HEMEROTECA

por Juan A. García Cruz

HEMEROTECA

Revistas recibidas en nuestra sociedad desde Abril a Octubre:

1. Boletín de la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública. (A.P.M.E.P.) Francia.
   Nos: 329 y 330.
2. The Matyc Journal.
   Vol 15: Nos 1 y 2.
3. Mathematical Digest.
   Nos 43 y 44.
4. The Two Year-College Mathematical Journal.
   Vol 12: Nos: 2 y 3.
5. Mathematics Magazine.
   Vol 54: Nos: 2, 3 y 4.
6. Pythagoras.
   Vol 20: Nos: 3, 4 y 5.
7. Math Jeunes.
   3er año: Nos: 9 y 10.
8. Teching Statistic.
   Vol 3: No: 2.
9. The American Mathematical Monthy.
   Vol 88: Nos: 3, 4, 5 y 6.

The Two Year-College Mathematical Journal.
D.J. Albers (editor)
Mathematical Association of America
TYCMJ Subscriptions Department
The Mathematical Association of America
1529 Eighteen St. N.W.
Washington D.C. 20036
USA

Precio de Suscripción anual: 18$
Idioma: Inglés.
Periodicidad: Cuatro veces al año/ Vol. 12 año 1981.
La publicación está dirigida principalmente a profesores de los dos primeros años de Universidad. Algunos artículos pueden ser útiles para nuestro C.O.U. Los principales campos de los que se ocupa son: Combinatoria, teoría elemental de números, geometría, historia, pedagogía, filosofía, resolución de problemas, estadística y matemáticas técnicas.

He aquí algunos de los artículos aparecidos recientemente:

- ***Triangular Squares***. Bill Leonard. Harris S. Shultz. Vol 10 Nº 3, June 1979. Pag 169-171.
- ***A Quick Test for Rational Roots of a Polinomial***. Leo Chosid Vol 11, Nº 3, June 1980. pág. 205-206.
- ***Fixed Point Iteration – An iteresting way to being a Calculus Course.*** Thomas Butts. Vol 12. Nº 1, Jannuary 1981, pág 2-7.
- ***Distance from a Point to a line***. K.R.S. Sastry. Vol 12, Nº 3 June 1981, Pag 146-147.
- ***Who needs those mean-value theoremn any way?*** Ralph P. Boas. Vol 12, Nº 3. June 1981, pág 178-181.
- ***Visual application of*** $\sin(a_1 + b_2) = \sin a_1 \cos b_2 + \operatorname{Cos} a_1 \sin b_2$. Gerald E. Gannon. Vol 12, Nº 3. June 1981, pág. 206.

El número 2 del Volumen 12, Marzo de este año está dedicado monográficamente a la discusión de los que hoy se entiende por una demostración en Matemáticas. Su contenido es el siguiente:

Mathematical Proof: What it is and What is Ought to Be, Peter Renz.
A Disgression on Proof, Yu I. Manin.
On the History and Solution of the Four-Color Map Problem, John Mitchem.
Euclide's Elements – excerpts from a 1660 edition.
The Nature of Proof: Limits and Opportunities, Kenneth Appel and Wolfgang Haken.
Computer Use to Computer Proof: A Rational Reconstruction, Thomas Tymoczko.
An Informal History of Formal Proofs: From Vigor to Rigor? Klaus Galda.

PROBLEMAS PARA LA PRIMERA FASE DE LA XVII OLIMPIADA MATEMATICA

Exámenes de C.O.U. (Selectividad)

PROBLEMAS PARA LA PRIMERA FASE DE LA XVII OLIMPIADA MATEMATICA

(Distrito Universitario de La Laguna)

1ª Sesión

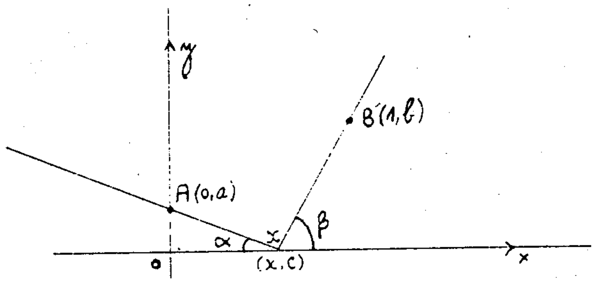
1.– Dada la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, determinar la tangente a la misma que pasa:
a) por el punto (1,1); b) por el punto (1,0); c) por el punto (0,5).
¿Cuántas soluciones hay en cada caso?

2.– Determinar la curva que describe el afijo del complejo z para que el argumento del producto

sea de 45° $(z - 1) . (z - 2)$

3.– Hallar $f'(x)$, si $f(x) = |x|^3$. Hallar además $f''(x)$. ¿Existe $f'''(x)$ para todo x?

4.– Dado un sistema rectangular de coordenadas, se traza una recta desde el punto A (o,a) hasta un punto del eje horizontal Ox y desde este último punto, otra al B (1,b). (Véase la figura):



Demostrar que la longitud total de la quebrada AXB es mínima cuando los ángulos α y β son iguales.
Dar una demostración geométrica y, a continuación, probarlo analíticamente.

2ª Sesión

5.- Demostrar que todos los números de la sucesión:

$$49,\ 4489,\ 444889, \ldots$$

obtenidos intercalando 48 en el medio del número que le precede, son cuadrados perfectos.

6.- Se construyen cuadrados sobre los catetos *a* y *b* de un triángulo rectángulo de hipotenusa *c*. Probar que las rectas (que no sean catetos) que unen cada extremo de la hipotenusa con el vértice del cuadrado opuesto, se encuentran en un punto perteneciente a la altura correspondiente a la hipotenusa.
(Sugerencia: Tómense los catetos del triángulo como ejes de coordenadas).

7.- Demostrar que, cualquiera que sea *m*, la función polinómica:

$$f(x) = x^3 - 3x + m$$

no tiene nunca dos raíces en el intervalo [0,1].

8.- Un hombre tiene tiempo para jugar ruleta cinco veces. Gana o pierde un dólar en cada juego. El hombre empieza con dos dólares y dejará de jugar a la quinta vez si pierde todo su dinero o si gana tres dólares (esto es, complete 5 dólares). Hallar el número de maneras en que puede desarrollarse el juego.

EXAMENES DE COU (Selectividad)

Opción A

a) En una familia, la probabilidad de que el mayordomo abra la puerta es 1/2, la probabilidad de que abra la doncella es 3/4, y la probabilidad de que coincidan al abrir es 2/3. Se pide: 1) ¿Cuál es la probabilidad de que no abra ni la doncella ni el mayordomo? ¿Cuál es la probabilidad de que abra la doncella pero no el mayordomo?

b) Calcular mediante una integral el área del círculo cuya circunferencia tiene de ecuación:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1$$

c) Enunciar e interpretar geométricamente el teorema de Bolzano. ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función:

$$f(x) = x - x^3 \text{ en el intervalo } [-1,0]?$$

Razona la respuesta y, en caso afirmativo, encontrar el punto interior a dicho intervalo a que se refiere dicho teorema.

Opción B

a) Determinar el valor de k de forma que el sistema:

$$\begin{aligned} kx + 2z &= 0 \\ ky - z &= k \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}$$

sea: 1) Compatible; 2) Incompatible.

b) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los tres vectores:

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad , \quad \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{c} = 2\vec{j} + \vec{k}$$

c) Dado el plano determinado por los puntos P_1 (0, 1,0), P_2 (2,0,0), P_3 (1,0,3), hallar la ecuación de la recta que pasa por P^3 y es perpendicular al plano.

Opción A

a) Demuéstrese que si f(x) es contínua en un intervalo cerrado [a,b] y *k* es un número real comprendido entre f(a) y f(b), existe al menos un punto *c* interior a dicho intervalo en el que f(c) = k.

b) Desarrollar y = sen x por la fórmula de Mac-Laurin, escribiendo el término complementario correspondiente a la cuarta derivada.

c) Frecuencia absoluta y relativa. Su relación con la probabilidad.

d) Lanzamos al aire dos dados simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus caras sea inferior a 5? ¿Y de que sumen 8?

Opción B

a) Hallar el punto simétrico de (–1, 2, 0) respecto de la recta:

$$\begin{cases} 2x + z - 4 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

b) Ecuación del plano que contiene a la recta $x = y = z$ y es perpendicular al plano $x + y - z - 1 = 0$.

c) 1) Escribir si es posible, un sistema de vectores que sea linealmente independiente y que no sea generador.
2) Obtener la matriz inversa de la matriz.

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

y el adjunto del elemento a_{23}.

Opción A

a) Desarrollar la función $y = \ln(1 + x)$ por la fórmula de Mac-Laurin, escribiendo el término complementario correspondiente a la cuarta derivada.

b) Area limitada por las curvas:

$$x^2 = 4y, \qquad x^2 = y + 3$$

c) Sea A el suceso correspondiente a la aparición de un número primo al lanzar un dado, B el suceso de aparición de un número par y C el suceso de aparición de un número impar. Se pide:

$$P(A \cap B \cap C); \; P(\bar{A} \cap B); \; P(\overline{B \cap C})$$

Opción B

a) Indicar qué posición especial respecto a los ejes tienen los planos en que uno o dos de los coeficientes A, B, C, D, de la ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$ son nulos.

b) Se pide la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 $(x_1, y_1,$

z_1) y P_2 (x_2, y_2, z_2) y está contenida en el plano $z = 0$.

c) Discutir el sistema:

$$\begin{aligned} z - x + ky &= 0 \\ k\,x - y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

para que admita solución distinta de la trivial, resolverlo para $k = -1$.

Opción A

a) Dada la aplicación f: $R^3 \rightarrow \bar{R}^4$
definida por:
$f(x, y, z) = (x, x+y, y-z, z)$
Comprobar si es aplicación lineal y, en caso afirmativo, hallar su núcleo.

b) Obtener el área del triángulo de vértices A (0,1,2), B (2,1,1) y C (3, 2, 3). Determínese así mismo la ecuación del plano que contiene a ese triángulo.

c) Estudiar las posiciones relativas de dos rectas en el espacio.

Opción B

a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente.
¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $y = \sec x$ en el intervalo $[0, 2\Pi]$? Razónese la respuesta. En caso afirmativo, encontrar el punto interior a dicho intervalo al que hace referencia dicho teorema.

b) Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos\ x}}{x^2} \quad ; \quad \int_0^1 \text{arc tag}\,x\,dx$$

c) Probabilidad condicionada. Sucesos dependientes e independientes.
De una familia con tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que los tres sean varones? ¿y de que, a lo sumo dos sean varones?

Opción A

a) Demostrar que la función $f(x) = x + \text{sen } x - 8$ es contínua en un intervalo y apoyándose en el teorema de Bolzano, probar que existe al menos un valor *c* tal que $f(c) = 0$.

b) Representar la siguiente curva:

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

c) Una clase consta de veinte hombres y veintiocho mujeres, de los cuales la mitad de hombres y la mitad de mujeres tienen los ojos verdes. Hallar la probabilidad de que una persona escogida al azar:
1) Sea hombre de ojos verdes.
2) Sea mujer o tenga los ojos verdes.

Opción B

a) Obtener e simétrico del punto P (2, 1, 0) respecto del A (1, 0, –3). Determinar así mismo la ecuación del plano que pasando por P, sea perpendicular a la recta que une P con A.

b) Definir matrices traspuesta, diagonal y triangular. Obtener la matriz inversa de

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

c) Utilizando el concepto de característica de una matriz, se pide:
1) ¿Qué sistema de ecuaciones lineales determinan tres rectas distintas en el plano que pasan por un punto?
2) ¿Qué sistema de ecuaciones lineales determinen tres planos del espacio que no tengan puntos comunes pero que se corten dos a dos?

Opción A

I) Representar gráficamente la funcion

$$y = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$$

II)

a) Discutir el siguiente sistema para los distintos valores de :

$$\begin{aligned} \lambda x + y &= 1 \\ 2x + (\lambda + 1)y &= 2 \\ x + \lambda y &= 1 \end{aligned}$$

b) Se pregunta cómo varía el producto A.B de las matrices A y B, si:
   1) Se permutan las i-ésima y j-ésima filas de la matriz A.
   2) A la i-ésima fila de la matriz A se le agrega la j-ésima multiplicada por un número k.

Opción B

a) Frecuencia absoluta y relativa, y su repercusión en la probabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de obtener los cuatro reyes al extraer sucesivamente y sin reemplazamiento, cuatro cartas de una baraja española? ¿Y la de obtener dos reyes y dos ases?

b) Se pide la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 0, 2) y corte perpendicularmente a la recta de ecuación:

$$r = \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases}$$

c) Dado los puntos A (0, 0, 1), B (0, 2,1), C (3, 1, 0) y D (1, 1, 1), hallar:
   1) Distancia del punto D al plano ABC.
   2) Area del triángulo ABC.

Opción A

I) Representar la curva:

$$y = \frac{x^3}{(1 + x)^2}$$

II)

a) Probar que si una función admite derivada finita en un punto x_0, dicha función es contínua en x_0.

b) Seis parejas de casados se encuentran en un salón. si se escogen dos personas al azar, hallar la probabilidad:
   1) De que sean esposos;

2) De que uno sea hombre y el otro mujer.

Opción B

I) Hallar un plano que sea paralelo al $2x - 2y + z + 9 = 0$ y diste $5/3$ del punto P $(-1, 2, 3)$. Determínese además el simétrico de este punto P respecto del plano $x = 0$.

II)

a) Determinar dos matrices de segundo orden X é Y que verifiquen el sistema:

$$3X + 4Y = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{Vmatrix} \quad ; \quad -2X + 3Y = \begin{Vmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{Vmatrix}$$

b) Enunciar el teorema de Rouché-Frobenius.