NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 33, marzo de 1998, páginas 3-12

Reflexiones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática

Alberto P. Calderón

Alberto P. Calderón es uno de los más eminentes analistas de nuestro tiempo. Junto con Antoni Zygmund, inicialmente su maestro, constituyó en la Universidad de Chicago la que ahora se suele llamar escuela de Calderón-Zygmund de análisis armónico. Ha recibido un gran número de premios y reconocimientos diversos por su gran obra, como el Premio Nacional de Estados Unidos, siendo el más reciente su Doctorado Honoris Causa por la Universidad Autónoma de Madrid.

No es frecuente tener la oportunidad de conocer de su misma fuente lo que sobre el aprendizaje y enseñanza de la matemática piensa uno de los más profundos matemáticos del siglo. En 1986, en Argentina, su tierra natal, la Unión Matemática Argentina (UMA), le pidió que aceptara pronunciar la Conferencia Rey Pastor de la Reunión Anual de la UMA. En ella Alberto Calderón explica, al hilo de los propios recuerdos infantiles en torno a su formación matemática, lo que significan para el aprendizaje de la matemática temas tales como la finalidad de la matemática, su método, el papel de la resolución de problemas, la abstracción, la demostración, la belleza de la matemática, la necesidad de la propia inmersión activa, ...

La revista Números quiere agradecer profundamente al Profesor Calderón, a quien nuestro país tanto debe en su actual pujanza con respecto a la investigación matemática, el permiso que nos ha concedido de reproducir este artículo que resultará muy iluminador para quienes nos dedicamos a la introducción de nuestros jóvenes en la matemática

Señoras y señores:

En primer lugar quiero agradecer a la comisión organizadora de esta reunión el haberme invitado a dar esta conferencia Rey Pastor.

Ello me da la oportunidad de rendir tributo al maestro cuya obra ha colo-

Éste es el texto completo de la conferencia Rey Pastor ofrecida por el Dr. Alberto P. Calderón durante la XXXVI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina y IX reunión de Educación Matemática, llevadas a cabo en las ciudades de Santa Fe y Paraná los días 8, 9, 10 y 11 de Octubre de 1986.

cado a la Argentina en el mapamundi matemático y de cuya enseñanza y estímulo he sido, como tantos otros, beneficiario directo.

Con motivo del Congreso Pedagógico he pensado que resultarán interesantes, y tal vez útiles, algunas reflexiones mías sobre el aprendizaje y enseñanza de la Matemática, fruto de mis experiencias, primero como aprendiz y luego como profesional de esa disciplina. Estas reflexiones están dirigidas principalmente a los profesores secundarios que tienen la pesada responsabilidad de dirigir la etapa tal vez más crítica y decisiva de la formación mental e intelectual de los jóvenes.

Se suele concebir la matemática como una estructura o edificio puramente lógico. También se reconoce que ella tiene un nada desdeñable valor estético que reside en la armonía y adecuación de los elementos y partes de esa estructura, y frecuentemente se nos aparece como un interesante juego intelectual. Además, esta disciplina persigue ciertos fines que es indispensable comprender para lograr su inteligibilidad.

Pero creo que esto no es uno de sus caracteres distintivos sino que lo comparten todas las disciplinas del pensamiento. Si observamos a los niños interrogar a sus mayores en su esfuerzo para comprender el universo veremos que hacen dos clases de preguntas: las del tipo "como" o "por qué" que atañen a la estructura diríamos lógica del universo, y las del tipo "para qué" que atañen a finalidades o aspectos teológicos del mismo. Y creo que este hecho no es consecuencia de un rasgo psicológico infantil, sino que lo es de una modalidad fundamental de nuestro pensamiento.

Y si esto es así, ello no sólo tiene interés filosófico y gnoseológico sino también práctico por sus consecuencias pedagógicas de importancia fundamental. Si algo tiene una finalidad, el conocimiento de ésta es indispensable para su comprensión. Pensemos en una herramienta, por ejemplo un destornillador, y preguntémonos si comprendemos qué es un destornillador. Probablemente se podría escribir cientos de páginas sobre destornilladores describiendo en gran detalle la naturaleza y sustancia de los mangos, las estructuras química, física y cristalina de sus partes metálicas, la descripción detallada de sus formas geométricas, los procesos de preparación y fabricación de sus elementos, etc. Pero luego de habernos informado de todo esto, ¿sabríamos ya qué es un destornillador?. Yo diría que no. Creo que para saberlo es necesario conocer la respuesta a una pregunta fundamental: "¿para qué sirve un destornillador?". Mientras no conozcamos esta respuesta nuestro conocimiento de los destornilladores será precario. Sólo esta respuesta hará posible saber qué es importante y qué es secundario en la naturaleza de los mismos, si es importante que el mango sea de plástico, de madera, metálico, etc., y que la parte metálica sea delgada o ancha, corta o larga, etc. Es decir su comprensión es sólo posible mediante la comprensión de su función o finalidad. Además, ésta nos permite jerarquizar nuestros conocimientos de aquéllos. Sin ella esta jerarquización es imposible.

Otro ejemplo opuesto a éste sería el de nuestra comprensión del sistema solar. En este caso no es necesario preguntarse "para qué" para lograrla pues no le conocemos función o finalidad alguna. Se puede imaginar su estudio con prescindencia total de interrogantes del tipo "para qué". Y hay una corriente de pensamiento que en mayor o menor medida auspicia este punto de vista con sus consecuencias pedagógicas. Lo que quiero es expresar mi convicción contraria a la de esta corriente. No creo que sea posible aprender matemática bien con prescindencia total de los fines que ésta persigue. Ya volveré sobre este punto, pero permítaseme ahora una imagen que muestra la razón por la cual este error es posible. Si estoy viajando por un país desconocido y recorriendo un largo trecho de camino sin cruces ni bifurcaciones, puedo no tener presente hacia donde me dirijo. Pero el saber esto será muy importante cuando enfrente la próxima encrucijada.

Vemos porqué el conocimiento de las finalidades tiene importancia tangible e inmediata en el aprendizaje. Es bien sabido que se aprende mucho mejor y más rápido si se lo hace buscando algo. Esto se aplica particularmente a la matemática y este hecho pasa a formar parte, tarde o temprano, de la experiencia personal directa que quiénes despliegan una actividad matemática prolongada. La presencia de una meta más o menos definida ilumina el camino a seguir, aviva el interés y permite valorar los distintos aspectos de la disciplina destacando lo primario y relegando lo secundario al lugar que le corresponde. Eliminada la meta, la marcha en la disciplina empieza a parecer un navegar a la deriva, sus distintas partes comienzan a adquirir un aspecto monótono e indiferenciado, y es así como la matemática aparece entonces como una acumulación de especulaciones difíciles y horriblemente aburridas. En relación a esto dice que parte importante de la solución a un problema es su planteamiento claro, es decir, saber claramente qué se propone uno.

En la enseñanza es entonces importante hacer comprender las metas cercanas y lejanas de un desarrollo teórico con la mayor claridad posible, es decir motivar. Por supuesto, esto es difícil a veces. Frecuentemente, por su falta de conocimientos, el aprendiz sólo puede comprender vagamente las metas alejadas. Pero aún esta comprensión vaga es valiosa, pues hace más fácil comprender la selección de metas intermedias, y las lejanas se van perfilando con claridad progresiva a medida que se adelanta. La experiencia de esto es semejante a la del explorador que explora terreno desconocido.

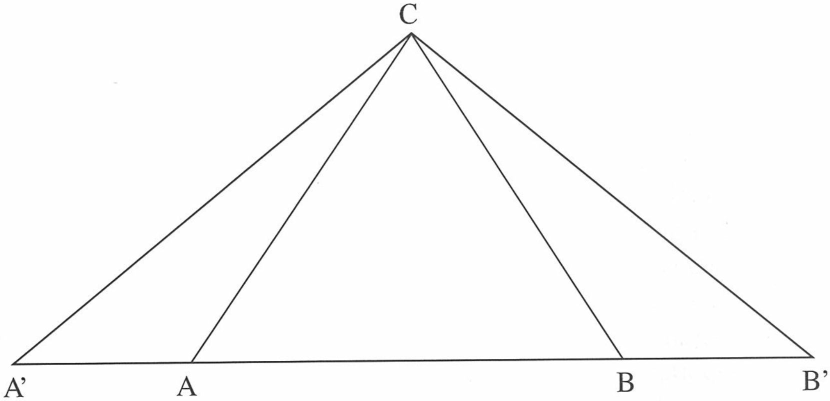
Por estas mismas razones resulta claro que más importante que acumular información es interiorizarse de métodos y saber qué propósitos tienen, es decir, saber donde parten y adónde llevan. Porque los métodos tienen una orientación, una dinámica, de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen. Pero también es posible estudiar la matemática a ciegas, en lo que a metas se refiere, y descubrir luego la orientación general del desarrollo teórico por retrospección. Esta forma de abordar su estudio está de moda entre quienes niegan la importancia de la orientación. Pero creo que esto es didácticamente erróneo y ciertamente lo es como método para guiar la investigación. Por último, la motivación es una de las fuentes más importantes del interés del estudiante y del estudioso y es, por tanto, un instrumento poderoso para despertar vocaciones. Aunque la matemática parece a veces una especulación desinteresada, si se observa su desarrollo histórico, se ve que aún sus capítulos más abstractos y aparentemente alejados de las aplicaciones no están desgajados de una red de interrelaciones que los une con aspectos más concretos de la misma que si están vinculados con las aplicaciones. Y son estas relaciones las que en última instancia justifican la existencia de aquellos capítulos. La Matemática es la reina de las ciencias, y toda buena reina debe servir a sus súbditos.

Dije antes que el aprender métodos es mucho más importante que acumular resultados o información, que es a lo que tiende la enseñanza llamada enciclopédica. ¿Cómo se estudian los métodos? Para responder a esto es necesario tener presente que los métodos son instrumentos para la consecución de fines. Los métodos son herramientas de trabajo, y así como es prácticamente imposible aprender un oficio o hacerse artesano sólo estudiando catálogos o exposiciones de herramientas y es necesario tomar éstas con las propias manos y usarlas, así también aprender bien matemática como observador pasivo. Hay que usar sus métodos y mejor aún, descubrirlos aunque sea sólo parcialmente. Así como las herramientas o instrumental no hacen de por sí al buen artífice, sino más bien la forma en que éste utiliza aquéllas, también es verdad que la acumulación de conocimientos no hace al buen matemático o científico, sino la forma en que éste los maneja o usa.

Por eso la resolución de problemas es un ejercicio tan importante. Él nos brinda una experiencia en profundidad una oportunidad de conocer y pulsar las dificultades de conocer los alcances del instrumental y conocimiento matemático que poseemos. Me refiero por supuesto a problemas no rutinarios o mecánicos cuya resolución exige iniciativa mental e ingenio. Vale mucho más ser capaz de resolver problemas no triviales que hacer acopio en la memoria de enunciados, teoremas, demostraciones, etc. Por ejemplo, si quieren ustedes saber en qué medida dominan la geometría plana tomen un libro como el de Rouche y

Comberousse y vean cómo se desempeñan resolviendo algunos de los muchos problemas que hay allí; o bien tomen un teorema cuya demostración han olvidado y vean si pueden encontrar una por sus propios medios. Si no lo logran, aún en casos relativamente sencillos, yo diría que tienen poco valor los enunciados y teoremas que han grabado en su memoria. Y esto vale para todas las ramas, elementales o avanzadas de la matemática. Además la resolución de problemas, insisto, de problemas no triviales, nos hace palpar el poder de nuestra imaginación que, controlada por el razonamiento riguroso, nos hace descubrir realidades cuya existencia no sospechábamos. La experiencia de esto impresiona las mentes jóvenes, y es de por sí capaz de despertar plenamente vocaciones latentes. En mi caso personal, fue así como despertó mi vivo interés por la matemática. Permítanme relatarles esta experiencia con algún detalle, pues creo que puede resultarles interesante pedagógicamente. Habiendo yo recién ingresado al ciclo secundario, tenía entonces un poco mas de doce años de edad, cometí, en cierta oportunidad, una travesura en presencia de mi profesor de matemática. Este se acercó y me anunció que sería sometido a una medida disciplinaria por razón de mi conducta. Luego se alejó, pero a poco volvió sobre sus pasos y acercándose nuevamente dijo:

"Oye, te voy a dar un problema de geometría. Si eres capaz de resolverlo tu conducta será perdonada". El problema era el siguiente: construir con regla y compás un triángulo isósceles del que se conoce la altura y la suma de su base y de uno de los lados restantes. Tras no poco esfuerzo, pude reducir el problema a lo siguiente: Si ABC es el triángulo buscado y AB es su base, prolonguemos la base en ambas direcciones y tomemos sobre su prolongación, y a ambos lados de la misma, los puntos A' y B' respectivamente de modo que A'A = B'B = 1/2AC = 1/2BC.



Evidentemente el triángulo A'B'C es también isósceles, su altura es conocida y su base es igual a la suma conocida, y por tanto es fácilmente construible. El problema queda entonces resuelto si se determina el punto A del segmento A'B'. Una propiedad de este punto es que su distancia a C es el doble a su distancia a A'. Pensé entonces que el lugar geométrico de los puntos con esta propiedad podría ser una circunferencia, y tras experimentar gráficamente llegué a la certidumbre de que lo era, pero no pude demostrarlo. Sólo hasta aquí pude llegar, y al mostrarle a mi profesor lo que había hecho, éste confirmó mi certidumbre sobre ese lugar geométrico y perdonó mi travesura. Lo que él se había propuesto era aprovechar la oportunidad que mi travesura le brindaba para estimular mi interés en la geometría, y esto lo logró de sobra. El problema me sedujo y despertó en mi una avidez por resolver más y más problemas semejantes. Este pequeño incidente puso claramente de manifiesto cuál era mi vocación y tuvo una influencia decisiva en mi vida.

También éste ilustra el impacto que la resolución de problemas puede tener en el desarrollo mental de los adolescentes. Por cierto que el profesor o maestro debe ejercer cautela al proponer problemas a sus alumnos, éstos no deben ser demasiado fáciles, pues entonces no se logra el fin buscado, ni tan difíciles que impidan al alumno dar un solo paso, pudiendo causar así desalientos injustificados. También aquél debe buscar que pongan de manifiesto lo que el conocido físico Eugenio Wigner llamó "el irrazonable e insólito poder de la matemática", que es uno de sus más grandes hechizos.

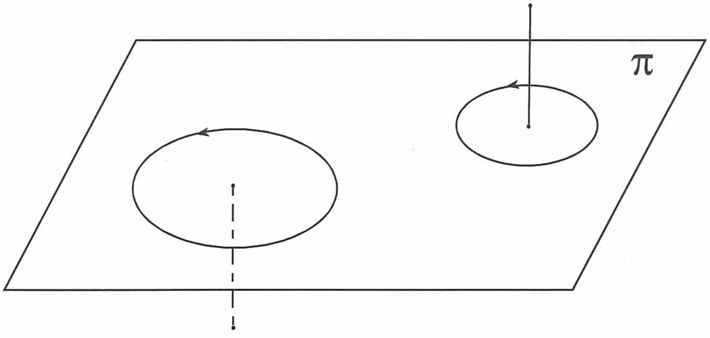
Volviendo a los métodos, he aquí otro modo de lograr su dominio: al estudiar un enunciado, tratar de encontrar uno mismo su demostración. Si esto no se logra después de haberlo intentado seriamente, buscar algunos indicios, en los libros o a través del profesor, de la marcha a seguir e intentar nuevamente, y así sucesivamente hasta lograrla. Esto conviene hacerlo, si no con todos, al menos con algunos de los enunciados. Por cierto que este método de estudio es más lento pero también infinitamente más fructífero que el puramente receptivo. Nos brinda el placer intelectual que deparan los juegos de ingenio y nos da, al menos en parte, la satisfacción del acto creador: nos hace sentir que estos enunciados, aunque descubiertos por otros, son en parte nuestros. También nos da una perspectiva de la disciplina imposible de lograr de otro modo. Todo esto, creo, da importancia al método desde el punto de vista pedagógico, que también la tiene desde otro punto de vista: en efecto, no pocas veces éste nos ha llevado a encontrar nuevas perspectivas de resultados conocidos que han facilitado su comprensión y que, a veces, han sido el primer paso en el desarrollo de nuevos e importantes capítulos de la matemática. Es decir, él nos da un conocimiento activo y dinámico, que es el que realmente vale. Es la capacidad de este tipo de conocimiento lo que distingue al cerebro de un libro. En el terreno de acumular datos nuestro cerebro no puede competir con el papel. Pero los que éste puede acumular son conocimientos petrificados, rígidos. Por otro lado, el enciclopedismo, el acumulamiento excesivo de conocimientos muertos atenta contra el buen funcionamiento de nuestra mente, dificulta su espontaneidad, originalidad y capacidad creadora que son sus cualidades más preciosas, que son cultivables y que todos poseemos en mayor o menor grado. En ese sentido es interesante observar que frecuentemente la erudición y la capacidad creadora están en relación inversa, y que es verdad que al científico no le interesa tanto conocer como descubrir. Para confirmar esto cito al biólogo Szent Gyorgyi, premio Nobel de Medicina quien dijo: " en una biblioteca podría adquirir en dos horas mayor cantidad de conocimientos que en mi laboratorio en un año. Sin embargo estoy siempre en mi laboratorio y rara vez en la biblioteca".

Otro aspecto de la matemática, que intimida y aleja a muchos es la abstracción. Creo que esto ocurre porque no se los ha guiado o introducido a ésta en forma adecuada. El abstraer es elevarse, es un poco como volar, y tiene el propósito de lograr una visión panorámica de los hechos especiales que es imposible de otro modo. Como en el caso del vuelo, este panorama puede ser muy bello y útil, y es en cierto modo la recompensa al esfuezo que la abstracción exige. Es importante entonces comenzar a dar esa recompensa al aprendiz tan pronto como sea posible para estimular su esfuerzo y para que no caiga en el desaliento.

Por último consideremos la belleza en la matemática. No todas sus partes o capítulos tienen igual belleza que, como dije antes, reside en la armonía y adecuación de sus elementos y también en la eficacia y poder de sus métodos. En algunos casos esta belleza es tal que virtualmente se convierte en un seductor atractivo. Por esta razón no conviene descuidar este aspecto de la misma, pues también él puede ser decisivo en el despertar de vocaciones y en el estimular el interés del estudiante.

Para terminar desearía mostrarles una construcción geométrica elemental, al alcance de estudiantes de los últimos años del ciclo secundario que, creo, exhibe claramente el poder seductor de la belleza matemática.

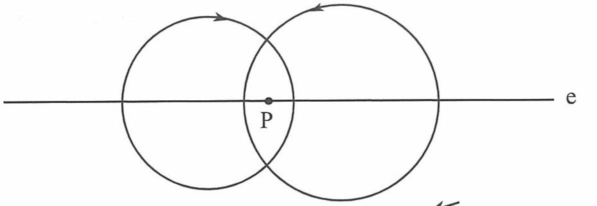
Consideremos un plano, o el plano, que llamaremos π, y en él circunferencias orientadas. A cada una de éstas asignémosle un punto en el espacio obtenido de la siguiente manera: sobre la perpendicular al plano π que pasa por el centro de la circunferencia tomemos el punto a distancia del centro igual al radio de la misma y de uno u otro lado del plano según sea una u otra la orientación de aquélla. Así habremos asignado un punto en el espacio a cada circunferencia orientada de π y, recíprocamente, una circunferencia orientada de π, a cada punto del espacio, y también a cada configuración espacial, una familia de circunferencias orientadas de π y recíprocamente.

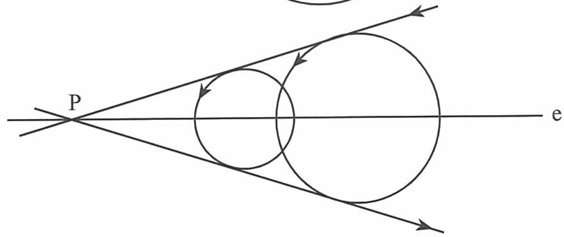


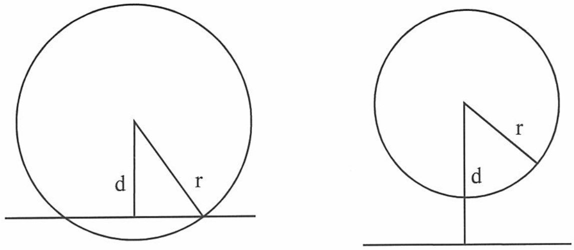
Evidentemente, propiedades de las configuraciones espaciales corresponderán a propiedades de las familias de circunferencias orientadas correspondientes y recíprocamente. Veamos cómo se puede así obtener fácilmente enunciados interesantes. Para ello consideremos primero algunas configuraciones espaciales sencillas y las familias de circunferencias correspondientes. Tomemos por ejemplo una recta e' en el espacio. Si e' no es paralela ni perpendicular a π y su intersección con π es P, entonces la familia correspondiente está formada por las circunferencias con centro en la proyección perpendicular e de e' sobre π, y a una distancia de P proporcional al radio de la circunferencia, y con una u otra orientación, según que el centro esté en una u otra de las circunferencias que P determina en e. Si el ángulo de e' con π es menor que medio recto, entonces las distancias a P de los centros son mayores que los radios correspondientes, y las circunferencias de la familia admiten dos rectas tangentes orientadas comunes (diremos que una circunferencia y una recta orientadas son tangentes si lo son como circunferencia y recta ordinarias y además las orientaciones coinciden en el punto de tangencia).

Tomemos ahora un plano π' no paralelo o perpendicular a π. Es fácil ver que la familia de circunferencias correspondiente es la de las circunferencias con centros a distancia de la recta e, intersección de π con π', proporcional a los radios correspondientes y con una orientación si sus centros están en uno de los semiplanos de π determinados por e, y la opuesta si están en el otro.

Las familias de circunferencias correspondientes a rectas e' y planos π' paralelos o perpendiculares a π se describen más fácilmente.







$d = cr\,,\ c < 1$ $\qquad$ $d = cr\,,\ c > 1$

Veamos ahora un enunciado que, en vista de que acabo de decir, es casi inmediato, pero no lo es de otro modo:

Consideremos tres circunferencias orientadas de π de radios desiguales y mutuamente exteriores. Entonces las intersecciones de pares de rectas orientadas que son tangentes comunes a pares de estas circunferencias, están alineadas.

Hay otros enunciados semejantes en los casos en que estas circunferencias no satisfacen las restricciones que éste impone a sus radios y posición relativa.

Veamos también cómo nuestra construcción nos lleva a una solución transparente del famoso problema de Apolonio: construir con regla y compás una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas. Para ello modificaremos ligeramente el mismo suponiendo que, tanto las circunferencias dadas como la que se busca, son circunferencias orientadas, adoptando también aquí la convención de que dos circunferencias orientadas son tangentes si lo son en el sentido ordinario y además sus orientaciones coinciden en el punto de tangencia. Entonces el problema clásico de Apolonio se reduce a los problemas modificados que se obtienen asignando orientaciones arbitrariamente.

Veamos primero a qué configuración espacial corresponde la familia de circunferencias orientadas tangentes a una dada. Es fácil ver que esta configuración es precisamente el cono recto cuyo vértice es el punto del espacio que corresponde a la circunferencia dada y cuyas generatrices están determinadas por el vértice y puntos de ésta.

Entonces es claro que la familia de circunferencias tangentes a dos circunferencias orientadas dadas corresponde a la intersección de los conos asociados a éstas. Además, la intersección de dos conos rectos con ejes perpendiculares a π está contenida en un plano. Esto se puede ver razonando con las familias de circunferencias correspondientes. Para lograr esto se puede suponer, desplazando verticalmente los conos si fuese necesario, que éstos están asociados a circunferencias orientadas que son tangentes en el sentido ordinario, pero que tienen orientaciones opuestas en el punto de tangencia. Entonces, usando el teorema de Pitágoras y la descripción que dimos de la familia de circunferencias correspondiente a un plano en el espacio, se puede ver que puntos de la intersección de los conos están en un plano que corta a π lo largo de la tangente común a las circunferencias dadas. Éste es un ejemplo de un enunciado de geometría del espacio que se puede demostrar sin mayor dificultad razonando con familias de circunferencias orientadas. Claro está que su demostración analítica es casi inmediata.

Con esto se ve claramente cómo obtener la solución buscada.

Sean C_1, C_2 y C_3, las circunferencias orientadas dadas y Y_1, Y_2 y Y_3 los conos correspondientes. La circunferencia, o circunferencias buscadas corresponden a puntos de la intersección de los tres conos y éstos se pueden obtener así: se forman los planos π_1 y π_2 y finalmente la intersección de esta recta con cualquiera de los conos. Todas estas circunferencias espaciales se pueden llevar a cabo en el plano con regla y compás, trabajando con las familias de circunferencias correspondientes, con lo cual queda resuelto nuestro problema.

Señoras y Señores, todos somos capaces de inventar y de descubrir en mayor o menos medida, y este aspecto activo y creador de nuestra menta debe ser cultivado en todo momento. Inclusive, yo diría, él nos brinda el único camino para lograr un conocimiento profundo de cualquier disciplina. Nuestra mente es naturalmente activa y no soporta la pasividad o inacción sin correr grave peligro de atrofia.