NUMEROS, 17 - 1988

GEOMETRIA EGIPCIA (y II)

J.A. García Cruz
C.E.I. de La Laguna (Tenerife)

En la primera parte de este trabajo (NUMEROS, 11, PÁGS. 41-48) analizamos algunos problemas del papiro RHIND relativos al cálculo de áreas de ciertas figuras planas (círculo, rectángulo, triángulo rectángulo y cuadrilátero) en el Egipto antiguo. Aquí abordaremos el estudio de algunos elementos geométricos de figuras sólidas (cilindro, pirámide, tronco de pirámide, semicilindro y semiesfera) que aparecen en el papiro RHIND y en el de MOSCÚ.

El papiro de Moscú, al igual que el papiro Rhind, está escrito en hierático y es un poco más antiguo que la copia de éste realizada por el escriba Acmés. Data, aproximadamente, del 1780 a.d.C.

Son estos los dos documentos matemáticos más importantes de la antigüedad egipcia que han llegado a nuestro tiempo. En ellos podemos ver que, aunque se trate de una matemática rudimentaria y práctica, los egipcios alcanzaron un nivel sorprendente en cuanto a conocimientos geométricos nada elementales.

VOLUMEN DEL CILINDRO (PROBLEMA 41 DEL P.R.)

Ejemplo de construcción de un granero redondo de 9 por 10 .-Toma 1/9 de 9, que es 1. Lo que queda es 8. Calcula 8 veces 8, que es 64. Obtén 64 veces 10, que es 640....

Observemos detenidamente los cálculos. Como se habla de un granero redondo, podemos suponer que 9 es el equivalente del diámetro de la -

base y 10 es la altura.

$1/9 \cdot 9 = 1$	$1/9 \cdot d$
$9 - 1/9 \cdot 9 = 8$	$d - 1/9 \cdot d$
$8 \cdot 8 = 64$	$(d - 1/9 \cdot d) \cdot (d - 1/9 \cdot d)$
$64 \cdot 10 = 640$	$(d - 1/9 \cdot d)^2 \cdot h =$
	$64/81 \cdot d^2 \cdot h =$
	$256/81 \cdot r^2 \cdot h$

Ya vimos en el problema 48 del P.R. (NUMEROS.11.PÁG.43) que los egipcios utilizaban la fórmula $(d - 1/9 \cdot d)^2$ para calcular la superficie de un círculo de diámetro d. El método empleado en el problema que ahora nos ocupa, establece claramente su conocimiento del cálculo del volumen de un cilindro mediante el producto de la superficie de la base circular por la altura. Igual que entonces es $\pi \approx 256/81 = 3,1605...$

PIRÁMIDES (PROB. 56 DEL P.R.)

Ejemplo de cálculo en una pirámide .- Ukha-thebt es igual a 360 codos , pir-em-us es igual a 250 codos. ¿ Cuánto vale su se-get?

Toma 1/2 de 360, que es 180. Busca el número que multiplicado por 250 dé 180. Ese número es 1/2 + 1/5 + 1/50 de codo.

Como un codo es igual a 7 palmos:

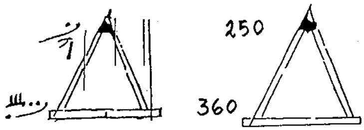
1	7
1/2	3 1/2
1/5	1 + 1/3 + 1/15
1/50	1/10 + 1/25

Su se-get es 5 1/25 palmos.

El escriba calcula primero el *se-get* de la pirámide en codos. Luego convierte su valor en palmos. Por los cálculos desarrollados, inferimos que

$$se\text{-}get = \frac{1/2\ ukha\text{-}thebt}{pir\text{-}em\text{-}us}$$

Pero, ¿qué es exactamente el *se-get* de la pirámide?, ¿qué es lo que mide? Veamos el dibujo que acompaña al texto en el papiro.



Como puede observarse, el escriba Acmés representa la pirámide mediante un dibujo en alzada. Los valores 250 y 360 aparecen, en hierático, en la parte superior izquierda e inferior izquierda, respectivamente.

De esta forma quiere indicar que 360 es el valor de una línea en la base de la pirámide (que llama *ukha-thelt*). ¿El lado del cuadrado base? ¿La diagonal del mismo?

Análogamente, 250 será el valor de otra línea no situada en la base (que llama *pir-em-us*). ¿Es la arista? ¿ Es la altura?

Como se ve, tenemos dos posibles líneas para cada valor. Para Eisenlohr y Cantor *ukha-thelt* es la diagonal y *pir-em-us* es la arista. Con esta interpretación, el *se-get* es el coseno del ángulo entre la arista y la diagonal de la base cuadrada de la pirámide. Sin embargo, para Borchardt el *se-get* es, sin lugar a dudas, la cotangente del ángulo que forman las caras y la base de la pirámide y, en consecuencia, *ukha-thelt* sería el lado de la base y *pir-em-us* la altura de la pirámide.

El problema que surge al construir una pirámide es mantener una pendiente uniforme en cada cara y la misma en las cuatro. Por tanto, es de mayor utilidad para el constructor conocer la cotangente del ángulo que forman las caras con la base, que el coseno del formado por las aristas y la base.

El *se-get* sería la razón entre el avance (desplazamiento horizontal) y la subida (desplazamiento vertical). Mide, por tanto, la variación del desplazamiento horizontal por unidad de deplazamiento vertical.

El escriba termina el problema pasando los codos a palmos. De esta forma, el *se-get* de la pirámide indica que por cada codo de desplazamiento vertical hemos de avanzar 5 palmos y cuarto. De aquí inferimos que utilizaban el codo para los desplazamientos verticales y el palmo para los horizontales, siendo un codo igual a siete palmos.

TRONCO DE PIRAMIDE (PROB. 14 DEL PAPIRO DE MOSCÚ)

Método de cálculo para una pirámide truncada.- Se te da una pirámide truncada con 6 codos de altura, 4 codos en la base y 2 en la parte alta.

Eleva al cuadrado 4 ; resulta 16.

Dobla ese 4 ; resulta 8.

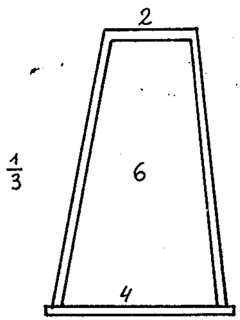
Eleva al cuadrado 2 ; resulta 4.

Suma 16 con 8 y con 4 ; resulta 28.

Calcula 1/3 de 6 ; resulta 2.

Multiplica 28 por ese 2 ; resulta 56.

¡56 es el resultado! Lo has calculado correctamente.



Para comprender lo que el escriba realizó, hagamos una doble transcripción de sus cálculos. Usaremos la siguiente notación para los números que aparecen en el enunciado : h=6 , a=2 , b=4.

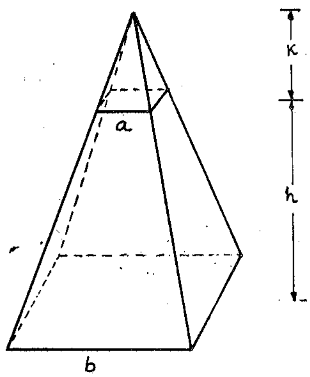
Aritmética:	Algebraica:
4 . 4 + 2 . 4 + 2 . 2	b . b + b . a + a . a
1/3 . 6	1/3 . h
28 . 2	$h/3\ (b^2 + ba + a^2)$
56	

El escriba nos muestra cómo calcular el volumen de un tronco de pirámide. Algo que los babilonios no sabían hacer correctamente (*).

(*) Utilizaban la fórmula $V=h/3(a^2 + b^2)$, donde h es la altura y a y b son los lados de los cuadrados.

En el supuesto de que los egipcios conocieran cómo calcular el volumen de una pirámide - no existe constancia de ello, al menos en forma de problema en los papiros conocidos -, podrían haber llegado a este resultado de la siguiente manera:

Al tronco de pirámide anterior, de dimensiones h, b y a, le añadirían una pirámide de base a y altura k. De esta forma, tendrían una pirámide de base cuadrada, lado b y altura h+k.

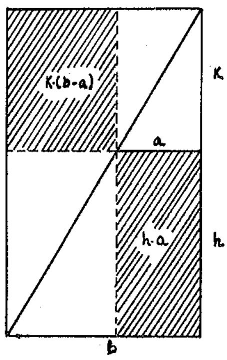


Para calcular el volumen del tronco de pirámide les bastaría con efectuar

$$1/3\ b^2\ (h + k) - 1/3\ a^2\ k =$$
$$1/3\ (b^2\ h + b^2\ k - a^2\ k) =$$
$$1/3\ (\ b^2\ h + k(b^2 - a^2)) =$$
$$1/3\ (\ b^2\ h + k(b-a)\ (a+b))$$

$$k(b-a) = ha$$

Observemos la siguiente figura



Los rectángulos rayados tienen la misma área, y uno de ellos, el superior izquierdo, tiene de área k(b-a). El área del otro es ah.

Por lo tanto,

$V_{\text{tronco de pirámide}} = 1/3\ h\ (b^2 + ab + a^2)$

AREA DE UNA SUPERFICIE CURVILINEA (PROB.10 DEL P.DE M.)

Método de cálculo de una cesta.- Se te da una cesta con una abertura y 4 1/2 de calida. Te pido que me des su superficie.

Calcula 1/9 de 9, pues la cesta es la mitad de un huevo. El resultado es 1.

Toma el resto, que es 8. Calcula 1/9 de 8.

El resultado es 2/3 + 1/6 + 1/18.

Ahora, calcula el resto que aueda de 8 al quitarle 2/3+ 1/6+ 1/18. El resultado es 7 1/9.

Multiplica 7 1/9, 4 1/2 veces. Ello resulta igual a 32.

Este es el área. Lo has hecho correctamente.

He traducido el enunciado del problema libremente, aunque procurando ceñirme al texto literal de la traducción al inglés realizada por R.J. Gillings.

El contenido de este problema ha suscitado una viva polémica sobre su significado, que podemos resumir en esta pregunta : ¿ es la cesta semicilíndrica o semiesférica?

Para un numeroso grupo de estudiosos de la Matemática antigua, la cesta tiene forma semicilíndrica; para otro, es una semiesfera. Si tuviera razón el último grupo, nos encontraríamos ante un resultado notable de la Matemática prehelénica. Más aún, los egipcios de la época faraónica se habrían adelantado a Arquímedes en cerca de 1500 años, lo cual es un hecho bastante sorprendente.

Hagamos un análisis aritmético-algebraico de los cálculos del problema. En la parte algebraica utilizaremos x para designar a 4 1/2.

$2 \cdot 4\ 1/2 = 9$	$2 \cdot x$
$1/9 \cdot 9 = 1$	$1/9 \cdot 2x$
$9 - 1/9 \cdot 9 = 8$	$2x - 1/9 \cdot 2x$

$1/9 \,.\, 8 = 2/3 + 1/6 + 1/18$

$8 - (2/3 + 1/6 + 1/18) = 7\ 1/9$

$7\ 1/9 \,.\, 4\ 1/2 = 32$

$1/9\ (2x - 1/9 . 2x)$

$(2x - 1/9 . 2x) - 1/9(2x - 1/9 . 2x =$

$8/9 \,.\, 8/9 \,.\, 2x$

$8/9 \,.\, 8/9 \,.\, 2x \,.\, x$

Según como se interprete la última expresión algebraica, así será la forma de la cesta. Veamos :

a) Sea d el valor del diámetro y h la altura (ambos tienen el mismo valor en el problema, 4 1/2). Entonces,

$$A = 8/9 \,.\, 8/9 \,.\, 2d \,.\, h =$$
$$1/2 \,.\, 256/81 \,.\, d \,.\, h ,$$

que corresponde a la fórmula para la superficie lateral de un semicilindro, con $256/81 \approx \pi$.

b) El valor 4 1/2 del problema corresponde al diámetro. Luego, $x = d$ y, por tanto,

$$A = 8/9 \,.\, 8/9 \,.\, 2\, d^2 =$$
$$2 \,.\, 256/81 \,.\, r^2 ,$$

que es la fórmula de la superficie de una semiesfera siendo, de nuevo, el valor aproximado de π la fracción 256/81.

CONCLUSIONES

. El equivalente egipcio de π era el número 256/81.

. Calculaban correctamente el volumen del cilindro, del prisma rectangular (prob. 44 del P.R., que no hemos analizado porque desde el punto de vista geométrico no reviste gran importancia) y del tronco de pirámide.

. Conocían y usaban una razón para la construcción de las pirámides equivalente a la cotangente de un ángulo.

. Por último, calculaban la superficie de un sólido curvilíneo, que para unos es un semicilindro y para otros una semiesfera.

BIBLIOGRAFIA

CHACE, Arnold B. - The Rhind Mathematical Papyrus - N.C.T.M, 1979

GILLINGS, Richard J. - Mathematics in the Time of the Pharaons - Dover, 1982.

HEATH, Thomas L. - A History of Greek Mathematics, Vol. 1 - Dover 1981

SOC. CANARIA DE PROFS. DE MATS. "ISAAC NEWTON"

SIXTH INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION

International Commission on Mathematical Instruction

BUDAPEST

Wednesday July 27 to Wednesday August 3, 1988

PROGRAM

The major activities of the Congress will be organized in the following framework:

1. Plenary sessions
2. Action groups
3. Theme groups
4. Topic areas
5. International study groups
6. Survey lectures
7. National presentations
8. Fifth day special: Mathematics, Education and Society
9. Short oral communications
10. Poster presentations
11. Projects