercera condición.

Quedan solamente 72 y 76.

$72 = 2^3 \times 3^2$

$76 = 2^2 \times 19$

De los dos, el único que cumple las tres condiciones simultáneamente es 76.

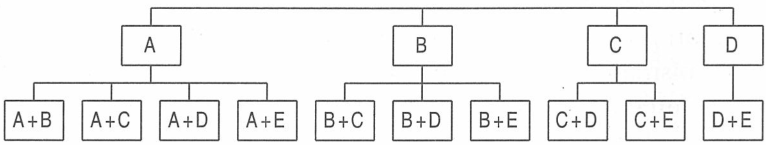
Respuesta: **El número de mi casa es el 76.**

Problema nº 7: **Un agricultor tenía cinco sacos de papas y pidió a su hijo que los pesara para llevarlos al mercado. El hijo, estudiante de matemáticas, los pesó de dos en dos de todas las maneras posibles. Las pesadas que obtuvo fueron: 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56 y 57 kg. ¿Cómo averiguó el peso de cada saco? ¿Cuánto pesa cada saco?**

Este problema fue propuesto a nuestros alumnos, que lo resolvieron con mucha dificultad y por tanteo. Utilizando el esquema que hemos propuesto como estrategia general de resolución, tendríamos el proceso de la siguiente manera.

DIAGRAMA:

Llamando a los pesos de los sacos A, B, C, D, E, las combinaciones de dos en dos se representarían:



En efecto, son diez pesadas que se corresponden con los diez valores que nos da el problema. Es importante ver que el peso de cada saco se repite **cuatro** veces.

RAZONAMIENTO:

Suponiendo la pesada A+B = 46 kg la más pequeña de todas (⇒ A y B son los sacos menos pesados), y la pesada D+E = 57 es la mayor de todas (⇒ C y D son los sacos más pesados).

Por otro lado, sumando los diez datos del problema tendremos **cuatro veces la suma** de los cinco sacos.

$S_t = 46 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 56 + 57 = 516$ kg

Siendo $S_t/4 = 516/4 = 129$ kg la suma de los cinco sacos: A+B+C+D+E

$S_{-C} = 46 + 57 = 103$ kg es la suma de los cuatro sacos A+B+D+E

Por tanto: 129 – 103 = **26 kg es el peso del saco C**, intermedio

La idea clave para no tener que utilizar el tanteo viene por la utilización de la PARIDAD. No es frecuente tener en cuenta esta propiedad, pero aquí resulta determinante para que el problema sea resuelto con la mayor economía de medios posible.

Para averiguar ahora el peso de los cuatro sacos restantes debemos fijarnos en que de las diez pesadas hay **cuatro impares** y seis pares, es decir, uno de los sacos debe tener un peso impar y el resto par. De esa forma, cada vez que combinamos dos pesos pares dará una suma par, y cuando combinamos un peso par con uno impar dará una suma impar, lo cual sólo sucederá cuatro veces, o bien cuatro son de peso impar y uno es par, con el mismo resultado. El todo es que uno de los cinco tiene paridad distinta a la de los otros cuatro.

También, teniendo en cuenta que 46 – 26 = 20 y 57 – 26 = 31, los pesos deberán estar entre esos márgenes.

Utilizando este razonamiento con las pesadas de 46 kg (más pequeña) y 57 kg (más grande), obtenemos:

46 = 20 + 26 ; 46 = 21 + 25 ; 46 = 22 + 24 ; 46 = 23 + 23
El primero no es correcto, puesto que el peso de 26 ya está asignado; el segundo tampoco, porque los dos pesos son impares; el cuarto tampoco por la misma razón y porque el peso se repetiría. Solamente es satisfactoria la tercera posibilidad. Por tanto, los sacos más pequeños pesarán:

A = 22 kg y B = 24 kg.

57 = 30 + 27 ; 57 = 29 + 28
Cualquiera de los dos es posible; pero al hacer la suma 26 + 29 = 55 kg, que no existe como dato. Por tanto, los sacos más pesados serán:

D = 27 kg y E = 30 kg.

Faltaría comprobar las sumas de dos en dos.

22+24 = 46	24+27 = 51
22+26 = 48	24+30 = 54
22+27 = 49	26+27 = 53
22+30 = 52	26+30 = 56
24+26 = 50	27+30 = 57

Una vez hecho se observa que coinciden exactamente con los diez datos del problema.

RESPUESTA:

Los sacos pesan 22 kg, 24 kg, 26 kg, 27 kg y 30 kg.

Si no aplicásemos estos principios de simetría y paridad, un razonamiento aparentemente correcto nos conduce a un resultado erróneo.

Supongamos que el orden de las letras asignadas se corresponde con el orden de los pesos de las parejas de sacos.

Entonces la suma S_{-D} = (A+B) + (C+E) sería de 46+56 = 102 kg.

Por tanto el saco D pesa 129 – 102 = 27 kg, y si A+D = 49, entonces A = 49 – 27 = 22; B+D = 52, con lo que B = 52 – 27 = 25, y razonando de manera semejante con las sumas C+D = 54 y D+E = 57, nos conduce a que C = 27 y E = 50. Al comprobar los resultados vemos que la suma de los 5 sacos A+B+C+D+E = 22+25+27+27+50 = 131 kg. ¡IMPOSIBLE!

Si aplicamos el principio de paridad, y dando por hecho que sólo uno de los sacos tiene peso impar, por ejemplo el A, entonces podemos suponer que A+B = 49 (la pesada más ligera de las impares), A+C = 51 (la siguiente pesada impar en orden) y continuando, A+D=53 y A+E = 57. Con estas cuatro ecuaciones y la obtenida anteriormente A+B+C+D+E = 129, tenemos un sistema cuya solución es:

A = 27; B = 22; C = 24; D = 26 y E = 30.

Como de costumbre, no nos queremos despedir sin invitarles una vez más a colaborar con nosotros enviando sus propias soluciones, sus comentarios a las soluciones expuestas, sus experiencias con alumnos ante los mismos problemas, etc. También, agradecemos los problemas que juzguen interesantes y nos envíen para su publicación.

Queda, una vez más, hacer una nueva propuesta de dos problemas.

Problema nº 8: **Un hombre está de pie en una llanura, a 5 m al este de un poste, y mirando al norte. Camina recto hacia el norte hasta que se sitúa directamente al nordeste del poste; entonces, siempre en línea recta, camina al noroeste hasta que está directamente al norte del poste; entonces camina hacia el oeste hasta que está directamente al noroeste del poste; y sigue así, describiendo una línea poligonal en espiral. Cuando de nuevo está situado al este del poste, ¿cuántos metros ha recorrido? Encontrar una fórmula, con d = distancia desde el poste, y n = número de segmentos caminados.**

(Barr, S. "Mathematical Brain Benders"; Dover)

Problema nº 9: **Un agricultor tiene un terreno de forma cuadrada. Lo divide mediante tres rectas, una diagonal y las otras dos, paralelas entre si, uniendo uno de los vértices libres con el punto medio del lado opuesto. Queda así el terreno dividido en seis trozos. Hallar el área de uno de los trozos de mayor superficie.**

(Revista "Math-École"; Suiza)

Bien, pues aquí queda todo de momento. De ustedes, lectores, depende la bondad de esta sección y su continuidad.

Ánimo y hasta el próximo NÚMEROS.

El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y Manuel García Déniz, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife).