LIMITE DE SUCESIONES

Manuel González Dávila

Manuel Martín Fernández

(Miembros del Grupo de Didáctica de la Matemática de Cádiz)

I. APROXIMACION AL CONCEPTO INTUITIVO DE LIMITE DE UNA SUCESION MEDIANTE LA UTILIZACION DE UNA CALCULADORA DE BOLSILLO

La necesidad del uso de calculadoras para una introducción del concepto de límite de una sucesión, obedece al nivel concreto en que se encuentra la mayoría de los alumnos de 2º de B.U.P. Según nos consta por nuestra experiencia, la mayor parte no capta, de entrada, el método riguroso (formal).

Debe comenzarse con ejemplos elementales usuales y, a continuación, abordar problemas de cálculo de límites que, en un desarrollo formal, resultarían muy complejos. Veamos algunos ejemplos en los que se ha trabajado con una Casio f-29 :

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

n	$\sqrt[n]{n}$
1	1
2	1,4142136
3	1,4422495
4	1,4142136

10	1,2589254
31	1,1171419
84	1,0541635
154	1,0332000
3698	1,0022410
10^6	1,0000138
10^7	1,0000016
10^8	1,0000002
3.10^8	1,0000001
$3,9.10^8$	1,0000001
4.10^8	1
.	.
.	.
.	.
.	1

Es de señalar la poca información que se tiene con valores pequeños de n, y el hecho de que la calculadora toma 1 como valor de $\sqrt[n]{n}$, a partir de un cierto valor de n.

Con estos ejercicios prácticos, el alumno adquiere la idea de límite como número al que se aproximan los términos de la sucesión. Además, pierde el miedo a abordar un problema de cálculo de límite, sea cual fuere su complejidad. Por ejemplo:

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty} n\left|\sqrt[3]{8+2/n}-2\right| = 1/6$$

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[3]{n^3+4} + \sqrt[3]{8n^3+4n^2} - 3n\right| = 1/3$$

$$(4)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!\,e^n} = 0$$

$$(5)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(4n^2+2n+1)}{\ln n} = 2$$

Los ejercicios (3) y (4) son buenos ejemplos para aprovechar la memoria de la calculadora (memoria sumativa). Previamente al (4), se introduciría el número e mediante la calculadora:

Con estas prácticas mejoraremos el aprendizaje del uso de la calculadora. Es interesante trabajar cuestiones acerca de errores de redondeo(sólo admite ocho cifras). También,a la vista de las tablas de valores,hacer comparaciones entre distintas sucesiones en cuanto a rapidez de aproximación.

Para evitar la idea de que toda sucesión es convergente,deben proponerse también ejercicios como los siguientes:

(6) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} n$

(7) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$

(8) $\lim_{n\to\infty} (-2)^n$

(9) $\lim_{n\to\infty} \cos n$

Veamos,para terminar este apartado,un ejemplo interesante,que hemos resulelto con una Casio fx-20 y tomando $\pi=3,1416$:

(10) $\lim_{n\to\infty} n^2(1 - \cos 1/n) = 1/2$

n	$1/n$	grados	$\cos 1/n$	$1-\cos 1/n$	$n^2(1-\cos 1/n)$
1	1	57,295645	0.540304	0,459696	0,459696
2	0,5	28,647822	0,877583	0,122417	0,489668
3	0,333..	19,098546	0,944957	0,055043	0,495387
4	0,25	14,323911	0,968913	0,031087	0,497392
.	....	....	....	....	....
.	....	....	....	....	....
19	0,0526	3,015555	0,998615	0,001385	0,499985
20	0,05	2,864782	0,998750	0,001250	0,5 ←
..	......	....	....	....	....
25	0,04	2,2918258	0,999200	0,000800	0,5 ←
..	......	....	....	....	....

En este ejemplo es necesario usar valores pequeños de n. Para valores grandes,la calculadora tomaría $\cos 1/n = 1$ y parecería que el límite es cero.

II. FORMALIZACION DEL CONCEPTO INTUITIVO

La necesidad de formalizar la definición intuitiva de límite de una sucesion, como *número al que se aproximan sus términos*, nos da ocasión para explicar lo relativo a la formalización matemática. Es decir, para que el alumno no sólo sepa una definición formal, sino que comprenda lo que significa la formalización. En 2º de B.U.P. sólo se puede intentar una primera aproximación a esta idea.(1).

Se pretende conseguir que los alumnos comprendan y trabajen la siguiente definición de límite de una sucesión :

" *$\lim (a_n) = \ell$ sii cada entorno de ℓ posee todos los términos de la sucesión, excepto un número finito* ".

O bien : " *En cada entorno de ℓ están todos los términos de la sucesión a partir de uno dado* ".

Para introducir esta definición, habría que definir antes el concepto de entorno de un número ℓ. Esto se puede hacer simplemente como un intervalo abierto que contiene a ℓ. Si se va a trabajar la definición clásica ("para todo $\varepsilon>0$, existe un $n_0 \in N$,...."), es mejor utilizar, en lugar de entornos, entornos simétricos de centro ℓ y radio ε, definiéndolos como intervalos del tipo $(\ell-\varepsilon , \ell+\varepsilon)$, con $\varepsilon>0$. Es decir, $E(\ell,\varepsilon) = (\ell-\varepsilon , \ell+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

Por supuesto, se aconseja la representación en la recta real de todo lo que se hace. Conviene insistir en la idea básica de que no hay ningún entorno más pequeño que todos los demás ; si lo hubiera, bastaría comprobar la definición con él y no con todo entorno.

Para introducir la definición dada anteriormente, se aconseja trabajar con un ejemplo de sucesión convergente , $(1/n)$, y otro de sucesión no convergente, $(-1)^n$, y hacer observar que la diferencia entre ellas se puede formalizar a través del instrumento del entorno. Es conveniente repetir este tipo de ejemplos.

Para trabajar con la definición dada, debiera empezarse por demostrar las propiedaes elementales del concepto introducido, esto es :

(1) Unicidad del límite

(2) Acotación de las sucesiones convergentes

(3) Una sucesión convergente con infinitos términos positivos o infinitos negativos, tiene límite cero.

(4) Si una sucesión converge a un número positivo, entonces todos los términos de la sucesión son positivos excepto un número finito

(5) Si $a_n \leq b_n$ y convergen, entonces $\lim(a_n) \leq \lim(b_n)$

(6) Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ convergen y $\lim(a_n) = \lim(c_n)$, *entonces* $\lim(a_n) = \lim(b_n) = \lim(c_n)$

(7) Toda sucesión creciente y acotada tiene límite.

Las propiedades (1), (5) y (6) son una buena ocasión para introducir el concepto de demostración por reducción al absurdo. Las demostraciones de todas estas propiedades son mucho más claras con la definición dada que con la clásica y, en cursos de buenos alumnos, se pueden demostrar una o dos y dejar el resto a ellos; o bien, esperar a que demuestren y desarrollen la totalidad.

Se aconseja formular estas propiedades como teoremas y habituar así al alumno a la idea de"teorema"como algo que se necesita demostrar, y a la de"definición"como algo que es necesario precisar.

La segunda dirección en que se puede trabajar con esta definición tiene como objetivo que el alumno comprenda la importancia de la definición dada, analiando los resultados que se obtendrían si en ella se suprimieran o modificaran algunos términos. Estas cuestiones se pueden plantear en forma de ejercicios. Veamos algunos ejemplos:

1) Supongamos que aceptamos la siguiente definición de límite : *$\lim(a_n) = a$ si cualquier intervalo abierto que contenga a "a", contiene infinitos términos de la sucesión.* Demostrar que con esta definición el límite de una sucesión podría no ser único y que habría sucesiones convergentes que no estarían acotadas. ¿Se cumpliría con esta definición la propiedad (3)?

2) ¿Qué sucesiones tendrían límite con la siguiente definición: *$\lim(a_n) = l$ si cualquier intervalo (abierto o cerrado) que conten*

ga a "ℓ" contiene a todos los puntos de la sucesión excepto un número finito?

3) ¿Qué sucesiones serían convergentes si suprimimos en la definición de límite la expresión "*excepto un número finito*" o "*a partir de uno dado*"?

4) ¿Qué sucesiones tendrían límite con la siguiente definición: *$\lim (a_n) = \ell$ si existe un entorno de ℓ que contiene a todos los puntos de la sucesión excepto un número finito?* Considérese el entorno $R=(-\infty, +\infty)$.

Se trata ahora de llegar a la formulación clásica. Para ello es necesario, en primer lugar, trabajar con entornos simétricos. Si en la definición dada se ha hablado simplemente de entornos, es necesario demostrar primeramente que la definición que se obtiene al escribir entorno simétrico, en lugar de entorno, es equivalente. Ello se hará en la idea de que todo entorno de ℓ contiene un entorno simétrico de ℓ. Si se quiere obviar esto, lo único que hay que hacer es poner directamente en la definición dada: entornos simétricos. A continuación, establecer -por ejemplo, mediante dibujos- la igualdad

$$(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) = \{x / |x-\ell| < \varepsilon\}$$

y explicar la definición

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in N / |a_n-\ell| < \varepsilon, \forall n > 0,$$

como abreviatura de

$$\forall E(\ell,\varepsilon), \exists a_{n_0} / a_n \in E(\ell,\varepsilon), \forall n > n_0$$

que es una reformulación de la definición dada.

Es esta una ocasión para hablar del concepto de distancia entre números reales. De todas formas, somos partidarios de la eliminación total de este lenguaje en 2º de B.U.P. y limitarse a la definición por entornos. Es preciso hacer notar que la definición de límite de sucesiones es una definición topológica y, por tanto, no necesita del concepto de distancia. Al introducir esta, lo único que se hace es reformular la definición para el caso de espacios métricos, pero no se añade na da nuevo respecto a la idea de límite y para el alumno resulta mucho más difícil.

NOTAS

1. Se sugiere la lectura de N.BOURBAKI, Elementos de Historia de las Matemáticas - AU 18, págs. 24, 33 (Noción de verdad en Matemáticas)

2. Somos partidarios de introducir el concepto de límite de sucesiones en 2º de B.U.P. y dejar toda la teoría de funciones para 3º.

3. No es necesario introducir, para la definición por entornos, ningún estudio de desigualdades, que son generalmente difíciles de manejar por el alumno.

4. Las únicas propiedades que no se pueden demostrar con la definición por entornos son las algebraicas : $lim(a_n + b_n) = lim(a_n) + lim(b_n)$, etc. Somos partidarios de razonarlos de una forma intuitiva a partir de las propiedades de R y no realizar ninguna demostración rigurosa, que, de hecho, casi nadie entiende.

5. No hemos tratado detenidamente el problema de los límites infinitos, pero surgen naturalmente con la calculadora en los casos como $lim(n)$, $lim \sqrt[n]{n}$, etc. La definición dada sigue siendo válida en el caso de $lim = \infty$ sin más que definir previamente:

Entorno de $+\infty$ = Intervalo del tipo $(a , +\infty)$

Entorno de $-\infty$ = Intervalo del tipo $(-\infty, a)$

Bastaría, si no se quiere introducir estas definiciones, con la idea intuitiva que se obtiene con la calculadora.

6. Todo este proceso ha sido ensayado con resultados positivos excepto en el caso de la segunda dirección (página anterior), ya que de esta deducen los alumnos que sólo hay una noción de convergencia en R, y no, que "cada tipo de entorno" produce una.

Para evitar esto, se aconseja hacer observar que el hecho de que los entornos sean intervalos abiertos no es lo determinante y, por tanto, investigar qué ocurriría si, en lugar de ellos, se tomara otra familia de conjuntos, que conviene reunan unas mínimas condiciones de regularidad, parecidas a las que cumplen los intervalos. Por ejemplo:

a) Que la intersección de dos elementos de la familia esté en ella. (Técnicamente esto significa que la familia es una base de una cierta topología y, en consecuencia, la convergencia es la misma tomando como entornos los elementos de la familia y no todos los de la topología, como ocurre con los intervalos respecto a la topología natural de R).

b) Que dados $a \neq b$, exista A, B de la familia, tales que $A \quad B$ y $a \in A$, $b \in B$. Esta es la condición utilizada en la mayoría de las demostraciones de las propiedades enunciadas, e implica que el espacio es de HAUSSDORF.

Es interesante también trabajar con familias que no cumplan eata condición, para observar qué ocurre entonces con la unicidad del límite.

Se trata de que el alumno comprenda que la noción de convergencia es una noción topológica, es decir, que depende directamente de la familia de entornos con que se trabaje, y no de las propiedades algebraicas del conjunto base. Esto no se consigue si directamente se trabaja con el concepto de distancia, que utiliza propiedades algebraicas. De hecho, es mucho más fácil trabajar con entornos que con la distancia.

Algunos de las nociones de convergencia de los ejercicios que hemos sugerido se obtienen con determinadas topologías: discreta, interna. Se pueden plantear otras: cofinita, etc.

Quizás se podría intentar lograr con todo esto que el alumno llegara a una comprensión más profunda de R.

7. Existe la posibilidad, con cursos o alumnos buenos, de desarrollar una investigación a través del concepto de límite de sucesiones Por ejemlo, definir punto de adherencia de A, como punto que es límite de una sucesión formada por elementos de A, y demostrar propiedades relativas a la adherencia. Y, en esta misma línea, estudiar, por ejemplo, los compactos en cada topología. Tanto estos como otros conceptos, deberían definirse a través de sucesiones.

8. En cuanto a los peligros de la calculadora, puede verse el artículo de J.KUNTZMANN publicado por la A.P.E.M. francesa, o su libro "Apport de l'informatique á l'enseignement mathématique", de CEDIC, París 1974. Advierte Kuntzmann del peligro de conjeturar con pocos valores de n, como ocurre con los siguientes ejemplos :

1.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{100^k}{k!}$$

n	a_n
0	1
1	-99
2	4901
3	-161765,66...
4	4004900,66...
5	-79328432
.	....

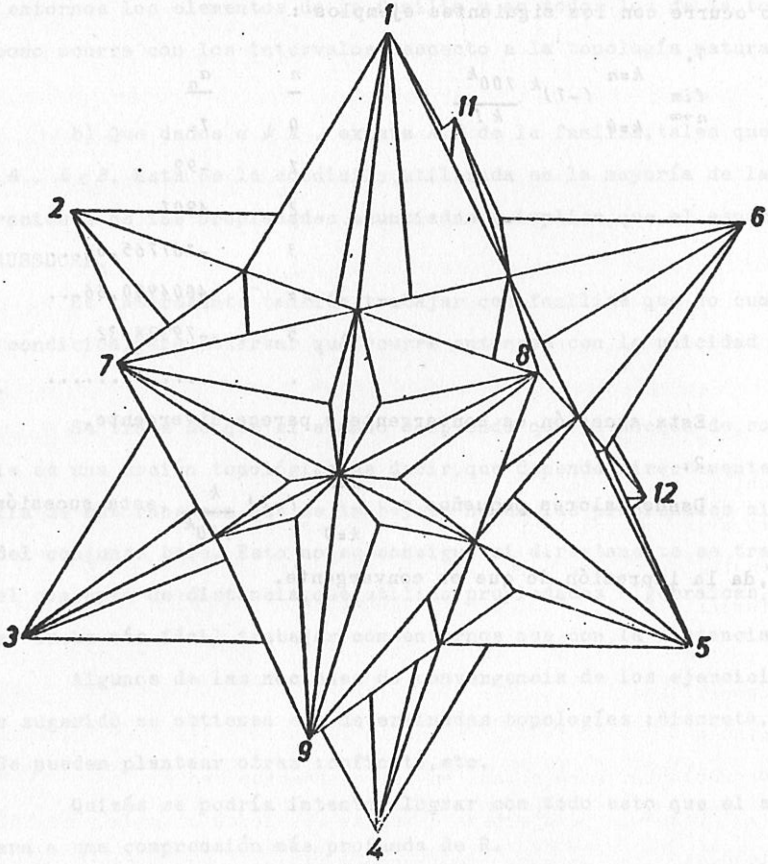
Esta sucesión es convergente, y parece divergente.

2.

Dando valores pequeños a $\sum_{k=0}^{k=n} (-1) \frac{k!}{100^k}$, esta sucesión, sin serlo, da la impresión de que es convergente.

Soc. Canaria de Profs. de Matematicas "Isaac Newton"

POLIEDROS REGULARES Y ARQUIMEDIANOS



POR

LUIS GARCIA FERNANDEZ

Catedrático

EDITA: SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMATICAS

TIRADA ESPECIAL EN HOMENAJE AL AUTOR

MAYO 1.981