Rev. Acad. Canar. Cienc., XVII (Núms. 1-2), 59-75 (2005) (publicado en agosto de 2006)

# UNA DERIVADA ALGEBRAICA ASOCIADA A UNA GENERALIZACIÓN DE LA CONVOLUCIÓN DE DITKIN Y PRUDNIKOV*

**V. M. Almeida & J. Rodríguez**

**Abstract**

In this paper we get an algebraic derivative relative to the convolution

$$(f \oplus g)(t) = \frac{D^{\delta}}{\Gamma(\delta)} \int_0^t f(t-\psi)g(\psi)d\psi \quad (\delta \geq 1)$$

associated to the Riemann-Liouville's fractional derivative $D^{\delta}$, which is used, in adition with the respective operational calculus, to solve an integral-differential equation. Moreover we show certain convolution property for the solution of the mentioned equation.

**Resumen**

En este trabajo se obtiene una derivada algebraica asociada a un cálculo operacional. desarrollado para el operador derivada fraccionaria de Riemann-Liouville $D^{\delta}$, con el uso de la convolución

$$(f \oplus g)(t) = \frac{D^{\delta}}{\Gamma(\delta)} \int_0^t f(t-\psi)g(\psi)d\psi \quad (\delta \geq 1)$$

Dicha derivada algebraica y el mencionado cálculo operacional son usados para determinar una solución de una ecuación integro-diferencial, demostrándose además una cierta propiedad de convolución para la solución obtenida.

## 1. Introducción

W. Kierat and K. Skornik [6], usando el cálculo operacional de Mikusinski y su correspondiente derivada algebraica [9], resolvieron la ecuación diferencial

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (c-t)\frac{dx}{dt} - ax = 0 \qquad (c, a \in \mathbb{C})$$

* Partially supported by DGCIYT Grant BFM2003-07139 (Spain).

la cual para $c = 1$ se reduce a la ecuación diferencial de Laguerre siendo una de sus soluciones la función

$$x_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} .$$

También demostraron que la familia de funciones $x_a(t)$ verifica la propiedad de convolución

$$\frac{d}{dt}(x_a * x_b)(t) = x_{a+b}(t) ,$$

donde $*$ representa la convolución de Mikusinski.

En este trabajo se presenta la derivada algebraica

$$\mathcal{D}f(t) = [I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} t] f(t)$$

para la convolución

$$(f \oplus g)(t) = \frac{D^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^t f(t-\psi) g(\psi) d\psi ,$$

siendo $I^\alpha f(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$ la integral fraccionaria de Riemann-Liouville y $D^\delta = D^n I^{n-\delta} \quad (n-1 < \delta \leq n)$ su corespondiente derivada fraccionaria.

La convolución $\oplus$ se define sobre el conjunto de funciones

$$C_\delta = \{ f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \text{ uniformemente convergentes en compactos de } [0,\infty) \}$$

introducido por Alamo y Rodíguez en [2].

Usando una técnica similar a la mostrada en [6] y el apropiado cálculo operacional para $\oplus$, podemos obtener una solución, que denotaremos por $x_a(t)$, de la siguiente ecuación integro-diferencial.

$$\begin{cases} -\mathcal{D}(D^\delta)^2 x + (1+\mathcal{D}) D^\delta x - ax = 1 \quad (a \in \mathbb{C}) \quad (\delta > 1) \\ [t^{1-\delta} x(t)]_{t=0} = 0 \ ; \ [t^{1-\delta} D^\delta x(t)]_{t=0} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(2\delta)} \end{cases}$$

verificándose que

$$D^\delta [x_a \oplus x_b](t) = x_{a+b}(t).$$

Además se hace uso del Teorema de semejanza de Meller [4], para obtener derivadas algebraicas asociadas a algunos operadores relacionados, vía dicho teorema, con el operador $D^\delta$.

## 2. Un cálculo operacional para $D^\delta$. La derivada algebraica $\mathcal{D}$

Sea $\delta > 1$ un número real. Tal y como hicieron Alamo y Rodríguez en [2], definimos el conjunto de funciones de variable real positiva y valores complejos.

$$C_\delta = \{f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \text{ uniformemente convergentes en compactos de}[0,\infty)\}$$

En este artículo se probó que $(C_\delta, +, \cdot_C)$ es un espacio vectorial, y se definió sobre $C_\delta$ la convolución

$$(f \oplus g)(t) = \frac{D^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^t f(t-\psi)g(\psi)d\psi$$

la cual para $\delta = 1$ se reduce a la convolución de Ditkin y Prudnikov para el operador $D = \frac{d}{dt}$ [5]. También se demostró que $(C_\delta, +, \oplus)$ es un anillo unitario y conmutativo sin divisores de cero. siendo $t^{\delta-1}$ su elemento unidad.

A partir de la definición de $\oplus$, los autores obtuvieron la siguiente igualdad

$$t^{k\delta-1} \oplus t^{m\delta-1} = \frac{\Gamma(k\delta)\Gamma(m\delta)}{\Gamma(\delta)\Gamma[(k+m-1)\delta]} t^{(k+m-1)\delta-1} \tag{2.1}$$

la cual nos permite, haciendo un simple cálculo, establecer la siguiente proposición

**Proposición 1.** *Sea $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ y $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{k\delta-1}$, entonces se tiene que*

$$(f \oplus g)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\} t^{k\delta-1}$$

Como es habitual, $C_\delta$ fue extendido a su cuerpo de fracciones $M_\delta = C_\delta \times (C_\delta - \{0\})/\sim$. donde la relación de equivalencia $\sim$ se definió, como es usual, por $(f_1, g_1) \sim (f_2, g_2) \Leftrightarrow f_1 \oplus g_2 = g_1 \oplus f_2$. Los elementos de $M_\delta$ fueron llamados operadores, y la clase de equivalencia del par $(f, g)$ denotada por $\frac{f}{g}$. Las operaciones suma, multiplicación y producto por un escalar en $M_\delta$, quedaron definidas como sigue

- $\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 \oplus g_2 + g_1 \oplus f_2}{g_1 \oplus g_2}$
- $\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 \oplus f_2}{g_1 \oplus g_2}$

- $\alpha\dfrac{f}{g} = \dfrac{\alpha f}{g}$

y se comprobó que $C_\delta$ es isomorfo a un subanillo de $M_\delta$ vía la aplicación

$$f(t) \longrightarrow \frac{f(t)}{t^{\delta-1}}$$

De forma análoga $\mathbb{C}$ está embebido en $M_\delta$, identificando cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$ con, el llamado operador numérico, $\dfrac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = [\alpha]$.

**Proposición 2.** *Sean $[\alpha]$ y $[\beta]$ operadores numéricos cualesquiera. Entonces:*

i) $[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$

ii) $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha\beta]$

Cuando no haya lugar a confusión, denotaremos a los operadores numéricos $[\alpha]$ simplemente por $\alpha$.

Alamo y Rodríguez [2] establecieron que el operador $D^\delta$ es un endomorfismo sobre $C_\delta$ y probaron que para toda función $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ en $C_\delta$

*i)* $D^\delta I^\delta f(t) = f(t)$.

*ii)* $I^\delta D^\delta f(t) = f(t) - a_1 t^{\delta-1} = f(t) - [t^{1-\delta} f(t)]_{t=0} t^{\delta-1}$.

*iii)* $(I^\delta)^m (D^\delta)^m f(t) = f(t) - \sum\limits_{j=1}^{m} a_j t^{j\delta-1}$.

A fin de desarrollar un cálculo operacional, identificaron a la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, $I^\delta$, con la función $f(t) = \dfrac{\Gamma(\delta) t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \in C_\delta$, en el sentido de que

$$\frac{\Gamma(\delta) t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \oplus f(t) = I^\delta f(t)$$

y sus correspondientes iteraciones con la funciones

$$\frac{\Gamma(\delta) t^{(k+1)\delta-1}}{\Gamma[(k+1)\delta]} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

siendo sus respectivos inversos algebraicos

$$V = \frac{\Gamma(2\delta) t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) t^{2\delta-1}} \;\; y \;\; V^k = \frac{\Gamma[(k+1)\delta] t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) t^{(k+1)\delta-1}}$$

De ahora en adelante denotaremos por $H = \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \equiv I^{\delta}$, de modo que cuando escribamos $Hf(t)$ entenderemos $I^{\delta}f(t)$.

Finalmente obtuvieron las siguientes reglas operacionales para cualquier función $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \in C_\delta$

$$\left.\begin{aligned} Vf(t) &= D^{\delta}f(t) + a_1 V \\ V^m f(t) &= (D^{\delta})^m f(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\Gamma(j\delta)}{\Gamma(\delta)} V^{m-j+1} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

El próximo teorema, similar al dado en [7], será de utilidad para representar una solución de cierta ecuación integro-diferencial, como una serie operacional.

**Teorema 1** *Supongamos que la serie de potencias*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k \quad (z\,,\, \alpha_k \in \mathbb{C})$$

*es convergente en un punto $z_0 \neq 0$, es decir,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_0^k = A \in \mathbb{C}.$$

*Entonces la serie de potencias*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k V^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k H^k \quad (H^k = \frac{\Gamma(\delta)t^{(k+1)\delta-1}}{\Gamma[(k+1)\delta]})$$

*is uniformemente convergente en compactos de $[0,\infty)$, por lo que representa un elemento de $C_\delta$.*

**Demostración.** Debemos remarcar que $V^0 = H^0 = 1 \in M_\delta$ y $1 = \frac{t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$ se identifica con $t^{\delta-1} \in C_\delta$.

Dado que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k V^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\delta)t^{(k+1)\delta-1}}{\Gamma[(k+1)\delta]} = t^{\delta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]} (t^{\delta})^k$$

probaremos que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]} (t^{\delta})^k$$

es uniformemente convergente en cualquier intervalo cerrado $[0, t_0]$ con $t_0 > 0$.

Sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_0^k$ con $z_0 \neq 0$ es convergente. Por lo tanto, para cierto $M_0 > 0$ y $k = 0, 1, 2, ...$, se tiene

$$|\alpha_k| \leq \frac{M_0}{|z_0|^k}$$

También sabemos [7], ya que $(k+1)\delta > 2 \quad (k \geq 1)$, que

$$\frac{1}{\Gamma[(k+1)\delta]} \leq \frac{\beta^k k^\gamma}{k^k} \quad (\beta \; y \; \gamma \; constantes)$$

Tomando un número fijo $t = t_0$ donde $(0 < t_0 < \infty)$, obtenemos

$$|\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]}(t_0^\delta)^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_0\Gamma(\delta)(t_0^\delta)^k \beta^k k^\gamma}{|z_0|^k k^k} < \infty$$

lo que, por el teorema de Abel, demuestra que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]}(t_0^\delta)^k$$

es uniformemente convergente cualquier intervalo $[0, t_0]$.

**Ejemplo:**

$$\frac{V}{V-a} = (1-aH)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k}(-1)^k a^k H^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k}{\Gamma(k+1)} a^k \frac{\Gamma(\delta) t^{(k+1)\delta-1}}{\Gamma[(k+1)\delta]} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a^{m-1} \frac{\Gamma(\delta) t^{m\delta-1}}{\Gamma(m\delta)} = \Gamma(\delta) E_\delta(a,t)$$

lo que concuerda con el resultado obetenido en [2], donde $E_\delta(a,t)$ representa la función estudiada por Al-Bassam en [1].

Ahora estamos en condiciones de definir un operador sobre $C_\delta$, el cual actuará como derivada algebraica.

**Definición 1** *Sea $f \in C_\delta$. definimos el operador $\mathcal{D}$ como sigue:*

$$\mathcal{D}f(t) = [I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} t] f(t)$$

Es necesario, para nuestro desarrollo, conocer cómo actúa $\mathcal{D}$ sobre los elementos de $C_\delta$.

**Proposición 3.** *Dada cualquier función $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \in C_\delta$, se verifica que $\mathcal{D}f(t) \in C_\delta$. Es más, $\mathcal{D}f(t)$ se puede representar de dos formas equivalentes*

a) $[I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} t] f(t) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k t^{(k+1)\delta-1} \qquad (b_k = a_k \frac{(1-k)\Gamma(k\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]})$

b) $[I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} t] f(t) = (t^{2\delta-1}) \oplus [\sum_{k=2}^{\infty} d_k t^{k\delta-1}] \qquad (d_k = \frac{\Gamma(\delta)(1-k)a_k}{\Gamma(2\delta)})$

**Demostración.** Es obvio que la obtención de las representaciones **a)** o **b)** demuestra que $\mathcal{D}f(t) \in C_\delta$.

$$[I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta}t]f(t) = I^\delta \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1-k) a_k \frac{\Gamma(k\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]} t^{(k+1)\delta-1} = \sum_{k=2}^{\infty} b_k t^{(k+1)\delta-1}$$

La obtención de **b)** se sigue de la igualdad (2.1), ya que

$$t^{2\delta-1} \oplus t^{k\delta-1} = \frac{\Gamma(2\delta)\Gamma(k\delta)}{\Gamma(\delta)\Gamma[(k+1)\delta]} t^{(k+1)\delta-1}$$

La confirmación de que $\mathcal{D}$ es una derivada algebraica sobre $C_\delta$, viene dada por la siguiente proposición

**Proposición 4.** *Sean $f$ y $g$ cualesquiera funciones de $C_\delta$. Entonces se tiene:*

a) $\mathcal{D}[f(t) + g(t)] = \mathcal{D}f(t) + \mathcal{D}g(t)$

b) $\mathcal{D}(f \oplus g)(t) = ([\mathcal{D}f] \oplus g)(t) + (f \oplus [\mathcal{D}]g)(t)$

**Demostración.**

*a)* Es consecuencia inmediata del hecho de que el operador $[I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta}t]$ es lineal respecto a la suma.

*b)* Sean $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ y $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{k\delta-1}$. Entonces, por la Proposición 1, tenemos que:

$$\mathcal{D}(f \oplus g)(t) = \mathcal{D} \sum_{k=1}^{\infty} \{\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\} t^{k\delta-1}$$

denotando por $c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}$ y haciendo uso de la Proposición 3, se obtiene

$$\mathcal{D}(f \oplus g)(t) = \frac{\Gamma(\delta) t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \oplus \sum_{k=2}^{\infty} (1-k) c_k t^{k\delta-1} \tag{2.3}$$

De manera análoga se puede probar que

$$([\mathcal{D}f]\oplus g)(t)=\frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)}\oplus\sum_{k=2}^{\infty}(1-k)a_kt^{k\delta-1}\oplus\sum_{k=1}^{\infty}b_kt^{k\delta-1}=$$

$$=\frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)}\oplus[\sum_{k=2}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{k}(1-j)a_jb_{k-j+1}\frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\}t^{k\delta-1}] \tag{2.4}$$

y

$$(f\oplus[\mathcal{D}g])(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kt^{k\delta-1}\oplus\frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)}\oplus\sum_{k=2}^{\infty}(1-k)b_kt^{k\delta-1}=$$

$$=\frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)}\oplus[\sum_{k=2}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{k}(j-k)a_jb_{k-j+1}\frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\}t^{k\delta-1}] \tag{2.5}$$

Por último, es sencillo comprobar que (2.3) es la suma de (2.4) y (2.5).

Extenderemos, como es habitual, la definición de $\mathcal{D}$ al cuerpo de fracciones $M_\delta$.

$$\mathcal{D}\frac{f}{g}=\frac{[\mathcal{D}f]\oplus g-f\oplus[\mathcal{D}g]}{g\oplus g}\qquad(f\in C_\delta\ ,\ g\in C_\delta-\{0\})$$

$$\mathcal{D}\frac{p}{q}=\frac{[\mathcal{D}p]\cdot q-p\cdot[\mathcal{D}q]}{q^2}\qquad(p\in M_\delta\ ,\ q\in M_\delta-\{0\})$$

La siguiente proposición pone de manifiesto el buen comportamiento de la derivada algebraica sobre algunos elementos de $M_\delta$. Lo que nos será de utilidad en las aplicaciones.

**Proposición 5.** *Sean* $1=\frac{t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$ *el elemento unidad de* $M_\delta$, $0=\frac{0}{t^{\delta-1}}$, $V=\frac{1}{H}$ *el inverso algebraico de* $H$ *en* $M_\delta$ *y* $n\in\mathbb{N}$. *Entonces:*

a) $\mathcal{D}1=0$

b) $\mathcal{D}\alpha=0\qquad(\alpha=\frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}})$

c) $\mathcal{D}(\alpha p)=\alpha\mathcal{D}p\qquad(\forall\,p\in M_\delta)$

d) $\mathcal{D}H^n=-nH^{n+1}$

e) $\mathcal{D}V^n=nV^{n-1}$

f) $\mathcal{D}(1-\alpha H)^n=n\alpha H^2(1-\alpha H)^{n-1}$

g) $\mathcal{D}(V-\alpha)^n = n(V-\alpha)^{n-1}$

**Demostración.** Para probar **a)** y **b)** se necesita un simple cálculo:

$$\mathcal{D}1 = \mathcal{D}\frac{t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = \frac{[\mathcal{D}t^{\delta-1}]\oplus t^{\delta-1} - t^{\delta-1}\oplus[\mathcal{D}t^{\delta-1}]}{t^{\delta-1}\oplus t^{\delta-1}} = 0$$

$$\mathcal{D}\alpha = \mathcal{D}\frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = \frac{\alpha[(\mathcal{D}t^{\delta-1})\oplus t^{\delta-1}] - \alpha[t^{\delta-1}\oplus(\mathcal{D}t^{\delta-1})]}{t^{\delta-1}\oplus t^{\delta-1}} = 0$$

**c)** es consecuencia de **b)** y del hecho de que $\mathcal{D}$ es una derivada algebraica. Para probar **d)** se usará el método de inducción matemática:

$$\mathcal{D}H = (I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta}t)\frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(2\delta)}[\frac{\Gamma(2\delta)}{\Gamma(3\delta)}t^{3\delta-1} - \frac{\Gamma(2\delta+1)}{\Gamma(3\delta)\delta}t^{3\delta-1}] =$$

$$= -\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(3\delta)}t^{3\delta-1} = -H^2$$

y

$$\mathcal{D}H^{k+1} = \mathcal{D}(H\cdot H^k) = [\mathcal{D}H]\cdot H^k + H\cdot[\mathcal{D}H^k] = -(k+1)H^{k+2}$$

Para **e)** téngase en cuenta que $V = \frac{1}{H}$, por lo que no es difícil ver que $\mathcal{D}V = 1$ usando **a)** y **d)**, para luego volver a usar inducción. Finalmente, para demostrar **f)** y **g)**, nótese que

$$\mathcal{D}(1-\alpha H)^n = \mathcal{D}[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\alpha H)^{n-k}] = -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-\alpha)^{n-k}(n-k)H^{n-k+1} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}(-\alpha)H^2(-\alpha H)^{n-k-1} = n\alpha H^2(1-\alpha H)^{n-1}$$

y como quiera que $(V-\alpha)^n = (\frac{1}{H}-\alpha)^n = \frac{(1-\alpha H)^n}{H^n}$, usando **f)**, **d)** y la definición de $\mathcal{D}$ sobre $M_\delta$ la demostración queda concluida.

**Nota:** La última proposición también es válida para $n \in \mathbb{Z}$, dado que para cualquier $p \in M_\delta - \{0\}$ : $p^{-n} = \frac{1}{p^n}$

El recíproco de **b)** también es cierto.

**Proposición 6.** *Dado $p \in M_\delta$, si $\mathcal{D}p = 0$ entonces $p$ es un operador númerico.*

**Demostración.** Sea $p = \frac{f}{g}$ y $\mathcal{D}p = 0$. Dado que $\mathcal{D}p = \frac{([\mathcal{D}f]\oplus g)(t) - (f\oplus[\mathcal{D}g])(t)}{(g\oplus g)(t)}$ se sigue:

$$([\mathcal{D}f]\oplus g)(t) - (f\oplus[\mathcal{D}g])(t) = 0 \qquad (2.6)$$

Si denotamos por $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ y $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{k\delta-1}$, tenemos que

$$([\mathcal{D}f] \oplus g)(t) = \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \oplus [\sum_{k=2}^{\infty} \{\sum_{j=1}^{k} (1-j)a_j b_{k-j+1} \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\} t^{k\delta-1}]$$

y

$$(f \oplus [\mathcal{D}g])(t) = \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \oplus [\sum_{k=2}^{\infty} \{\sum_{j=1}^{k} (j-k)a_j b_{k-j+1} \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\} t^{k\delta-1}]$$

Por lo tanto, (2.6) implica que

$$\sum_{j=1}^{k} (1+k-2j)a_j b_{k-j+1} \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)} = 0 \quad (\forall k \geq 2) \tag{2.7}$$

Supongamos ahora que $b_1 \neq 0$. Si tomamos en (2.7) $k=3$ y $k=4$ se obtiene respectivamente

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad y \quad a_1 b_3 = a_3 b_1$$

a continuación es fácil probar que $a_m b_n = a_n b_m$ cuando $a_1 b_n = a_n b_1$ y $a_1 b_m = a_m b_1$.

Finalmente, para poder obetener que $a_1 b_k = a_k b_1$ para todo $k \geq 2$ tendremos en cuenta las siguientes igualdades:

$(k = 2r)$

$$\sum_{j=1}^{2r} (1+2r-2j)a_j b_{2r-j+1} \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(2r-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(2r\delta)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} (1+2r-2j)(a_j b_{2r-j+1} - a_{2r-j+1} b_j) \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(2r-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(2r\delta)}$$

$(k = 2r+1)$

$$\sum_{j=1}^{2r+1} (2+2r-2j)a_j b_{2r+2-j} \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(2+2r-j)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma((2r+1)\delta)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} (2+2r-2j)(a_j b_{2+2r-j} - a_{2+2r-j} b_j) \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(2+2r-j)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma((2r+1)\delta)}$$

Por lo tanto si $b_1 \neq 0$ podemos establecer que $a_k = \frac{a_1}{b_1} b_k$ para todo $k \geq 1$, en otras palabras

$$\frac{f}{g} = \frac{\alpha g}{g} = \frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = [\alpha] \quad (\alpha = \frac{a_1}{b_1})$$

Para terminar la demostración basta hacer notar que en caso de que $b_1 = 0$ y $a_1 \neq 0$ es fácil comprobar que $b_k = 0$ para todo $k$, en contradicción con el hecho de que $g(t) \in C_\delta - \{0\}$. Luego si $b_1 = 0$ entonces $a_1 = 0$, y comenzaríamos con $b_2 \neq 0$ y así sucesivamente.

Como aplicación de los resultados obtenidos, resolveremos la siguiente ecuación integro-diferencial

$$\begin{cases} -\mathcal{D}(D^\delta)^2 x(t) + (1+\mathcal{D})D^\delta x(t) - a x(t) = 1 \quad (x(t) \in C_\delta) \ (a \in \mathbb{C}) \\ [t^{1-\delta} x(t)]_{t=0} = 0 \ ; \ [t^{1-\delta} D^\delta x(t)]_{t=0} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(2\delta)} \end{cases} \tag{2.8}$$

Teniendo en cuenta (2.2) y la Proposición 5, la ecuación (2.8) se transforma en

$$\frac{\mathcal{D}x(t)}{x(t)} = \frac{a-1}{V} - \frac{a}{V-1} = \frac{H[H(1-a)-1]}{1-H} \tag{2.9}$$

**Proposición 7.**

a) $x_a = H(1-H)^{-a} \in M_\delta$ *es una solución de (2.9)*

b) $x_a(t) = \dfrac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(a)} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (a,1); & \\ & t^\delta \\ (2\delta,\delta); & \end{matrix} \right]$ *es una solución de (2.8)*

c) $D^\delta(x_a \oplus x_b)(t) = x_{a+b}(t)$,

*donde*

$${}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (a,b); & \\ & t \\ (c,d); & \end{matrix} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(kb+a)}{\Gamma(kd+c)} \frac{t^k}{k!}$$

*representa la función hipergeométrica generalizada de Wright, (cf.[10]).*

**Demostración.**

*a)* El Teorema 1 nos permite representar al operador $(1-H)^{-a}$ como la serie,

$$\mathcal{D}(1-H)^{-a} = \mathcal{D}[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k \frac{\Gamma(\delta)t^{(k+1)\delta-1}}{\Gamma[(k+1)\delta]}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-a) \binom{-a-1}{k-1} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(\delta)t^{(k+2)\delta-1}}{\Gamma[(k+2)\delta]} = (-a)H^2(1-H)^{-a-1}$$

Por lo tanto

$$\frac{\mathcal{D}[H(1-H)^{-a}]}{H(1-H)^{-a}} = \frac{H[H(1-a)-1]}{1-H}$$

*b)* El operador $x_a = H(1-H)^{-a}$ admite la siguiente representación como función de $C_\delta$

$$x_a = H(1-H)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k H^{k+1} = \Gamma(\delta)t^{2\delta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{\Gamma(k+1)}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma[(k+2)\delta]} =$$

$$= \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k\delta+2\delta)}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(k+1)}$$

Luego, (cf.[10, pag.50]),

$$x_a(t) = \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(a)}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{cc}(a,1); & \\ & t^\delta \\ (2\delta,\delta); & \end{array}\right]$$

*c)* Es consecuencia de los apartados anteriores, ya que

$$(x_a \oplus x_b)(t) = H(1-H)^{-a}H(1-H)^{-b} = H^2(1-H)^{-(a+b)}$$

**Nota:** Si $-a \in \mathbb{N}$, la serie que comparece en la demostración de esta última proposición, se reduce a un polinomio de grado fraccionario.

## 3. Una derivada algebraica asociada al operador $D_\beta^\delta$

En esta sección usaremos la derivada algebraica $\mathcal{D}$ y algunos resultados presentados en [3] para obener una derivada algebraica asociada al operador $D_\beta^\delta$, el cual puede considerarse como una generalización de $D^\delta$.

**Teorema 2** *Si $T : X \to \hat{X}$ es un isomorfismo entre los espacios vectoriales $X$ y $\hat{X}$, y $\hat{L} : \hat{X} \to \hat{X}$ es un operdor lineal en $\hat{X}$ con una convolución asociada $\hat{*} : \hat{X} \times \hat{X} \to \hat{X}$, entonces la operación $x * y = T^{-1}(Tx\hat{*}Ty)$ es una convolución para el operador $L = T^{-1}\hat{L}T$ in $X$.*

Este teorema se conoce como el teorema de semejanza de Meller y puede encontrarse en [4].

El teorema de Meller fue usado en [3] para establecer que se puede obtener una derivada algebraica $\mathcal{D} = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}T$ asociada a $*$ si se tiene la correspondiente derivada $\hat{\mathcal{D}}$ asociada a $\hat{*}$. Además se demostró que si $\hat{*}$ no tiene divisores de cero, lo que implica que $*$ tampoco los tiene, entonces el isomorfismo $T$ puede ser extendido a los correspondientes cuerpos de fracciones $\mathcal{M}$ y $\hat{\mathcal{M}}$ mediante la expresión

$$T(\frac{f}{g}) = \frac{Tf}{Tg} \quad para \ \ todo \ \ \frac{f}{g} \in \mathcal{M}.$$

Más aún se comprobó que cuando existiese un elemento $\hat{l} \in \hat{X}$ que verificase $\hat{W}\hat{f} = \hat{l}\hat{*}\hat{f}$, para cualquier $\hat{f} \in \hat{X}$, donde $\hat{W}$ representa el operador inverso por la derecha de $\hat{L}$, entonces también existirá un elemento $l = T^{-1}(\hat{l}) \in \mathcal{M}$ tal que $Wf = l * f$, siendo $W$ el operador inverso por la derecha de $L$. Observamos que el ismorfismo $T : \mathcal{M} \to \hat{\mathcal{M}}$ aplica $s = \dfrac{1}{l}$ en $\hat{s} = \dfrac{1}{\hat{l}}$

Finalmente fue demostrada la siguiente proposición.

**Proposición 8.** *Las siguientes aseveraciones son ciertas:*

1. *Si* $\hat{\mathcal{D}}\hat{s} = 1$ *entonces* $\mathcal{D}s = 1$

2. *Si* $\hat{\mathcal{D}}1 = 0$ *entonces* $\mathcal{D}1 = 0$

3. *Si* $\hat{\mathcal{D}}\hat{s}^n = n\hat{s}^{n-1}$ *entonces* $\mathcal{D}s^n = ns^{n-1}$

4. *Si* $\hat{\mathcal{D}}\hat{l}^n = -n\hat{l}^{n+1}$ *entonces* $\mathcal{D}l^n = -nl^{n+1}$

Estamos ahora en condiciones de ampliar este resultado, afirmando que cuando $\hat{\mathcal{D}}$ verifique la Proposición 5, entonces $\mathcal{D}$ también la satisface.

**Proposición 9.**

1. *Si* $\hat{\mathcal{D}}\hat{\alpha} = 0$ *entonces* $\mathcal{D}\alpha = 0$, *siendo* $\hat{\alpha}$ *y* $\alpha$ *operadores numéricos.*

2. *Si* $\hat{\mathcal{D}}(\hat{\alpha}\hat{p}) = \hat{\alpha}\hat{\mathcal{D}}\hat{p}$ *entonces* $\mathcal{D}(\alpha p) = \alpha\mathcal{D}p$, *donde* $\hat{p}$ *y* $p$ *operadores cualesquiera.*

3. *Si* $\hat{\mathcal{D}}(1 - \hat{\alpha}\hat{l})^n = n\hat{\alpha}\hat{l}^2(1 - \hat{\alpha}\hat{l})^{n-1}$, *entonces* $\mathcal{D}(1 - \alpha l)^n = n\alpha l^2(1 - \alpha l)^{n-1}$.

4. *Si* $\hat{\mathcal{D}}(\hat{s} - \hat{\alpha})^n = n(\hat{s} - \hat{\alpha})^{n-1}$, *entonces* $\mathcal{D}(s - \alpha)^n = n(s - \alpha)^{n-1}$.

**Demostración.**

Se sigue, haciendo un simple cálculo, del hecho de ser $T$ un isomorfismo de cuerpos.

Además, $\mathcal{D}$ verifica la Proposición 6 siempre y cuando la verifique $\hat{\mathcal{D}}$.

**Proposición 10.** *Si* $\hat{\mathcal{D}}\hat{p} = 0$ *implica que* $\hat{p}$ *es un operador numérico, entonces* $\mathcal{D}p = 0$ *implica que* $p$ *es también un operdor numérico.*

Es más, podemos identificar la expresión operacional de $x_{a,\beta}$ con la suma de una serie operacional.

**Proposición 12.** *Si la serie de potencias*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k H^k$$

*representa un elemento de $C_\delta$, entonces la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k H_\beta^k$$

*representa un elemento de $C_{\beta(\delta)}$.*

**Demostración.** Es consecuencia del hecho de que si la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k$ es uniformemente convergente en un intervalo cerrado $[0, t_0]$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (t^\beta)^k$, también lo es para $\beta > 0$ en $[0, t_0^\beta]$.

Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k H^{k+1}$ converge a $H(1-H)^{-a}$, se sigue que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k H_\beta^{k+1}$$

converge a $H_\beta(1-H_\beta)^{-a} = T^\beta[H(1-H)^{-a}]$. Por lo tanto

$$x_{a,\beta} = H_\beta(1-H_\beta)^{-a} = \frac{\Gamma(\delta) t^{\beta(2\delta-1)}}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k\delta+2\delta)} \frac{t^{k\beta\delta}}{\Gamma(k+1)}$$

Este último resultado nos permite establecer la siguiente proposición.

**Proposición 13.** *La función* $x_{a,\beta}(t) = \frac{\Gamma(\delta) t^{\beta(2\delta-1)}}{\Gamma(a)} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{array}{cc} (a,1); & \\ & t^{\beta\delta} \\ (2\delta,\delta); & \end{array} \right]$ *es una solución de la ecuación (3.1) que verifica*

$$D_\beta^\delta[x_{a,\beta} \otimes x_{b,\beta}](t) = x_{a+b,\beta}(t)$$

# References


[1] **M.A. Al-Bassam**,"On generalized power series and generalized operational calculus and its applications", *Nonlinear analysis*, 51-88, World Sci. Publishing, Singapore, (1987).

[2] **J.A. Alamo and J. Rodríguez**,"Cálculo operacional de Mikusinski para el operador de Riemann-Liouville y su generalizado", *Rev. Acad. Canar. Cienc.*, 1 (1993), 31-40.

[3] **V.M. Almeida and J. Rodríguez**,"The Meller's theorem and the algebraic derivative", *Integral Transforms and Special Functions*, 10(1) (2000), 1-12.

[4] **I.H. Dimovski**,"Convolutional Calculus" , *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht (1990).

[5] **Ditkin and Proudnikov**,"Integral Transforms and Operational Calculus", *Pergamon Press*, Oxford (1965).

[6] **W. Kierat and K. Skornik**,"A remark on solutions of the Laguerre differential equation" , *Integral Transforms and Special Functions*, 1(4) (1993), 315-316.

[7] **Y.F. Luchko and H.M. Srivastava**,"The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus" , *Computers Math. Applic.*, Vol. 29(No. 8) (1995), 73-85.

[8] **A.C. McBride**, "Fractional calculus and integral transforms of generalized functions", *Pitman Adv. Publ. Program.*, London (1979).

[9] **J. Mikusinski**, "Operational Calculus", *Pergamon*, Oxford (1959).

[10] **H.M. Srivastava, H.L. Manocha**, "A Treatise on Generating Functions",*Ellis Horwood.* (1984)

Departamento de Análisis Matemático - Universidad de La Laguna
La Laguna (Tenerife) - Canary Islands
Spain.