EL TRIÁNGULO DE PASCAL, UNA FUENTE DE INSPIRACIÓN (I)

Florencio Brook

Al comienzo de la segunda mitad del siglo XVI y después de la muerte de su autor, el matemático italiano Nicolás Tartaglia, fue publicado en un **Tratado general sobre el número y la medida** una tabla de números en formato rectangular, que tenía determinadas propiedades internas.

Un siglo más tarde, esta tabla fue reelaborada por el matemático francés Pascal, que cambió la disposición dándole forma de triángulo, y desde entonces se conoce como **triángulo aritmético, de Tartaglia o de Pascal.**

Como nosotros partimos de la base de que este triángulo es suficientemente conocido, incluso por los medianamente iniciados en el arte de las matemáticas, no vamos a "demostrar" nada referente a su construcción, sino a "utilizar" algunas de sus muchas propiedades y relaciones numéricas para resolver una serie de problemas en los que dicho "rectángulo" o "triángulo" tiene una indudable aplicación.

Vamos a utilizar, según convenga, ambos formatos, principalmente la disposición rectangular.

En el cuadro que damos a continuación incluimos nuestra numeración de las columnas, y las fórmulas que hemos obtenido y que nos permiten averiguar el valor de cualquier cantidad de la tabla sabiendo el número de la fila y el de la columna donde se encuentra.

Los símbolos que se incluyen son fácilmente identificables:

n = número natural o indicativo de la fila

Nfc = cantidad que aparece en una fila y columna determinadas por f y c, respectivamente

$N_\Delta =$ número triangular

$\Sigma\binom{n}{1} n_\Delta$ = suma de números triangulares desde el 1 hasta el que aparece en la fila n

Σ_2, Σ_3 .... corresponden a la suma de las columnas inmediatamente anteriores

Rectángulo de Tartaglia

Columnas		1	2	3	4	5	6	7	.	.	.	.	.
	n	n_Δ	$\Sigma_1^n n_\Delta$	Σ_2^n	Σ_3^n	Σ_4^n	.	.	.	.	.	.	.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1.001	1.365	1.820	2.380
1	6	21	56	126	252	462	792	1.287	2.002	3.003	4.368	6.188	8.568
1	7	28	84	210	462	924	1.716	3.003	5.005	8008	12.376	18.564	
1	8	36	120	330	792	1.716							
1	9	45	165	495	1.287	3.003							
1	10	55	220	715	$\boxed{2.002}$	5.005							
1	11	66	286	1.001	3.003	8.008							
1	12	78	364	1.365	4.368	12.376							
1	13	91	455	1.820	6.188	18.564							
1	14	105	560	2.380	8.568								
1	15	120	680	3.060	11.628								
1	16	136	816	3.876	15.504								

Filas

$N_{f1} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!}$ ó $\frac{n(n+1)}{2}$

$N_{f2} = \frac{(n+2)!}{(n-1)!\,3!}$

$N_{f3} = \frac{(n+3)!}{(n-1)!\,4!}$

$N_{f4} = \frac{(n+4)!}{(n-1)!\,5!}$

$N_{fc} = \frac{(n+c)!}{(n-1)!\,(c+1)!}$

f.– fila

c.– número de la columna a partir de la de los números triangulares a la que adjudicamos valor 1

ej.: el número perteneciente a la fila 10 de la 4ª columna

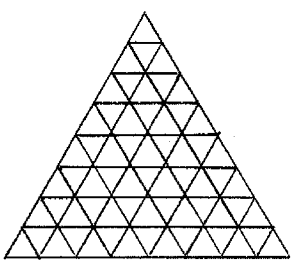
$N_{f10c4} = \frac{(10+4)!}{(10-1)!\,5!} = 2002$

PROBLEMA 1

Dividimos los lados de un triángulo (sea o no equilátero) en el mismo número de partes y unimos los puntos que indican estas divisiones trazando paralelas a los tres lados.

a) Si las partes en que se ha dividido los lados son ocho, averiguar el número de triángulos de cualquier dimensión que se observa en el primero (ver dibujo).

b) Generalizar



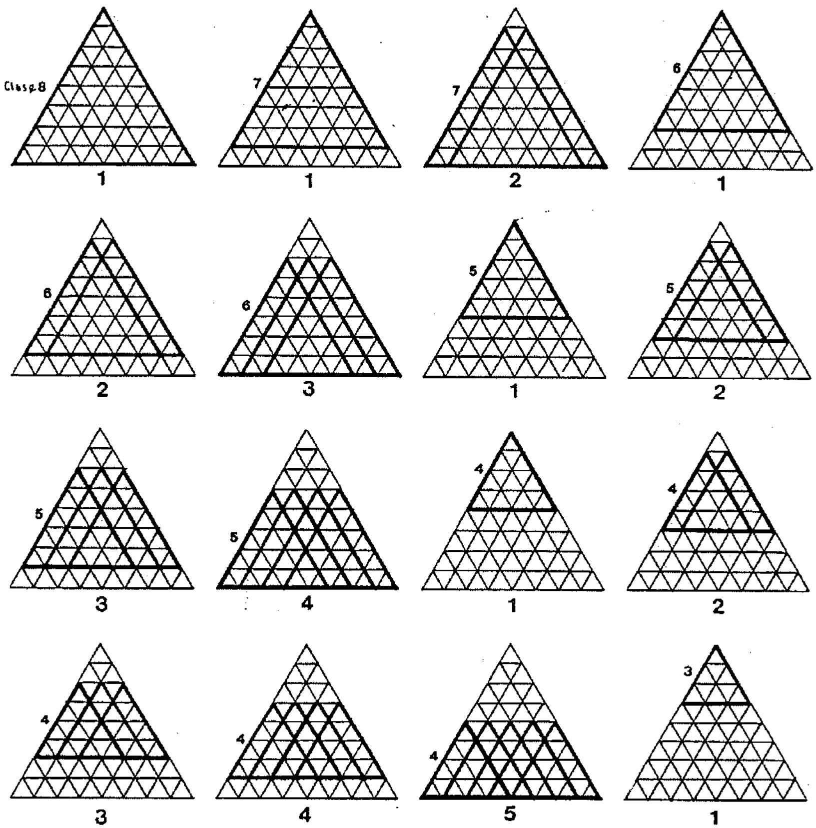
Solución

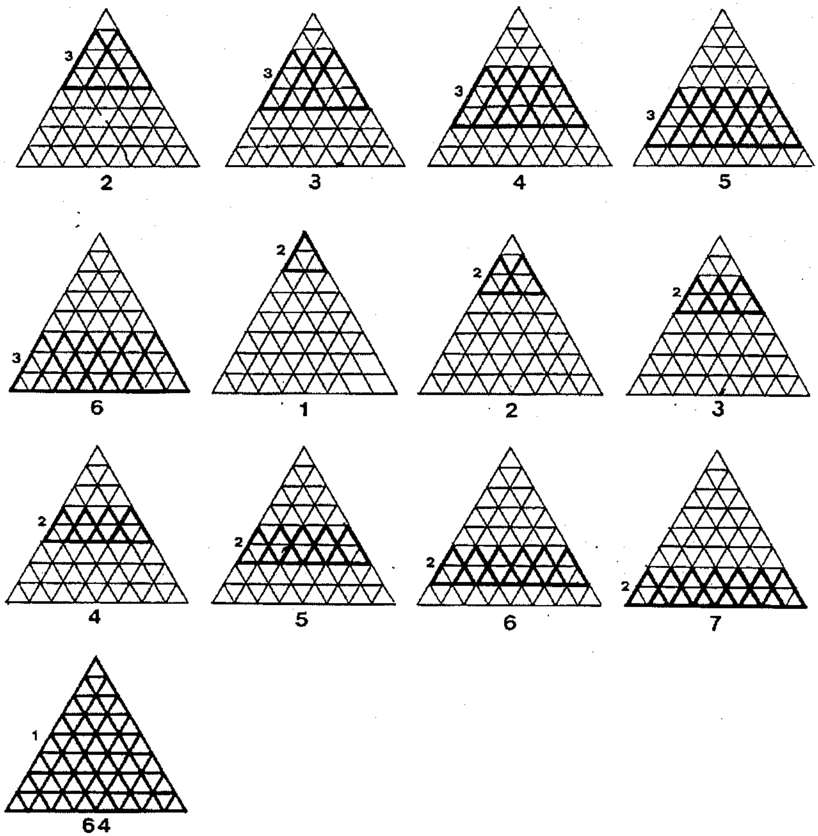
En caso de desconocer una fórmula que nos de la solución, y tratándose de un número de partes relativamente pequeño en este caso, procederíamos de una forma sistemática y exhaustiva a obtener gráficamente el resultado de la siguiente manera:

Llamemos triángulos de la clase 1, 2, 3, ... hasta 8, a los que constan de 1, 2, 3, ... hasta 8 divisiones de las efectuadas en el triángulo inicial.

De la clase 1 hay 64, como puede verse en el dibujo del enunciado (8^2).

Los triángulos de las clases 8, 7, 6, 5, 4, 3 y 2 se presentan en su totalidad en los dibujos siguientes:





Al hacer el recuento sobre los dibujos, veremos que hay:

1 de 8
3 de 7
6 de 6
10 de 5
15 de 4
21 de 2
y 64 de 1

En total, 148

Con esto quedaría resuelta, de forma no demasiado satisfactoria, la cuestión a), ya que si el número de divisiones fuera bastante mayor, la suma de los triángulos obtenidos de cada clase resultaría demasiado engorrosa y mucho más su representación gráfica.

Sin embargo, si observamos la columna de la izquierda del anterior recuento, vemos que los números 1, 3, 6, 10, 15, 21 y 28 que aparecen en la misma son los siete primeros números triangulares (columna 1) y su suma, 84, está a la derecha del 28 en la columna 2.

Por tanto, una primera forma de solución del problema sería:

$$\frac{(7+2)!}{(7-1)!3!} + 8^2 = 84 + 64 = 148$$

Una segunda forma de solución nos la daría el hecho de que 148 (en el caso que nos ocupa) es igual a 120 (octava fila de la columna 2) y 28 (séptima fila de la columna 1), de manera que la fórmula general quedaría:

$$\boxed{N = \frac{(n+2)!}{(n-1)!3!} + \frac{(n-1)n}{2}}$$

Dando a n el valor 8, tendríamos para el problema que tratamos de resolver:

$$\frac{(8+2)!}{(8-1)!3!} + \frac{7 \cdot 8}{2} = 120 + 28 = 148$$

Si, por ejemplo, el número de divisiones efectuadas en el triángulo hubiera sido 100, el número de triángulos de cualquier tamaño posible que podrían observarse será:

$$\frac{(100+2)!}{(100-1)!} + \frac{99 \cdot 100}{2} = 176650$$

PROBLEMA 2

Averiguar que números triangulares son también cuadrados perfectos.

Como punto de partida tomemos el número 36, que es el primero de la serie de números que cumple la condición. (Prescindimos del 1 que también la cumple).

El número triangular responde a la fórmula

$$N = \frac{n(n+1)}{2}$$

y el 36 es el número triangular de 8 filas

$$\frac{8 \cdot 9}{2} = 36 \ , \ \text{y además} \ , \ 36 = 6^2$$

Vamos a representar dicho número como triangular y como cuadrado perfecto.

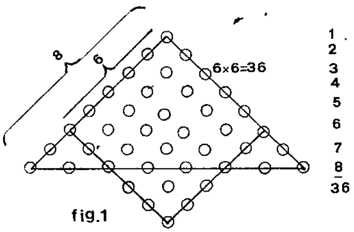


fig.1

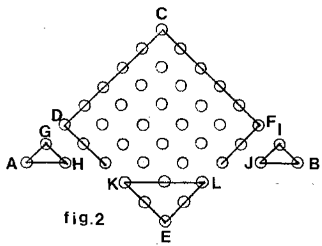


fig.2

Como vemos en la fig. 2, para que el número de elementos del cuadrado DCFE sea el mismo que el del triángulo ABC, debe verificarse que la suma de los elementos de los números triangulares AHG y BIJ sea igual al número de elementos del número triangular KLE, para que cualquier número triangular (en este caso ABC = 36) participe a su vez de la cualidad de cuadrado.

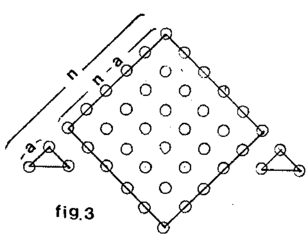


fig.3

Completemos los datos anteriores llamando **a** al número de elementos de un lado del triángulo no perteneciente al cuadrado; **n** será el número de elementos de un lado cualquiera del triángulo, y, por tanto, **n-a** el lado del cuadrado.

FÓRMULAS A UTILIZAR

Superficie del cuadrado: $(n-a)^2$.

Número triangular de lado n (realmente número de elementos de ese triángulo):

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

El problema, en principio, parece que queda solucionado resolviendo la ecuación

$$\text{(I)} \quad (n-a)^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Veamos que ocurre dando a n el valor 8 (que, como hemos dicho, es una de las soluciones):

$$(8-a)^2 = \frac{8(8+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad (8-a)^2 = 36$$

Por tanto,

$$8-a = \pm\, 6 \quad \Rightarrow \quad a = 8 \pm 6 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 14 \end{cases}$$

Observando los dibujos, parece una obviedad que n sea 8 y $a = 2$, cosa que ya sabíamos. Pero ha aparecido un nuevo valor de a (14). Sustituyendo este valor en (I)

$$(n-14)^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

se obtiene la ecuación $n^2-57n+392 = 0$, cuyas soluciones son:

$n_1 = 8$, $n_2 = 49$

El valor 8 de n ya lo conocíamos, pero nos ha aparecido un nuevo valor, 49, que cumple la condición, ya que

$$\frac{49 \cdot 50}{2} = 1225$$

y 1225, número triangular, es 35^2, es decir, un cuadrado perfecto.

Si reiteramos, sustituyendo n por 49, se obtiene:

$$(49-a)^2 = 1225 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 14 \\ a_2 = 84 \end{cases}$$

Como a = 14 ya lo sabíamos, el nuevo valor de a, 84, nos da, sustituyendo en (I), un nuevo valor de n, 288, que a su vez nos da un nuevo valor de a, 204.

Al llegar a este punto, llegamos también a la conclusión de que esta reiteración de operaciones, aunque sencillas, resulta engorrosa y lenta.

Vamos a representar esquemáticamente los resultados obtenidos.

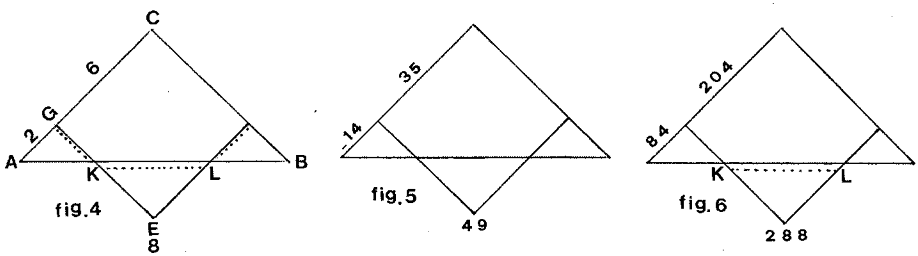


fig.4 fig.5 fig.6

Como anteriormente hemos dicho, el número triangular KLE contiene el doble de elementos que el AHG; por tanto, sabiendo el número de elementos de AG = número de elementos de AK, bastará averiguar el número de elementos de KL para obtener la fila AB del número triangular ABC.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

$$\frac{AG(AG+1)}{2} \cdot 2 \approx \frac{(KL)^2}{2}$$

$$\text{y } KL \approx \sqrt{2\,AG(AG+1)}$$

y, por tanto, $AB \approx KL + 2AG$

Para obtener el número exacto, basta con redondear por exceso.

Por ejemplo: si no conociéramos el 49, lo obtendríamos con

$$\sqrt{2 \cdot 14 \cdot 15} + 2 \cdot 14 = 48'4939...$$

y redondeando por exceso, 49.

Por otro lado, obsérvese que, en todos los casos, el siguiente AG es igual al anterior AB más el anterior GC.

Partiendo de:

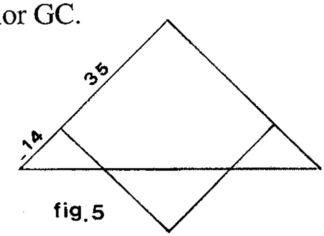


fig. 5

llegamos a:

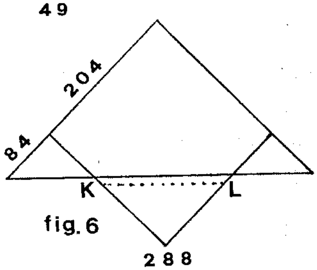


fig. 6

Haciendo lo siguiente:

$49 + 35 = 84$

$KL \approx 2 \cdot 84 \cdot 85 + 2 \cdot 84 \approx 287'4989...$

y redondeando, 288, y el número

$$GC = \frac{288 \cdot 289}{2} = 204$$

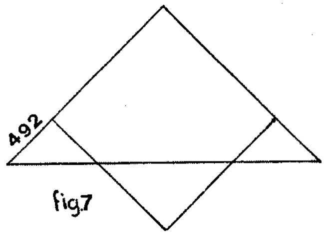


fig.7

El siguiente $AG = 288 + 204 = 492$

De esta forma podemos obtener los números triangulares que son a su vez cuadrados.

Los primeros son:

36 ; 1225 ; 41616 ; 1413721 ; 48024900 ;

1631432881 ; 55420693056 ; ... etc.