Rev.Acad.Canar.Cienc., III (núm. 1),9-20 (1991)

INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LAS DIFERENCIAS DE VARIAS ESCALAS

J. Peralta

Departamento de Algebra. Facultad de Ciencias Matemáticas

Universidad Complutense. 28040, Madrid (España)

ABSTRACT

In the present paper we start out from the notion of difference of scale h - which generalizes the operator of finite differences - and we define the concept of difference of several scales. We prove some properties of them, such as the expression of the difference of n scales of a function in terms of the function, and conversely, we construct any function by means of its differences.
Key words.- Derivatives of higher order; finite differences; graduated operators.

RESUMEN

En este artículo partimos de la noción de diferencia de escala h - que generaliza el operador de diferencias finitas - y definimos el concepto de diferencia de varias escalas. Probamos algunas propiedades de ellas, tales como la expresión de la diferencia de n escalas de una función en términos de la función, y recíprocamente, construimos cualquier función a partir de sus diferencias.
Palabras clave.- Derivadas de orden superior; diferencias finitas; operadores graduados.

1. INTRODUCCION

Desde hace tiempo venimos trabajando con los distintos tipos de derivadas y conexiones sobre una variedad diferenciable. Una contribución personal a su estudio ha sido la introducción de un concepto algebraico que engloba a todas ellas: la noción de derivada de grado n ([1]).

Estas derivadas graduadas descansan en el concepto, que también hemos definido, de extensión graduada de una aplicación aditiva. Constituyen nuestra herramienta habitual de trabajo en Geometría diferencial, pues nos permiten obviar el aparato diferencial y estudiar algunas cuestiones desde un punto de vista estrictamente algebraico.

Pero el problema que nos hemos planteado últimamente es otro muy distinto: analizar si la noción anterior de derivada graduada (o la de extensión graduada, íntimamente ligada a ella) tuviera traducción en otros campos de la Matemática y, en caso afirmativo, ver sus posibles aplicaciones.

En este orden de ideas, hemos construido en [2] las diferencias de escala h, que guardan cierta analogía con las extensiones graduadas y, en consecuencia, con las derivadas graduadas. Estas diferencias de escala h generalizan la idea de diferencia finita de una función y, en [2] , hemos comprobado su utilidad para la resolución de algunas ecuaciones en diferencias y para la determinación del término general de ciertas sucesiones formadas por subsucesiones que sean progresiones aritmético-geométricas.

* * * * *

Por composición de las diferencias de escalas distintas, se obtienen las diferencias de varias escalas, de las que se ocupa este trabajo. En 2 se dan los primeros pasos al respecto; en 3 se halla la expresión de la diferencia enésima de una función en términos de la misma; en 4 se resuelve el problema recíproco: construir la función a partir de sus diferencias; y en 5 se estudia qué sucede cuando se anula alguna diferencia.

2. NOTACIONES Y PRIMERAS DEFINICIONES

A lo largo de todo el trabajo, f será una función real de una variable también real, y h, h_1, ..., h_n, x,números reales.

Cualquiera que sea t real, siempre que escribamos f(t) entenderemos que t pertenece al dominio de f, sin necesidad de mencionarlo explícitamente.

El acento circunflejo sobre una letra significará que dicha letra debe suprimirse. Así, por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{4} h_1 \ldots \hat{h}_i \ldots h_4 = h_2h_3h_4 + h_1h_3h_4 + h_1h_2h_4 + h_1h_2h_3.$$

A continuación resumimos algunas cuestiones tratadas en [2] y que utilizaremos frecuentemente en este trabajo.

Se define $d_h f$ como la función

$$d_h f(x) = f(x+h) - hf(x),$$

y diremos que d_h es el operador de diferencias de escala h de orden uno. Se verifica que dicho operador es lineal.

Nótese que $d_o f = f$, y $d_1 f = \Delta f$, siendo Δ el operador de las diferencias finitas.

Se llama operador de diferencias de orden n y escala h, $n \in \mathbb{N}$, o diferencia enésima de escala h a la aplicación que se obtiene componiendo n veces la aplicación d_h:

$$d_h^n = d_h o \overset{(n)}{\ldots} o d_h ,$$

donde escribiremos $d_h^o f = f$, $d_h^1 f = d_h f$.

Por ejemplo, es fácil probar que $d_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2hf(x+h) + h^2 f(x)$.

Se define el operador de diferencias de escalas (h_1,h_2) de segundo orden, como:

$$d^{(2)}_{(h_1,h_2)} = d_{h_1} o d_{h_2} ,$$

y análogamente el operador de diferencias de orden n escalas $(h_1,\ldots,h_n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$d^{(n)}_{(h_1,\ldots,h_n)} = d_{h_1} o \ldots o d_{h_n} ,$$

donde $d^{(o)} = id$, $d^{(1)}_h = d_h^1 = d_h$.

Resulta sencillo demostrar que $d^{(n)}_{(h_1,\ldots,h_n)}$ es un operador lineal, que es invariante respecto de cualquier permutación de los subíndices de las escalas, y que $d^{(n)}_{(h,\ldots,h)} = d_h^n$.

3. EXPRESION DE LA DIFERENCIA ENESIMA DE UNA FUNCION

En [2] obtuvimos la diferencia de orden n y escala h de una función a partir de la misma:

$$d_h^n f(x) = \sum_{i=o}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} h^{n-i} f(x+ih) \qquad (1).$$

Tratamos ahora de deducir la expresión de la diferencia de orden n de escalas $(h_1,\dots,h_n)$ de una función en términos de la misma. Para ello necesitamos el siguiente lema previo.

Lema 1.- Si $n\in \mathbb{N}^*$ y $1\leq i\leq n$, se verifica:

$$\sum_{s\in S_{n+1}} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n+1)} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(i)}) =$$
$$= i\sum_{s\in S_n} h_{s(i)}\cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(i-1)}+h_{n+1}) +$$
$$+ (n-(i-1))\sum_{s\in S_n} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n)} h_{n+1} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(i)}) \qquad (2),$$

siendo S_n el grupo simétrico de orden n.

Demostración.- Llamemos

$$S(i,n+1) = \sum_{s\in S_{n+1}} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n+1)} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(i)}) \qquad (3).$$

Para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, sean $S'_{n+1} = \{s\in S_{n+1}/\ n+1\in\{s(1),\dots,s(i)\}\}$, $S''_{n+1} = \{s\in S_{n+1}/\ n+1\in\{s(i+1),\dots,s(n+1)\}\}$.

Evidentemente, se tiene: $S'_{n+1}\cup S''_{n+1} = S_{n+1}$, $S'_{n+1}\cap S''_{n+1} = \emptyset$, y en consecuencia:

$$S(i,n+1) = S'(i,n+1) + S''(i,n+1) \qquad (4),$$

siendo $$S'(i,n+1) = \sum_{s\in S'_{n+1}} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n+1)} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(i)}),$$
$$S''(i,n+1) = \sum_{s\in S''_{n+1}} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n+1)} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(i)}).$$

Si $s\in S_{n+1}$, sea $k\in\{1,\dots,n+1\}$ el elemento tal que $s(k)=n+1$ (si $s\in S'_{n+1}$, entonces $k\in\{1,\dots,i\}$, y si $s\in S''_{n+1}$, será $k\in\{i+1,\dots,n+1\}$). A partir de $s\in S_{n+1}$ construimos la permutación $\bar{s}\in S_n$, $\bar{s} = (s(1),\dots,\widehat{s(k)},\dots,s(n+1))$; es decir, la que se obtiene de s suprimiendo n+1 y manteniendo los restantes términos en su mismo orden.

Entonces, cada sumando de $S'(i,n+1)$, $h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n+1)} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(i)})$, con $s\in S'_{n+1}$, dará lugar a i sumandos: $h_{\bar{s}(i)}\cdots h_{\bar{s}(n)} f(x+h_{\bar{s}(1)}+\dots+h_{\bar{s}(i-1)}+h_{n+1})$, que corresponden a colocar h_{n+1} en 1º, 2º, ..., i-ésimo lugar en la suma $h_{\bar{s}(1)}+\dots+h_{\bar{s}(i-1)}+h_{n+1}$, sin alterar la ordenación de los i-1 restantes entre sí. Luego:

$$S'(i,n+1) = i \sum_{\bar{s}\in S_n} h_{\bar{s}(i)} \cdots h_{\bar{s}(n)} f(x+h_{\bar{s}(1)}+\cdots+h_{\bar{s}(i-1)}+h_{n+1}).$$

Análogamente, cada sumando de $S''(i,n+1)$, $h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n+1)} f(x+h_{s(1)}+\cdots+$ $+h_{s(i)})$, con $s\in S''_{n+1}$, dará lugar a n-i+1 sumandos $h_{\bar{s}(i+1)}\cdots h_{\bar{s}(n)} h_{n+1} f(x+h_{\bar{s}(1)}+$ $+\cdots+h_{\bar{s}(i)})$, que corresponden a colocar el factor h_{n+1} en 1º, 2º, ...,(n-i+1)-ésimo lugar en el producto $h_{\bar{s}(i+1)}\cdots h_{\bar{s}(n)} h_{n+1}$, sin alterar la ordenación entre sí de los n-i restantes. Por tanto,

$$S''(i,n+1) = (n-(i-1)) \sum_{\bar{s}\in S_n} h_{\bar{s}(i+1)} \cdots h_{\bar{s}(n)} h_{n+1} f(x+h_{\bar{s}(1)}+\cdots+h_{\bar{s}(i)}).$$

Teniendo en cuenta (4), se deduce (2). □

<u>Proposición 2.-</u> $d^{(n)}_{(h_1,\ldots,h_n)} f(x) =$

$$= \sum_{i=o}^{n} \sum_{s\in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} h_{s(i+1)} \cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\cdots+h_{s(i)}) \qquad (5).$$

<u>Demostración.-</u> Lo haremos por inducción.

Es cierto para n=1:

$$\sum_{i=o}^{1} \sum_{s\in S_1} \frac{(-1)^{1-i}}{i!(1-i)!} h_{s(i+1)} \cdots h_{s(1)} f(x+h_{s(1)}+\cdots+h_{s(i)}) = \frac{(-1)^1}{0!1!} h_1 f(x) +$$

$$+ \frac{(-1)^o}{1!0!} f(x+h_1) = - h_1 f(x) + f(x+h_1) = d^{(1)}_{h_1} f(x).$$

Lo admitimos cierto para n y tratamos de probarlo para n+1:

$$d^{(n+1)}_{(h_1,\ldots,h_{n+1})} f(x) =$$

$$= \sum_{i=o}^{n+1} \sum_{s\in S_{n+1}} \frac{(-1)^{n+1-i}}{i!(n+1-i)!} h_{s(i+1)} \cdots h_{s(n+1)} f(x+h_{s(1)}+\cdots+h_{s(n+1)}) \qquad (6).$$

Vamos a operar con los dos miembros de (6) para tratar de ver que coinciden.

Por la hipótesis de inducción, el primer miembro es:

$$d^{(n+1)}_{(h_1,\ldots,h_{n+1})} f(x) = d_{h_{n+1}} (d^{(n)}_{(h_1,\ldots,h_n)} f(x)) =$$

$$= \sum_{i=o}^{n} \sum_{s\in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} h_{s(i+1)} \cdots h_{s(n)} d_{h_{n+1}} f(x+h_{s(1)}+\cdots+h_{s(i)}) =$$

$$= \sum_{i=o}^{n} \sum_{s\in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(i)}+h_{n+1}) -$$

$$- h_{n+1} \sum_{i=o}^{n} \sum_{s\in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(i)}) \quad (7).$$

Si llamamos $S^i = \sum_{s\in S_{n+1}} \frac{(-1)^{n+1-i}}{i!(n+1-i)!} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n+1)} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(n+1)})$,

el segundo miembro de (6) puede escribirse:

$$\sum_{i=o}^{n+1} \sum_{s\in S_{n+1}} \frac{(-1)^{n+1-i}}{i!(n+1-i)!} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n+1)} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(n+1)}) =$$

$$= S^o + (S^1 + \ldots + S^n) + S^{n+1} \quad (8).$$

Operemos con cada uno de los tres sumandos en que hemos descompuesto la suma: $S^o = (-1)^{n+1} h_1\cdots h_{n+1} f(x) = - h_{n+1} \frac{(-1)^n}{0!n!} \sum_{s\in S_n} h_{s(1)}\cdots h_{s(n)} f(x)$ (9).

$$S^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (n+1)! f(x+h_1+\ldots+h_{n+1}) = f(x+h_1+\ldots+h_{n+1}) =$$

$$= \frac{(-1)^o}{n!0!} n! f(x+h_1+\ldots+h_n+h_{n+1}) = \frac{(-1)^o}{n!0!} \sum_{s\in S_n} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(n)}+h_{n+1}) \quad (10).$$

$S^1 + \ldots + S^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1-i}}{i!(n+1-i)!} S(i,n+1)$ (recordemos que $S(i,n+1)$ viene definida en (3)). En virtud de (2):

$$S^1+\ldots+S^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1-i}}{i!(n+1-i)!}\, i \sum_{s\in S_n} h_{s(i)}\cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(i-1)}+h_{n+1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1-i}}{i!(n+1-i)!} (n-(i-1)) \sum_{s\in S_n} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n)} h_{n+1} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(i)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{s\in S_n} \frac{(-1)^{n-(i-1)}}{(i-1)!(n-(i-1))!} h_{s(i)}\cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(i-1)}+h_{n+1}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{s\in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n)} h_{n+1} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(i)}) =$$

$$= \sum_{j=o}^{n-1} \sum_{s\in S_n} \frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!} h_{s(j+1)}\cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(j)}+h_{n+1}) -$$

$$- h_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{s\in S_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(i)}) \quad (11).$$

Sustituyendo (9), (10) y (11) en (8) y reagrupando términos:

$$\sum_{i=o}^{n+1} \sum_{s\in S_{n+1}} \frac{(-1)^{n+1-i}}{i!(n+1-i)!} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n+1)} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(n+1)}) =$$

$$= \Bigg[\sum_{j=o}^{n-1} \sum_{s\in S_n} \frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!} h_{s(j+1)}\cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\ldots+h_{s(j)}+h_{n+1}) +$$

$$+\frac{(-1)^{o}}{n!0!}\sum_{s\in S_n} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(n)}+h_{n+1})\Big] - \Big[h_{n+1}\frac{(-1)^n}{0!n!}\sum_{s\in S_n} h_{s(1)}\cdots h_{s(n)}f(x) +$$

$$+ h_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s\in S_n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(i)})\Big] =$$

$$= \sum_{j=o}^{n}\sum_{s\in S_n}\frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!} h_{s(j+1)}\cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(j)}+h_{n+1}) -$$

$$- h_{n+1}\sum_{i=o}^{n}\sum_{s\in S_n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} h_{s(i+1)}\cdots h_{s(n)} f(x+h_{s(1)}+\dots+h_{s(i)}).$$

Finalmente, en virtud de (7), queda probado (6). □

Si $h_1=\dots=h_n=h$, el primer miembro de (5) es $d^{(n)}_{(h,\dots,h)}f(x) = d^n_h f(x)$, y el segundo miembro:

$$\sum_{i=o}^{n} n!\,\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\,h^{n-i}f(x+nh) = \sum_{i=o}^{n} (-1)^{n-i}\binom{n}{i} h^{n-i}f(x+nh),$$

luego la Proposición 2 generaliza (1).

4. EXPRESION DE UNA FUNCION EN TERMINOS DE SUS DIFERENCIAS

En este apartado nos planteamos el problema recíproco del que ha sido tratado en el apartado anterior: conocidas las diferencias de escalas $(h_{i_1},\dots,h_{i_j})$ $(i_1,\dots,i_j\in\{1,\dots,n\})$ de órdenes j $(1\leq j\leq n)$ de una función, hallar la función.

Este problema fue resuelto en [2] para el caso de una escala:

$$f(x+nh) = \sum_{i=o}^{n}\binom{n}{i} h^{n-i}d^i_h f(x) \qquad (12),$$

de donde se obtiene la fórmula de interpolación de Newton haciendo h=1, como era de esperar.

<u>Lema 3.-</u>
$$\sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} h_1\cdots\widehat{h}_{i_1}\cdots\widehat{h}_{i_k}\cdots h_n h_{n+1} d^{(k)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_k})}f(x) +$$

$$+\sum_{1\leq i_1<\dots<i_{k-1}\leq n} h_1\cdots\widehat{h}_{i_1}\cdots\widehat{h}_{i_{k-1}}\cdots h_n d^{(k)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_{k-1}},h_{n+1})}f(x) =$$

$$= \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n+1} h_1\cdots\widehat{h}_{i_1}\cdots\widehat{h}_{i_k}\cdots h_n h_{n+1} d^{(k)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_k})}f(x),\ \forall k\in\{1,\dots,n\} \quad (13).$$

<u>Demostración.-</u> Llamemos S´, S´´, S, respectivamente, a la primera suma del primer miembro, la segunda suma del primer miembro, y el segundo miembro. El número de sumandos de S´ es $\binom{n}{k}$, el de S´´ es $\binom{n}{k-1}$, y el de S, $\binom{n+1}{k}$, y se cumple

que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$.

Para probar (13) bastará con ver que todo sumando del segundo miembro está en el primero, y recíprocamente.

Sea $\sigma_k = h_1 \ldots \hat{h}_{i_1} \hat{\ldots} \hat{h}_{i_k} \ldots h_{n+1} d^{(k)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_k})} f(x)$ un sumando genérico de S, por lo que $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n+1$. Puede suceder una y sólo una de las siguientes posibilidades:

1) $i_k \leq n$. En tal caso, σ_k es uno de los sumandos de S´.

2) $i_{k+1} = n+1$. En este supuesto,

$\sigma_k = h_1 \ldots \hat{h}_{i_1} \hat{\ldots} \hat{h}_{i_{k-1}} \ldots h_n \hat{h}_{n+1} d^{(k)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_{k-1}},h_{n+1})} f(x)$, y σ_k es uno de los sumandos de S´´.

Por lo tanto, todo sumando del segundo miembro está en el primero. Veamos el recíproco:

1) Si $\sigma'_k = h_1 \ldots \hat{h}_{i_1} \hat{\ldots} \hat{h}_{i_k} \ldots h_n h_{n+1} d^{(k)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_k})} f(x)$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, es uno de los sumandos de S´, también es $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n+1$, luego σ'_k es uno de los sumandos de S.

2) Si $\sigma''_k = h_1 \ldots \hat{h}_{i_1} \hat{\ldots} \hat{h}_{i_{k-1}} \ldots h_n d^{(k)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_{k-1}},h_{n+1})} f(x)$, con $1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} \leq n$ es un sumando de S´´, se puede escribir:

$$\sigma''_k = h_1 \ldots \hat{h}_{i_1} \hat{\ldots} \hat{h}_{i_{k-1}} \ldots h_n \hat{h}_{n+1} d^{(k)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_{k-1}},h_{n+1})} f(x),$$

que es el sumando correspondiente a $1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} < i_k = n+1$. □

<u>Proposición 4.-</u> $f(x+h_1+\ldots+h_n) =$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} h_1 \ldots \hat{h}_{i_1} \hat{\ldots} \hat{h}_{i_j} \ldots h_n d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})} f(x) \qquad (14).$$

(Nótese que si $C_{n,j}$ es el conjunto de las combinaciones de n elementos de orden j, (14) puede escribirse también: $f(x+h_1+\ldots+h_n) =$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{(i_1,\ldots,i_j) \in C_{n,j}} h_1 \ldots \hat{h}_{i_1} \hat{\ldots} \hat{h}_{i_j} \ldots h_n d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})} f(x)).$$

<u>Demostración.-</u> Lo vamos a probar por inducción sobre n.

Es trivial que se cumple para n=1. El segundo miembro queda:

$$h_1 d^{(o)}f(x) + d^{(1)}_{h_1}f(x) = h_1 f(x) + f(x+h_1) - h_1 f(x),$$

que coincide con $f(x+h_1)$.

Lo admitimos cierto para n, y vamos a demostrarlo para n+1.

$$d_{h_{n+1}} f(x+h_1+\ldots+h_n) = f(x+h_1+\ldots+h_n+h_{n+1}) - h_{n+1}f(x+h_1+\ldots+h_n).$$

Despejando $f(x+h_1+\ldots+h_n+h_{n+1})$ y utilizando la hipótesis de inducción:

$$f(x+h_1+\ldots+h_n+h_{n+1}) =$$

$$= h_{n+1} \sum_{j=o}^{n} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n} h_1\ldots\hat{h}_{i_1}\ldots\hat{h}_{i_j}\ldots h_n d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})}f(x) +$$

$$+ d_{h_{n+1}} \left(\sum_{j=o}^{n} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n} h_1\ldots\hat{h}_{i_1}\ldots\hat{h}_{i_j}\ldots h_n d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})}f(x)\right) =$$

$$= \sum_{j=o}^{n} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n} h_1\ldots\hat{h}_{i_1}\ldots\hat{h}_{i_j}\ldots h_n h_{n+1} d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})}f(x) +$$

$$+ \sum_{j=o}^{n} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n} h_1\ldots\hat{h}_{i_1}\ldots\hat{h}_{i_j}\ldots h_n d_{h_{n+1}}(d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})}f(x)) =$$

$$= h_1\ldots h_n h_{n+1} f(x) + \left[\sum_{j=1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n} h_1\ldots\hat{h}_{i_1}\ldots\hat{h}_{i_j}\ldots h_n h_{n+1} d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})}f(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=o}^{n-1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n} h_1\ldots\hat{h}_{i_1}\ldots\hat{h}_{i_j}\ldots h_n d^{(j+1)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j},h_{n+1})}f(x) \right] +$$

$$+ d_{h_{n+1}}(d^{(n)}_{(h_1,\ldots,h_n)}f(x)) \qquad (15).$$

Ahora bien, aplicando (13), el corchete puede escribirse:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n} h_1\ldots\hat{h}_{i_1}\ldots\hat{h}_{i_j}\ldots h_{n+1} d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})}f(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_{j-1}\leq n} h_1\ldots\hat{h}_{i_1}\ldots\hat{h}_{i_{j-1}}\ldots h_n d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_{j-1}},h_{n+1})}f(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n+1} h_1\ldots\hat{h}_{i_1}\ldots\hat{h}_{i_j}\ldots h_n h_{n+1} d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})}f(x).$$

Y llevando este resultado a (15), queda:

$$f(x+h_1+\ldots+h_n+h_{n+1}) = h_1\ldots h_n h_{n+1} f(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n+1} h_1\ldots\hat{h}_{i_1}\ldots\hat{h}_{i_j}\ldots h_n h_{n+1} d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})}f(x) +$$

$$+ d^{(n+1)}_{(h_1,\ldots,h_n,h_{n+1})}f(x) =$$

$$= \sum_{j=o}^{n+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n+1} h_1\ldots\hat{h}_{i_1}\ldots\hat{h}_{i_j}\ldots h_n h_{n+1} d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})}f(x), \text{ c.q.d. } \square$$

Para tratar de hacer más manejable la notación, si $0 \leq j \leq n$, escribiremos:

$$d^j_{(h_1,\ldots,h_n)} f(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} h_1 \ldots \hat{h}_{i_1} \ldots \hat{h}_{i_j} \ldots h_n d^{(j)}_{(h_{i_1},\ldots,h_{i_j})} f(x) \quad (16).$$

Así, $d^o_{(h_1,\ldots,h_n)} f(x) = h_1 \ldots h_n f(x)$, $d^1_{(h_1,\ldots,h_n)} f(x) =$

$$= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} h_1 \ldots \hat{h}_{i_1} \ldots h_n d_{h_{i_1}} f(x), \ \ldots \ , d^n_{(h_1,\ldots,h_n)} f(x) = d^{(n)}_{(h_1,\ldots,h_n)} f(x).$$

Entonces, (14) quedará:

$$f(x+h_1+\ldots+h_n) = \sum_{j=o}^{n} d^j_{(h_1,\ldots,h_n)} f(x) \quad (17).$$

En el caso particular de que $h_1 = \ldots = h_n = h$, se tiene la siguiente

Proposición 6.- $d^j_{(h,\overset{(n)}{\ldots},h)} f(x) = \binom{n}{j} h^{n-j} d^j_h f(x)$.

Demostración.- En la expresión (16) se observa que $d^j_{(h_1,\ldots,h_n)} f(x)$ tiene tantos sumandos como elementos hay en $C_{n,j}$, o sea, $\binom{n}{j}$. Por otro lado, cada sumando es un producto de n-j escalas por una diferencia de j escalas de orden j. Si las n escalas son iguales: $h_1 = \ldots = h_n = h$, el producto de las n-j escalas será h^{n-j}, y la diferencia, $d^{(j)}_{(h,\overset{(j)}{\ldots},h)} f(x) = d^j_h f(x)$. □

Corolario 7.- $d^n_{(h,\overset{(n)}{\ldots},h)} = d^n_h$.

Demostración.- $d^n_{(h,\overset{(n)}{\ldots},h)} f(x) = \binom{n}{n} h^{n-n} d^n_h f(x) = d^n_h f(x)$. □

Se observa que de (17) y de la Proposición 6 se obtiene (12):

Si $h_1 = \ldots = h_n = h$, $f(x+h_1+\ldots+h_n) = f(x+nh) = \sum_{j=o}^{n} d^j_{(h,\overset{(n)}{\ldots},h)} f(x) =$

$$= \sum_{j=o}^{n} \binom{n}{j} h^{n-j} d^j_h f(x).$$

5. ANULACION DE DIFERENCIAS

Ya se ha dicho que en [2] utilizamos las diferencias de una escala para la resolución de ecuaciones en diferencias y para la determinación de términos generales de algunas sucesiones.

Ambas aplicaciones son posibles cuando una función verifica que existen unos ciertos $n \in \mathbb{N}$ y $h \in \mathbb{R}$ tales que $d^n_h f = 0$. Se tiene entonces:

$$d^n_h f = 0 \Rightarrow d^m_h f = 0, \forall m > n \quad (18).$$

Tratamos ahora de ver si con las diferencias de varias escalas sucede algo parecido.

Proposición 8.- 1) Si $\exists i$, $1\leq i\leq n$ / $d_{h_i} f = 0 \Rightarrow d^{(n)}_{(h_1,\dots,h_n)} f = 0$.

2) Si $n\leq m$ y $\exists i_1,\dots,i_n$, $1\leq i_1,\dots,i_n\leq m$ / $d^{(n)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_n})} f = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^{(m)}_{(h_1,\dots,h_m)} f = 0$.

3) Si $\exists k_1,\dots,k_r$, $r\leq n$ / $d_{h_{k_1}} f = \dots = d_{h_{k_r}} f = 0 \Rightarrow d^{j}_{(h_1,\dots,h_n)} f(x) =$

$$= \sum_{\substack{1\leq i_1<\dots<i_j\leq n \\ i_1,\dots,i_j \notin \{k_1,\dots,k_r\}}} h_1\dots\hat{h}_{i_1}\dots\hat{h}_{i_j}\dots h_n d^{(j)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_j})} f(x).$$

4) Si $\exists r$, $1\leq r\leq n$ / $d^{(r)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_r})} f = 0$, siendo $1\leq i_1<\dots<i_r\leq n$, entonces

$$f(x+h_1+\dots+h_n) = \sum_{j=o}^{r-1} d^{j}_{(h_1,\dots,h_n)} f(x).$$

Demostración.- 1) Se cumple en virtud de que $d^{(n)}_{(h_1,\dots,h_n)} f =$
$= d^{(n-1)}_{(h_1,\dots,\hat{h}_i,\dots,h_n)} (d_{h_i} f) = 0$

2) $d^{(m)}_{(h_1,\dots,h_m)} f = d^{(m-n)}_{(h_1,\dots,\hat{h}_{i_1},\dots,\hat{h}_{i_n},\dots,h_m)} (d^{(n)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_n})} f) = 0.$

(Nótese que si todas las escalas son coincidentes, se obtiene (18)).

3) Si $1\in\{i_1,\dots,i_j\}\cap\{k_1,\dots,k_r\}$, será $d_{h_1} f = 0$ y, en virtud de 2), desaparecerá todo el sumando del segundo miembro en el que h_1 pertenezca a la j-upla $(h_{i_1},\dots,h_{i_j})$.

4) Si $d^{(r)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_r})} f = 0$ y $t>r$, $d^{(t)}_{(h_{i_1},\dots,h_{i_t})} f = 0$ por 2); luego $d^{t}_{(h_1,\dots,h_n)} f(x) = 0$, $\forall t=r,r+1,\dots,n$. Por lo tanto, serán nulos los sumandos correspondientes a $j=r,r+1,\dots,n$ del segundo miembro de (17). $\square$

NOTA FINAL

Para no alargar excesivamente este trabajo, hemos creído oportuno terminarlo aquí, aunque tenemos en fase bastante avanzada su continuación, que será objeto de otro artículo.

Podemos anunciar que, dada la complejidad de las fórmulas que se manejan al considerar n escalas distintas, nos estamos limitando actualmente al caso de dos escalas, en cuyo supuesto ya hemos logrado algunos resultados. El problema que ahora mismo nos ocupa es el de tratar de la utilización de estas diferencias de dos (o más) escalas a casos concretos para, a semejanza de lo que sucedía con las diferencias de una escala, buscar sus posibles aplicaciones.

BIBLIOGRAFIA

[1] PERALTA, J.(1984). "On the graduated derivatives". Collectanea Mathematica, 35, 189-205.

[2] PERALTA, J.(1990). "Diferencias de escala h". I Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Las Palmas de Gran Canaria, 223-227.

Recibido: 15 de Agosto de 1990