LA SERIE DE FIBONACCI : UNA FUENTE DE RECURSOS DIDACTICOS

Francisco Ruiz López
Ciudad Real

Uno de los problemas más importantes con que se enfrenta la enseñanza de las Matemáticas en los distintos niveles es, sin duda, la falta de conexión con la "realidad", la Naturaleza y otras ciencias.

Se podría pensar que la causa de esta desconexión es la abstracción que siempre lleva consigo cualquier concepto matemático, pero no hay que olvidar que precisamente la gran ventaja de la abstracción es la capacidad de generalizar, y así poder "aplicar" el concepto matemático a muchos casos.

Por otra parte, no deberíamos enseñar exclusivamente "aquello que sirve para algo" (concepción utilitarista de la enseñanza), sino también aquello que nos ayuda a descubrir la belleza que existe en tantas cosas - y las Matemáticas no son una excepción en este sentido- y que posiblemente el alumno no podría intuir sin la ayuda del profesor. No hay, pues, que buscarle una utilidad material a todo y desechar lo que no tiene una utilidad práctica inmediata. ¿Para qué sirve el arco iris, por ejemplo? ¿Acaso no es bonito y tendemos, al menos, a preguntarnos cómo se forma?

Creo que hay que conjugar bien la enseñanza de las Matemáticas desde ambos puntos de vista y, sobre todo, teniendo en cuenta que la inmensa mayoría de los alumnos no van a ser matemáticos, habría que evitar en lo posible la formalización excesiva en los primeros niveles del aprendizaje, tratando así de que vaya desapareciendo esa especie de fobia que sienten muchos estudiante hacia esta disciplina y procurar despertar el gusto por ella, ayudando a comprender que, como decía Galileo, "el libro de la Naturaleza está escrito en lenguaje matemático",y que a veces,esas cosas que "no sirven para nada" nos pueden ayudar a entender mejor las leyes que rigen la vida.

Existen multitud de temas matemáticos que nos ponen en contacto con la vida cotidiana,pero la serie de Fibonacci,además de servir de introducción al llamado "número de oro",tiene la ventaja de estimular el cálculo,tan importante en las enseñanzas básica y media,y permitir asimismo,la relación de cierto aspectos matemáticos con la Naturaleza,la música y el arte.

FIBONACCI(hijo de Bonacci) es el pseudónimo de un matemático italiano que nació en el año 1175 d.C.,cuya obra cumbre,en un momento de decadencia de las Matemáticas,fue *LIBER ABACI(El libro del ábaco)*,en el que habla de las ventajas de nuestro actual sistema de numeración.

El origen de la famosa serie numérica que lleva su nombre fue el conocido problema de los conejos : "Una pareja de conejos,al cabo del segundo mes de vida,produce una nueva pareja cada mes,que a su vez puede reproducirse a partir del segundo mes. ¿Cuántas parejas se obtendrán en un año?

La solución de este problema nos lleva directamente a la primera serie periódica en la historia de las Matemáticas. En ella,cada término es la suma de los dos anteriores : 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,....

1

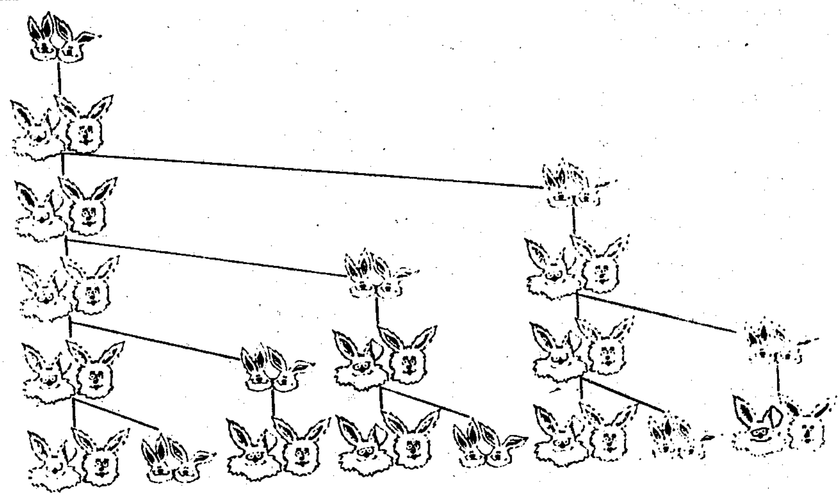
1

2

3

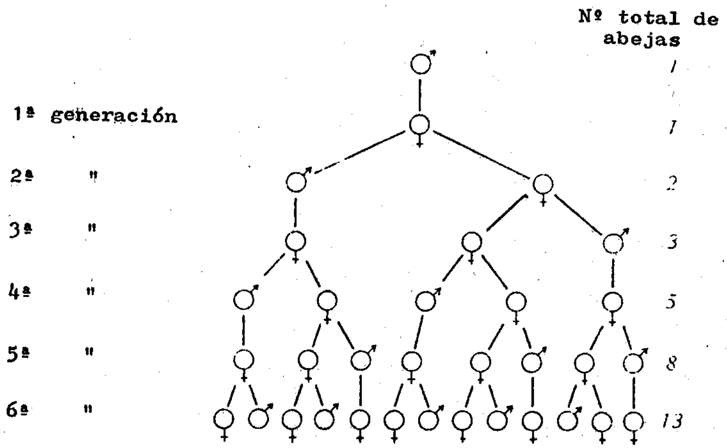
5

8

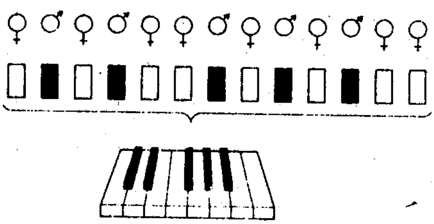


Otro problema que nos conduce de forma espectacular a la serie de Fibonacci es el del número de deccendientes en cada generación de una abeja macho o zángano:

Como es sabido, una vez inseminada la abeja reina por un zángano de otro enjambre, se queda en su colmena dedicándose a la puesta de huevos que ella misma va fecundando o no, dando origen así a abejas obreras o reinas, en el primer caso, y machos o zánganos en el segundo. Si observamos el árbol genealógico de un zángano, podemos ver como el número de abejas en cada generación es uno de los términos de la serie de Fibonacci.



Si nos detenemos en la sexta generación, por ejemplo, y representamos con una tecla blanca a la hembra y con una negra al macho, obtenemos curiosamente los 13 semitonos de la escala cromática (8 blancos de la escala principal y 5 negros de la pentatónica).



He aquí tres casos conducentes a la serie en cuestión y que nos pueden servir, por ejemplo, para ir introduciendo de forma intuitiva un con cepto tan importante en Matemáticas como es el de isomorfismo, sin más que comparar las tres figuras. Es claro que una pareja de conejos, una abeja y una tecla de piano no se parecen en nada, pero los ejemplos mencionados responden al mismo modelo. Así, podremos aprovechar para ir relacionando los números con las Ciencias Naturales, y hablar del comportamiento de las abejas, del porqué de la forma hexagonal de las celdillas de un panal de miel y su relación con las teselaciones del plano con polígonos regulares y el "principio de mínima acción" que rige las leyes naturales. Cumpliremos así uno de los objetivos en la actual enseñanza básica, el de la globalización.

Veamos ahora la presencia de la serie en cuestiones de Botánica:

Ciertas flores tienen un número de pétalos que suele ser miembro de esta serie numérica: con 3 pétalos tenemos, por ejemplo, el lirio; con 5 y 8, algunos ranúnculos y delphiniums, y las margaritas y girasoles suelen tener 13, 21, 34, 55 u 89.

La Filotaxia estudia, entre otras cosas, la disposición de las hojas a lo largo de los tallos de las plantas. Esta disposición se hace en la mayoría de los casos de forma que se permita una captación uniforme de luz y aire por parte de todas las hojas, siguiendo así una trayectoria ascendente y en forma de hélice.

Si tomamos una hoja de un tallo de una planta y contamos el número de hojas consecutivas (n) hasta encontrar otra hoja con la misma orientación, este número es, generalmente, un término de la serie de Fibonacci. Además, si mientras contamos dichas hojas vamos girando el tallo, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, por ejemplo, el número de vueltas (m) que hay que darle al tallo para llegar a otra hoja con la misma orientación es también de nuestra serie. Se llama orden o característica de dicho tallo a la fracción m/n y, como muestra la figura, es 1/2 en el olmo, 2/5 en el álamo, 3/8 en el sauce llorón y 8/13 en el almendro.

Si observamos una piña de un pino podemos ver que sus "hojas" se disponen siguiendo espirales en el sentido horario y en el contrario, de características 5/8 u 8/13 generalmente.

Olmo Alamo Sauce llorón Almendro

Antes de seguir hablando de la presencia de nuestra serie en la Naturaleza y las artes -para lo que tendríamos que introducir el "número de oro" -, veamos una forma de explotar, especialmente desde el punto de vista del cálculo, todo este posible interés que hemos podido despertar entre nuestros alumnos por este tema (*).

En primer lugar, podríamos pedirles que completen un cuadro como el siguiente, tomando como referencia el problema de los conejos, por ejemplo. Con este ejercicio les ayudaríamos a descubrir la ley de recurrencia de la serie :

Mes	Parejas pequeñas	Parejas adultas	Parejas totales
1º	1	0	1
2º	0	1	1
3º	1	1	2
4º	1	?	?
5º	?	?	?
6º	?	?	?

1. ¿ Qué relación existe entre el número total de parejas de conejos en un determinado mes con el número de parejas de conejos pequeños en ese mismo mes? ¿ Y con el número de parejas adultas?

2. ¿ Cómo es el número de parejas de conejos adultos en relación con el número total de parejas del mes anterior?

3. Compara el número de parejas de conejos pequeños en un mes dado con el de parejas adultas en el mes anterior.¿Qué observas?

4. ¿Cómo es el número de parejas de conejos pequeños en un mes dado en relación con el número de parejas totales de dos meses nateriores?

5. Observa que cada tercer término de la serie es divisible por 2. ¿Qué lugar ocupan los términos que son divisibles por 3? ¿Y por 5,8, 13,etc?

Dependiendo del nivel en que nos encontremos,podremos pedir a nuestros alumnos que nos den una fórmula general que exprese la propiedad que han encontrado.

6. Si dividimos por 4 los términos de nuestra serie y miramos los restos obtenidos,¿qué se observa en ellos?

En el campo del cálculo elemental podemos presentar una serie de ejercicios que,además,son útiles para desarrollar la capacidad de observación :

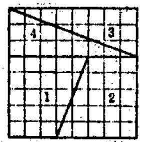
Podemos pedir a uno cualquiera de la clase que sume,en su cuaderno o en la pizarra,cuantos términos consecutivos de la serie quiera,empezando por el primero,y que nos diga solamente el último sumando a_n. Nosotros "adivinaremos" inmediatamente esa suma sin más que mirar el término a_{n+2} y restar una unidad. Después de ver varios ejemplos,teniendo la serie a la vista,los alumnos descubrirán el camino,pero,si no es así,podemos ayudarles con ejercicios como los siguientes:

7. Suma los 5 primeros términos y compara el resultado con el séptimo. ¿Con qué término hay que comparar la suma de los 6 primeros para obtener el mismo resultado que antes? ¿Puedes sacar alguna conclusión? ¿Sabrías adivinar la suma de los 15 primeros términos sin efectuar operaciones por escrito?

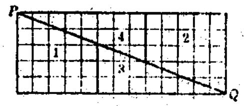
8. Esta serie cumple la propiedad siguiente

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} - a_n^2 = 1$$

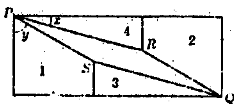
Para introducirla de forma amena,podemos pedir que dibujen en papel cuadriculado un cuadrado de 8 unidades de lado y que lo corten como se indica en la figura (a),para recomponer el rectángulo (b). Si nos fijamos, el área del rectángulo así construido es de $5x13=65$ unidades, mientras que el del cuadrado es $8x8=64$ unidades. ¿Dónde está la unidad que falta? La respuesta la podemos encontrar en (c), donde se aprecia que PQ no es en realidad una diagonal del rectángulo, sino un cuadrilátero cuyo área es, precisamente, una unidad que, repartida a lo largo de la diagonal, resulta imperceptible.



(a)



(b)



(c)

Fácilmente se puede comprender que como la propiedad es cierta para cualesquiera tres términos consecutivos de la serie de Fibonacci, cuanto mayores sean los términos -o menores los cuadraditos- , más difícil será detectar la pérdida de esa unidad. (**)

Otras propiedades de la serie pueden ponerse de manifiesto de la siguiente forma :

9. Eleva al cuadrado cada término de la serie y súmalos de dos en dos. ¿Cómo son los nuevos términos así obtenidos?

1 1 2 3 5 8 13 . . . .
1 1 4 9 25 64 169 . . . .
2 5 13 ? ? ? . . . . .

10. Toma tres números consecutivos de nuestra serie. Por ejemplo, 3, 5 y 8. Eleva cada uno de ellos al cubo. Suma los dos mayores y resta el menor. ¿Qué número obtienes? Repite el procedimiento con otros tres términos consecutivos y escríbelo debajo de $8^3 + 5^3 - 3^3 = ?$ ¿Sabrías

decir cuánto vale $a_n^3 + a_{n+1}^3 - a_n^3$? Enuncia en palabras la propiedad.

11. ¿Serías capaz de construir un triángulo cuyos lados midan un número de unidades igual a tres términos de la serie?

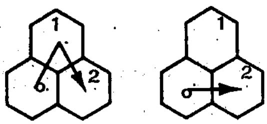
12. Comprueba que el cuadrado de un término menos el producto del anterior por el siguiente, es alternativamente +1 y -1. ¿Sabrías encontrar la expresión general para esa propiedad? Hazlo experimentalmente con los ocho primeros términos.

Podemos también encontrar los números de Fibonacci relacionados con los números combinatorios y la probabilidad binomial. Además, la serie nos puede ayudar a resolver problemas como este :

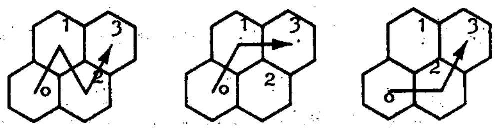
Supongamos que la abeja de la figura, que se encuentra en la celdilla 0, se puede desplazar, siempre de izquierda a derecha, a otra celdilla cualquiera. ¿ De cuántas formas posibles puede viajar desde la 0 a otra celdilla determinada?

1

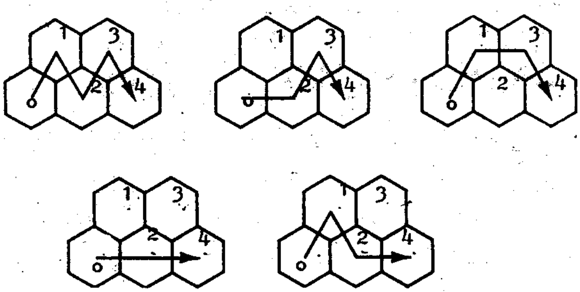
2



3



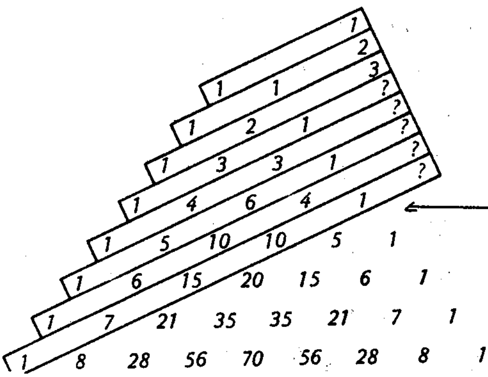
5



Está claro que para pasar a la celdilla 1 sólo hay un camino, para ir a la 2 hay dos y para la 3, tres. ¿Cuántas posibilidades tiene nuestra abeja de elegir camino para ir a la celdilla 4 ? ¿Y para ir la número 5? Podemos comprobar fácilmente por la figura anterior que la solución del problema nos conduce una vez más a la serie de Fibonacci.

Para encontrar la expresión general del número de caminos que puede seguir la abeja desde la celdilla 0 hasta la celdilla n-sima nos podemos ayudar del triángulo de Pascal (***). Para referirnos de una forma más cómoda a cada fila y columna, podemos disponerlo de manera que las diagonales pasen a ser columnas. Así, el término correspondiente a la fila n, columna r, nos dará directamente el número combinatorio $\binom{n}{r}$. A esta disposición se le conoce por "triángulo chino", y fue así como lo conoció Fibonacci.

r		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
S. Fibonacci		0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	…
	n														
	0	1													
	1	1	1												
	2	1	2	1											
	3	1	3	3	1										
	4	1	4	6	4	1									
	5	1	5	10	10	5	1								
	6	1	6	15	20	15	6	1							
	7	1	7	21	35	35	21	7	1						
	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1					
	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
	10	1	10	45	120	210	…					1			55
	11	1	11	…											
	12	1	12	…											



Lanzamiento de 4 monedas

Nº caras	4	3	2	1	0
Nº formas	1	4	6	4	1

Observando las figuras, podemos ver que podemos obtener los términos de la serie de Fibonacci sumando los elementos siguiendo las diagonales de la forma siguiente :

$$a_1 = 1 = \binom{1}{0}$$

$$a_2 = 2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1}$$

$$a_3 = 3 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1}$$

$$a_4 = 5 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2}$$

$$a_5 = 8 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2}$$

. . . .

$$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-r}{r}$$ donde (n-r)-r vale 0 ó 1

Así pues, la abeja de nuestro problema tendrá un número de posibles caminos para ir a la celdilla n-sima igual al término general deducido y que podemos expresarlo como :

$$a_n = \sum_{j=0}^{j=r} \binom{n-j}{j} \quad ; \quad r = \begin{cases} n/2 & \text{n par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{n impar} \end{cases}$$

La serie estudiada posee una enorme cantidad de propiedades más y el tratar de descubrirlas es una tarea agradable y gratificante. Yo me he limitado a enfocar algunas de cara a la enseñanza, pues creo que si con ejemplos como estos conseguimos ayudar a nuestros alumnos a comprender que las Matemáticas "existen de pos si" en la Naturaleza y que el hombre se limita a descubrirlas y expresarlas, nos podremos dar por satisfechos.

(*) No he presentado los ejercicios clasificados por niveles de dificultad para no caer en reiteraciones. Dejo para cada uno la selección de aquellos que más se ajusten al nivel de sus alumnos.

(**) Las áreas del cuadrado y del rectángulo serán exactamente iguales cuando tomemos como lado del cuadrado el número Ø. Este número se obtiene como límite de cocientes de términos consecutivos de la serie de Fibonacci, y se llama "número áureo".

(***) El triángulo de Pascal lo podemos introducir con el clásico ejemplo del lanzamiento de monedas. Anotando el número de caras y las formas posibles de conseguirlas, obtendremos el triángulo sin más que variar el número de monedas. Utilizando los números combinatorios, el triángulo adopta la forma que se adjunta.

BIBLIOGRAFIA

HAROLD R., JACOBS - Mathematics: a human endeavor - Freeman-San Francisco, 1982.

LORRAINE, M. - Sources of mathematical discovery - Blackwell-Oxford, 1981

MATILA, C.G. - Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes - Poseidón - Barcelona, 1977.

KEITH ELLIS - Number power in Nature, Art and everyday Life - Heinemann - New York, 1970

COOK, THEODORE A. - The curves of life - Dover - New York, 1979

GARDNER, MARTIN : More mathematical puzzles and diversions - Penguin - London, 1980

Mathematical circus - Penguin - London, 1979

Nuevos pasatiempos matemáticos - Alianza Editorial - Madrid, 1981

D'ARCY THOMPSON - Growth and form

GUILLEMINOT, H - La matiere et la vie

JOHNSTONE, J - The mechanisme of life

Fibonacci Quartely - Vols. 4 y 2.

ICOTS
II

THE
SECOND
INTERNATIONAL
CONFERENCE
ON TEACHING
STATISTICS

11-16 August, 1986
University of Victoria
Victoria, British Columbia
CANADA

Preliminary Announcement

The International Statistical Institute and the University of Victoria are pleased to announce that the Second International Conference on Teaching Statistics will be held in Victoria, British Columbia, Canada from 11-16 August 1986. For a copy of the first announcement write to:

Tom Lietaer
The Second International Conference
on Teaching Statistics
University Extension Conference Office
University of Victoria
P.O. Box 1700
Victoria, British Columbia
Canada V8W 2Y2

The objective of the conference is to improve the quality of statistics teaching on a world-wide basis, building on the work begun in Sheffield at the First International Conference on Teaching Statistics. Key goals include fostering international co-operation among teachers of statistics and promoting the interchange of ideas about teaching materials, methods and content. Speakers of international repute will address the plenary meetings and present invited lectures. There will also be many workshops, tutorials, panel and discussion groups and contributed paper sessions. Opportunities will be provided to see and experiment with the latest in computer hardware and software. Teaching from the school to the college level as well as other forms of teaching will be included. There will also be sessions on teaching statistics for use in government, business and industry.

An added attraction is the 1986 World Exposition (Expo 86) on Transportation and Related Communication, May 2 to October 13, 1986 in Vancouver, British Columbia, Canada. Conference participants will have the opportunity to visit Expo 86 either before or after the conference.

The Chairman of the local organizing committee is Jim Swift, Nanaimo School District, British Columbia, Canada. The Chairman of the Programme Committee is Robert Hogg, University of Iowa, Iowa City, USA. Other members of the Program Committee are Peter Holmes (University of Sheffield, England), Lennart Rade (Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden), Mustafa Benyaklef, (Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée, Rabat, Maroc) and Jim Swift.

University Extension
Conference Office
University of Victoria
P.O. Box 1700
Victoria, British Columbia
Canada V8W 2Y2
Telephone: (604) 721-8475
Telex: 049-7222