

## Habilidades matemáticas referidas el concepto de Derivada y uso de tecnología

Betina Williner (Universidad Nacional de La Matanza. Argentina)

*Fecha de recepción: 9 de diciembre 2013*

*Fecha de aceptación: 29 de agosto de 2014*

---

### Resumen

En este artículo reportamos algunos resultados de una investigación realizada sobre habilidades matemáticas ligadas al Cálculo Diferencial y el uso de tecnología. La indagación surge de la necesidad de conocer el desarrollo de habilidades matemáticas de los alumnos cuando trabajan con actividades diseñadas y lo hacen con software matemático y sin uso del mismo, cuyos contenidos se refieren al tema Derivada. Como diseño de investigación utilizamos test inicial, test final y grupo control. Presentamos aquí algunas observaciones extraídas del análisis efectuado en los dos test que realizaron los alumnos de los dos grupos: experimental y control.

### Palabras clave

Habilidades matemáticas, software matemático, cálculo diferencial.

---

### Abstract

In this report, research results about mathematic skills related to Differential calculus and the use of technology are shown. This quest stems from the necessity to know how the work through activities designed with mathematical software and without the use of it (which contents are related to the subject Derivate) affects the development of the mathematical skills of the students. For the design of the investigation, an initial and final test, and a control group were used.

Hereby, we introduce some observations arisen from the analysis made in the two tests produced by students of the two groups: experimental and control ones.

### Keywords

Mathematical skills, mathematical software, differential calculus.

---

## 1. Introducción

La investigación que reportamos en este artículo se llevó a cabo en la Universidad Nacional de La Matanza (Argentina) en carreras de Ingeniería, más específicamente en la cátedra de Análisis Matemático I y se encuadró en el contexto de una Tesis de Maestría.

Cuando emprendimos el trabajo lo hicimos inspirados en la frase “El ingeniero debe **saber y saber hacer** para el desempeño profesional” (CONFEDI, 2006, p.5). Un ingeniero debe saber aplicar el conocimiento científico y desarrollar soluciones tecnológicas a las diferentes demandas sociales, por lo tanto es fundamental el “saber hacer”. Esta capacidad de poder realizar eficientemente acciones o tareas orientadas hacia el logro de un objetivo es lo que llamamos habilidad. En particular en el contexto educativo el desarrollo de habilidades matemáticas ayuda al alumno a no proceder en forma mecánica memorizando conceptos, teoremas y técnicas. Como señala Guzmán (2007) “la Matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido” (p. 27). Las habilidades matemáticas son de gran importancia en el aprendizaje de la Matemática, de allí nuestro interés por promover su desarrollo en nuestros alumnos.



A su vez tuvimos en cuenta la necesidad profesional de manejar un software específico de Matemática. La Matemática es una herramienta fundamental en la resolución de problemas y cálculos por lo que, en esta era tecnológica, sentimos la obligación de enseñar a los estudiantes a usar un recurso tecnológico que les facilite su tarea. Como indica Guzmán (1991) “El ordenador está ahí con todo su influjo, con todo su impacto potencial. Impacto en la visión de la cultura, en la visión de la ciencia, en la visión de la Matemática” (p.9)

La computadora y los diversos adelantos tecnológicos son elementos corrientes en la vida cotidiana de nuestros alumnos, por lo que tenemos la responsabilidad de asumirlos en un momento tan importante como es el acto de aprender.

Estas dos necesidades de formación en carreras de Ingeniería: el desarrollo de habilidades matemáticas y el uso de tecnología, son objeto de estudio de nuestra investigación. Quisimos analizar cómo es posible promover el desarrollo de habilidades matemáticas relacionadas con un tema de la asignatura usando la computadora como herramienta de trabajo. Como expresamos anteriormente, pertenecemos a la cátedra de Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM). En este contexto el proceso de incorporación de tecnología en las clases de Matemática es lento. Sólo en nuestra cátedra se utiliza software *Mathematica* en la entrega de un trabajo práctico obligatorio que realizan los alumnos extra clase. No contamos con experiencias previas de cómo incorporar el software al aula. De allí, el interés de investigar sobre la aplicación de un dispositivo didáctico que utilice software como herramienta, con el objeto de contribuir al desarrollo de habilidades matemáticas. Como toda habilidad está ligada a un conocimiento (Hernández, 1998) elegimos trabajar con habilidades matemáticas asociadas a la comprensión de uno de los conceptos más importantes del Cálculo como es el de Derivada. Decidimos relacionar el trabajo de un grupo de alumnos en el entorno tradicional de lápiz y papel y otro en el informático, cuidando que ambos grupos tuvieran características iniciales similares en relación con el rendimiento.

Son varias las experiencias sobre el uso de software matemático en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Encontramos aquellas que enfatizan la visualización y registros de representación semiótica (Hitt, 2003; Hitt y Cortés, 2001). En algunas se favorece la exploración y elaboración de conjeturas (Torroba, Etcheverry y Reid, 2009; Torroba, Reid, Etcheverry y Villareal, 2006); otras lo utilizan como recurso para mejorar la comprensión de diferentes conceptos y para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje (Cuicas, Debel, Casadei y Alvarez, 2007; Camacho, 2005) y algunas que lo combinan con tutoriales y/o talleres complementarios al cursado regular (Depool y Camacho, 2001). En particular nuestro estudio está dirigido especialmente al desarrollo de ciertas habilidades matemáticas ligadas a la comprensión del concepto de Derivada.

El diseño de investigación elegido fue el de test inicial y test final, grupo control y desarrollo de un dispositivo de enseñanza cuidadosamente diseñado. Trabajamos con una comisión de alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería en Informática, Industrial y Electrónica, dividiéndolos de acuerdo a ciertas características seleccionadas en dos grupos: Grupo 1 y Grupo 2. Previo a aplicar el dispositivo didáctico aplicamos un test inicial a ambos grupos referido a los contenidos principales del tema Derivada y orientado a las habilidades matemáticas a estudiar. Posteriormente, el Grupo 1 realizó actividades utilizando software *Mathematica* en uno de los laboratorios de la Universidad, bajo la modalidad taller. El Grupo 2 también trabajó bajo modalidad taller con las mismas actividades que el Grupo 1, sin hacer uso de tecnología y en su aula habitual. Estas actividades fueron diseñadas especialmente para promover el desarrollo de las habilidades matemáticas que definimos en la investigación. Luego tomamos un test final a los dos grupos, similar al test inicial, para observar si se produjeron cambios o no en cuanto al desarrollo de dichas habilidades matemáticas en torno al tema Derivada.

Los datos de la investigación fueron recopilados a través de los dos tests mencionados y de las producciones reportadas por los alumnos en las actividades. En este artículo mostramos algunos de los resultados obtenidos en los dos test en los dos grupos y las conclusiones a las que arribamos.

### 1.1. Antecedente de una investigación local

Existen estudios anteriores sobre habilidades matemáticas y uso de tecnología en carreras de Ingeniería de la UNLaM. Comenzamos con una investigación que tuvo como contexto el taller complementario que brinda la cátedra de Análisis Matemático I para asistir a los alumnos en la realización de trabajos prácticos con software *Mathematica*. Estos trabajos deben estar aprobados como una instancia más de evaluación de la asignatura. En esa oportunidad realizamos un análisis de las habilidades matemáticas que promovían la ejercitación que debían entregar los alumnos al cual denominamos análisis preliminar. Tuvimos la necesidad de desagregar cada una de las habilidades estudiadas de acuerdo al contenido con el cual se relaciona. Por ejemplo: discernimos entre *identificar el dominio de una función* e *identificar discontinuidades de una función*. Luego, basados en ese análisis preliminar, estudiamos las producciones impresas de los estudiantes (sus trabajos prácticos en software *Mathematica*) y los resultados de entrevistas orales semiestructuradas. El análisis de los datos arrojó un avance, a lo largo del año, en el desarrollo de habilidades como *controlar, identificar y comparar*.

Los resultados de la investigación mencionada en el párrafo anterior, nos estimuló a reformular la planificación de las actividades del taller, poniendo énfasis en un diseño que favoreciera el desarrollo de habilidades matemáticas. Así creamos diferentes tipos de actividades siguiendo la tipología brindada por Delgado Rubí<sup>1</sup> (de generalización, de estudio de casos, de aplicación de resultados teóricos a problemas prácticos, de aplicación de algoritmos dados y conocidos y de construcción) y atendiendo a las habilidades que cada una de estas categorías favorece. Estudiamos las habilidades promovidas por las mismas en los trabajos prácticos entregados por los alumnos, así como también en entrevistas orales realizadas a fin de año. En este caso ampliamos el espectro de habilidades estudiadas, haciendo más hincapié en habilidades heurísticas como *explorar, generalizar, justificar*, entre otras (Falsetti, Favieri, Scorzo, Williner, 2012)

En estos años de investigación logramos desagregar las habilidades matemáticas relacionándolas con el contenido al que se refieren, diseñar actividades con software orientadas al desarrollo de dichas habilidades y elaborar instrumentos para la evaluación de las mismas.

## 2. Marco teórico

### 2.1. Habilidades matemáticas

De acuerdo al diccionario de la Lengua Española, y tomando las acepciones en el marco de la investigación, transcribimos las siguientes definiciones:

- *Habilidad*: capacidad y disposición para algo o cada una de las cosas que una persona ejecuta con gracia y destreza.
- *Capacidad*: aptitud, talento, cualidad que dispone a alguien para el buen ejercicio de algo.
- *Destreza*: Habilidad, arte, primor o propiedad con que se hace algo.

---

<sup>1</sup> En el curso “Resolución de problemas, aprendizaje matemático y uso de TICs, dictado en la UNLaM en diciembre de 2006.



- *Competencia*: Pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado.

Si buscamos sinónimos de habilidad encontramos capacidad, destreza y competencia. Sin embargo, en el marco educativo, y en particular en Matemática, no todos son utilizados como sinónimos.

Hernández (1998) define los “procedimientos” (habilidades) como los modos de actuación. Aclara que no puede haber un conocimiento sin un procedimiento bajo el cual funcione, y, viceversa, no puede haber un procedimiento sin que esté asociado a un conocimiento. Delgado Rubí (1998), enfatiza esta idea aludiendo a Talízina (1984) con la frase “no se puede separar el saber, del saber hacer, porque siempre saber es siempre saber hacer algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer” (p. 70).

Zabala (2007) toma las destrezas y habilidades dentro de los contenidos procedimentales, a los que define como conjunto de acciones para lograr un fin. Los contenidos de procedimientos, ligados con la acción, son dinámicos, se relacionan con lo que sabemos hacer. Aclara que el aprendizaje de una acción, exige no sólo conocer cómo tiene que ser la acción, sino tener la capacidad para realizarla.

Sánchez (2002), por su parte, discierne al conocimiento como semántico o procedimental. El conocimiento semántico es la información sobre los conceptos, teorías, hechos, principios, reglas que conforman una disciplina o campo de estudio. El conocimiento procedimental, por su parte, se define como un conjunto ordenado de pasos o acciones que acompañan un acto mental o actividad motora. Los procedimientos son los instrumentos o componentes dinámicos del conocimiento. La práctica del procedimiento genera las habilidades del pensamiento. Luego esta autora aclara que el proceso existe por sí mismo, independientemente de la persona que lo lleva a cabo, el procedimiento proviene de operar ese proceso y destaca que la habilidad es la facultad personal, cuyo desarrollo requiere un aprendizaje sistemático. La habilidad es la facultad de aplicar el conocimiento procedimental y puede referirse a la aplicación directa del proceso o a la evaluación y mejora de lo que se piensa y se sabe.

Si realizamos un paralelo entre todos estos autores, más allá de las diferencias de denominación, consideran por un lado toda la información que recibe una persona (conceptos, teorías, hechos, definiciones, propiedades, atributos) que podríamos englobarlos en “conocimiento”, y por otro, las acciones y aplicaciones que puede realizar el individuo con ese conocimiento: las habilidades. Sánchez (2002) amplía el concepto de habilidad diciendo que no es sólo la aplicación del conocimiento, sino también la autoevaluación de lo que se hace con vista a una mejora futura.

Entonces, nosotros discernimos entre procedimiento y habilidad vinculados con la Matemática. Por una parte, el procedimiento es la acción o tarea que debemos realizar para lograr un objetivo o fin en el cual la Matemática está involucrada. En tanto que una habilidad matemática es la facultad personal de efectuar el procedimiento eficientemente, es decir, la capacidad de realizar acciones correctamente en relación al logro del objetivo planteado.

En cuanto a la clasificación de habilidades, encontramos en la bibliografía diferentes opciones. Éstas dependen, en cierta medida, del enfoque dado al concepto y de los objetivos que persigue cada autor a la hora de categorizarlas. Entre las más importantes tenemos la Taxonomía de Bloom (sf.), habilidades del dominio cognitivo, en la que se establecen seis categorías básicas según la función de la acción en la que la habilidad se manifiesta: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis, evaluación. Por otro lado, Delgado Rubí (1998), citando también a Hernández, Valverde y Rodríguez, trabaja con habilidades matemáticas y las agrupa de acuerdo al tipo de función que realizan:

- Habilidades conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (identificar, definir, comparar, demostrar)
- Habilidades traductoras: aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (interpretar, modelar, recodificar)
- Habilidades operativas: funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (graficar, algoritmizar, aproximar, optimizar, calcular)
- Habilidades heurísticas y metacognitivas: aquellas que emplean recursos heurísticos y metacognitivos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (resolver).

### 2.2. La computadora como herramienta cognitiva

El Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (NCTM, 2003) declara que el currículo de Matemática de todos los niveles debe incorporar la tecnología educativa en pro de un aprendizaje más efectivo y del desarrollo de habilidades por parte del estudiante. Agrega que es función de los docentes prepararse para efectuar decisiones sobre cómo y cuándo los alumnos pueden usar estas herramientas.

Vílchez (2007) cita en su artículo a Meza (2001) quien afirma:

Los resultados positivos que podamos obtener al utilizar computadoras en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, dependerán del uso que les demos, esto significa que la computadora no es un aparato que resolverá los problemas educativos por arte de magia...el empleo de computadoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje debe justificarse en el marco de un planteamiento educativo completo, lo que supone la selección de objetivos educativos y la definición de estrategias didácticas específicas. (p.46).

Ahora bien, para poder planificar una enseñanza que contemple el uso de tecnología debemos saber de qué tipo de recursos disponemos y con qué fines fueron creados. Al respecto Oteiza, Silva y el Equipo Comenius (2001), exponen las “metáforas” que identifican los sucesivos cambios que sufrieron las aplicaciones de las tecnologías a la educación. Basados en las ideas de Taylor (1980, citado en Oteiza et al., 2001) explican diferentes usos de la computadora:

- *Como tutor*: se pensó el ordenador como una máquina de enseñanza. Al ser tutor, la máquina brinda información, el estudiante responde a algún ejercicio o pregunta basada en esa información (con diferentes niveles de dificultad) y luego el programa le da un feedback al alumno. En esta categoría podemos incluir los programas que ofrecen una serie de juegos para aprender, entre otros, números, operaciones, relaciones, etc. (Cuevas Vallejo, s.f.). A partir de la década de los ochenta, progresaron gracias a las técnicas de la Inteligencia Artificial, dando origen a los Sistemas Tutoriales Inteligentes. Pone énfasis en el autoaprendizaje.
- *Como aprendiz*: es el estudiante quien “enseña” al ordenador (el que se convierte en aprendiz), programando mediante algún lenguaje como BASIC y LOGO, y más actuales, VISUAL BASIC, C, JAVA, entre otros. Un gran sector de educadores matemáticos afirman que la enseñanza de ciertos lenguajes de programación favorece el desarrollo de habilidades matemáticas y lógicas en la resolución de problemas (Cuevas Vallejo, s.f.). Este autor cita a Dubinsky que trabaja en cursos de matemática a nivel superior usando ITSEL y afirma que mediante la programación se efectúan los constructos matemáticos paralelos en la mente de los estudiantes, pudiéndose lograr la interiorización de ciertos conceptos.



- *Como herramienta*: con la aparición de procesadores de texto, planillas electrónicas y otros programas no fue necesario aprender a programar para usar la computadora. En el caso de la matemática, programas como *Calcula*, *Derive*, *Mathematica*, *Matlab*, entre otros, abren la posibilidad a una amplia gama de aprendizajes. Estos programas son llamados en la cultura anglosajona Computer Álgebra System (CAS), ya que con los mismos se pueden realizar cálculos, operaciones algebraicas, resolver ecuaciones, trabajar con matrices, efectuar derivación e integración en forma simbólica y numérica, graficar, etc. Así el docente puede diseñar actividades en el aula haciendo uso de estos paquetes.
- *Como multimedia*: variante tecnológica que combina gráficos, color, hipervínculos y sonido. Gayesky (1992) citado en Salinas Ibáñez (1994), define Multimedia como "una clase de sistemas de comunicación interactivos controlada por ordenador que crea, almacena, transmite y recupera redes de información textual, gráfica y auditiva". Facilita la visualización, la comprensión de conceptos, las aplicaciones y las simulaciones.
- *Como dispositivo comunicacional (Internet, comunicaciones, correo electrónico, chats, etc.)*: la web, red mundial que combina comunicación con multimedia, abrió a gran parte de la población las puertas a un mundo de oportunidades que hasta ese entonces eran inalcanzables. La información disponible, la posibilidad de comunicarse con personas de cualquier parte del mundo, produjeron un gran impacto en el trabajo y en el conocimiento. En particular, en la educación, permite al alumno ampliar la información y navegar por diferentes sitios. Cuevas Vallejo (s.f.) cita, en el caso de la matemática, la producción de applet's como Descartes 2 y Descartes 3, que permiten en una pantalla usual de internet escribir la definición de un objeto matemático e instalar un applet (ventana) con ese objeto matemático (función, gráfica, etc.) con el fin de manipularlo.

En particular, nosotros nos concentraremos en el uso de la computadora como *herramienta*. Jonassen, Carr y Yueh (1998) afirman que la tecnología debe usarse como una herramienta de construcción del conocimiento, de manera que los estudiantes aprendan "con" ella y no "de" ella. Agregan que las computadoras pueden favorecer más efectivamente el aprendizaje significativo y la construcción del conocimiento en la educación superior, como herramientas de amplificación cognitiva para reflexionar sobre lo que los estudiantes han aprendido y lo que saben. Las herramientas informáticas tratadas como herramientas cognitivas tienen como propósito abordar y facilitar determinados procedimientos cognitivos. Se trata de dispositivos intelectuales utilizados para visualizar, organizar, automatizar o suplantar las técnicas del pensamiento (Esteban, 2002). Este autor, citando a Jonassen, explica los diferentes usos que pueden tener. Por ejemplo, sirven para representar de una mejor manera el problema o ejercicio que se esté realizando (herramientas de visualización como *Mathematica*). Otras ayudan a articular información con los conocimientos previos del alumno, de manera que se establezcan relaciones, conexiones, consecuencias, entre otras (por ejemplo base de datos y redes semánticas). Algunas permiten representar relaciones de dependencia de fenómenos (herramientas de modelización del conocimiento); o pueden servir para consolidar esquemas preexistentes en el aprendiz mediante la automatización de los ejercicios de un nivel inferior (realización de algoritmos o cálculos); también pueden ayudar a buscar la información pertinente y necesaria para resolver un problema (motores de búsqueda). En todos los casos deben seleccionarse adecuadamente dependiendo de la tarea que se quiera llevar a cabo.

### 3. Contexto de la investigación

La experiencia se llevó a cabo en uno de los cursos del turno mañana de la asignatura Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería Informática, Industrial y Electrónica de la Universidad Nacional de La Matanza formado inicialmente por 60 personas, la mitad de las cuales eran alumnos recursantes, constituyendo una muestra no probabilística o de criterio.

El programa de la materia cuenta con los contenidos habituales de Cálculo Diferencial e Integral en una variable. El régimen es cuatrimestral, con una carga horaria de 8 horas semanales. Como instancias de acreditación los alumnos deben rendir dos parciales y entregar y defender un trabajo práctico con software *Mathematica*. Para esto los estudiantes cuentan con un taller donde se los asiste en el uso del software y en la ejercitación. Una de las razones por la que elegimos este software para realizar la experiencia es que los alumnos ya tienen un contacto con el mismo y a su vez la Universidad cuenta con la licencia correspondiente.

Debido a que toda habilidad está ligada a un conocimiento (Hernández, 1998), el tema que elegimos para llevar adelante la propuesta es Derivada. Además de ser uno de los pilares del Análisis Matemático a través del cual se resuelven problemas de optimización, aproximación, estudio de función, entre otros, trabajar con derivadas enriquece nuestro estudio en el sentido que nos permite promover diversas habilidades. Podemos abordarlo desde un punto de vista geométrico como pendiente de la recta tangente, desde un enfoque formal como límite del cociente incremental y desde un enfoque variacional como por ejemplo velocidad instantánea en Física, tasa de crecimiento instantáneo en Biología, etc.

#### 4. Objetivo general de la investigación

Conocer sobre las manifestaciones de habilidades matemáticas en el aprendizaje del tema de Derivada en un grupo de estudiantes cuando trabaja con software *Mathematica* y relacionarlas con las manifestaciones de aquellos que lo hacen sin el uso de esta herramienta.

#### 5. Diseño de investigación

La investigación es de tipo descriptivo-explicativa y el paradigma es mixto (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). El diseño de investigación elegido es de test inicial y test final, grupo control y desarrollo de un dispositivo de enseñanza cuidadosamente diseñado para ambos grupos.

Dividimos los grupos de acuerdo a la técnica de emparejamiento o apareo (Hernández et al., 2006). De acuerdo a los resultados de una prueba diagnóstico y al análisis de otras variables (condición de recurrente o no, materias aprobadas de Matemática en el primer cuatrimestre), quedaron establecidos: el grupo experimental (que llamaremos Grupo 1) y el grupo control (que denominaremos Grupo 2), ambos con 27 alumnos inicialmente. En toda la experiencia los dos grupos compartieron la parte teórica de la materia y algunas clases prácticas.

Algunas de las preguntas que orientaron la investigación que aquí se reporta son:

- ¿Los alumnos de primer año de Ingeniería de la UNLaM poseen un nivel similar de desarrollo de habilidades matemáticas cuando trabajan con software que cuando lo hacen sin esta herramienta?
- ¿Cuáles de todas las habilidades estudiadas son las más promovidas con el uso del software?

Son varias las investigaciones que reflejan que el uso de una herramienta informática contribuye a mejorar el aprendizaje (Cuicas Ávila et al., 2007; Depool et al., 2001), como también existen otras que revelan que el uso de un entorno informático no garantiza resultados satisfactorios en el mismo (Contreras et al., 2005). En nuestra experiencia, considerando que nuestros alumnos serán futuros ingenieros, y que pretendemos que para ellos la Matemática sea una herramienta de apoyo en su profesión, decidimos utilizar un software específicamente matemático: el *Mathematica*. Este programa



tiene su sintaxis específica y comandos que son necesarios aprender para poder hacer uso del mismo. En cuanto a las actividades diseñadas para llevarse a cabo, si bien algunas están focalizadas a la parte geométrica y gráfica, otras requieren desempeño de los estudiantes en habilidades que son de tipo matemático-discursivas, como la justificación. Los alumnos que trabajan con esta herramienta deben establecer qué sentencias van a ordenar al software, cómo van a plantear cada ejercicio utilizando la computadora en vez del lápiz y papel al cual están acostumbrados e interpretar los resultados obtenidos. El alumno se somete a un proceso en el cual, para lograr resolver la tarea asignada, debe convertir la computadora cargada con software específico en instrumento de trabajo, es decir, hacerlo propio para integrarlo a su actividad matemática. Según Trouche (2003) se necesita tiempo para relacionar las características de un artefacto nuevo con la actividad del sujeto, sus conocimientos previos y su antigua manera de trabajar. Además, como indica Berger (2009), al disponer de una herramienta informática el usuario necesita tener conciencia del tipo de conocimiento mixto (matemático y sintáctico) para construir signos matemáticos adecuados. Ante la exigencia diferente que implica trabajar en entornos informáticos en vez de entornos de lápiz y papel, no nos parece trivial que los alumnos que trabajen con software *Mathematica* puedan desarrollar habilidades matemáticas referidas al tema Derivada, como usualmente lo hacen en ambientes tradicionales. De allí el planteo de las preguntas anteriormente expuestas.

### 5.1. Procedimiento

1. La clase anterior al test inicial, la que suscribe y docente a cargo de la comisión, explicó el concepto de derivada de una función en un punto dado bajo la modalidad tradicional expositiva-dialogada. Comenzamos explicando el concepto desde un enfoque variacional en la Física: la derivada como la velocidad de la función espacio recorrido. En una segunda etapa dimos la definición formal de derivada, relacionando el cociente incremental con la razón promedio de cambio en el intervalo y la razón instantánea de cambio en un punto con la derivada de la función en dicho punto. Por último, explicamos el tema desde su interpretación geométrica, llegando a la conclusión que la derivada de la función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto. Calculamos la ecuación de la recta tangente y definimos también recta normal.
2. A la clase siguiente aplicamos el test inicial a ambos grupos referido a los contenidos enumerados en el punto 1. Este test estaba orientado a las habilidades matemáticas que definimos en la investigación.
3. Posteriormente se realizaron seis sesiones de trabajo no sucesivas, en general cada día por medio de clase habitual. El Grupo 1 las realizó utilizando software *Mathematica* en uno de los laboratorios de la Universidad, bajo la modalidad taller. El Grupo 2 también trabajó bajo la modalidad taller en su aula habitual con las actividades utilizando lápiz y papel y calculadora científica (sin graficador). En los dos casos los alumnos formaron equipos de trabajo de dos o tres personas y contaron con la asistencia de un docente. Cabe aclarar que las actividades fueron las mismas salvo leves modificaciones en algunos casos, los grupos las efectuaron en paralelo durante las seis sesiones de trabajo y el objetivo principal fue incentivar el desarrollo de las habilidades matemáticas que definimos en torno al concepto de Derivada.
4. Cada actividad estaba formada por 4 o 5 ejercicios diseñados especialmente para comprometer al alumno en el desarrollo de ciertas habilidades matemáticas. Las producciones de los alumnos fueron archivos en software *Mathematica* en un caso y entorno de lápiz y papel en el otro. Tras la corrección de estas producciones hicimos una devolución personalizada, equipo por equipo. Estas producciones también fueron fuente de recolección de datos para la investigación.
5. El software *Mathematica* fue utilizado por el Grupo 1 para probar, conjeturar, graficar, calcular, resolver ecuaciones, derivar, calcular límites, representar la situación problemática a resolver y organizar el conocimiento de tal manera que les sirviera como herramienta de



apoyo. En las producciones, archivos del programa, los alumnos trabajaron con celdas de texto para explicar el procedimiento que realizaban y con celdas de input para efectuar el desarrollo matemático.

6. A la clase siguiente de finalizar las sesiones de trabajo tomamos el test final (en entorno de lápiz y papel condicionados por el Grupo 2), a los dos grupos para observar el desempeño de los alumnos en las habilidades matemáticas estudiadas en el aprendizaje del tema seleccionado, luego de haber puesto en juego el uso del software y las actividades.

## 5.2. Variables estudiadas en la investigación

En la elección de las habilidades a promover a través de las actividades, y de acuerdo al tema seleccionado, nos propusimos como objetivo principal la *comprensión* del concepto de Derivada y de sus aplicaciones. Leonetti et al. (2007) establecen la diferencia que existe entre *conocer* y *comprender*. Estos autores citan a Perkins quien aclara que el conocimiento es un estado de posesión, mientras que la comprensión va más allá de la posesión, implica competencia, un estado de poder operar con el conocimiento, es un estado de capacitación. Cuando el alumno comprende un concepto, no sólo tiene información sobre el mismo, sino que también es capaz de hacer un “uso activo de ese conocimiento”. Ese uso activo que revela comprensión se plasma en acciones de comprensión o *desempeños de comprensión*. Para nosotros las habilidades matemáticas elegidas son desempeños ligados a la comprensión del concepto de Derivada.

A su vez tuvimos en cuenta la clasificación de Delgado Rubí (1998) y decidimos centrarnos en *habilidades conceptuales* (capacidad de desarrollar modelos conceptuales), *habilidades de aplicación* (capacidad de utilizar modelos conceptuales) y *habilidades de argumentación* (capacidad de explicar, justificar, reflexionar sobre los modelos conceptuales). En este artículo presentamos sólo las habilidades conceptuales, las que clasificamos de la siguiente manera:

Habilidades generales	Habilidades específicas a estudiar en relación con “Derivada”	Denominación abreviada
<p><i>Habilidades conceptuales</i> Consideraremos habilidades conceptuales a aquellas que permiten reconocer el concepto de diferentes maneras: por su definición (formalmente), por sus representaciones semióticas o en su aplicación a otras ciencias.</p>	<p>♦ Interpretar geoméricamente (el concepto de derivada). ♦ Reconocer el concepto en otras ciencias u otros contextos (velocidad instantánea en Física, tasa de crecimiento instantánea en Biología, etc.). ♦ Extraer o Dar significado de expresiones dadas en forma simbólica o formal.</p>	<p>♦ HC1 ♦ HC2 ♦ HC3</p>

Tabla 1. Algunas variables estudiadas en la investigación.

Con respecto a las habilidades de “Extraer o Dar significado de expresiones dadas en forma simbólica o formal” nos basamos en el texto de Tall y Fusaro (2002). Estos autores consideran dos modelos que utilizan los estudiantes en la construcción de definiciones:

- *Extraer significado* (construido sobre teoría formal): extraer significado desde un concepto realizando deducciones formales.
- *Dar significado* (construido sobre ideas informales): dar significado a un concepto desde una imagen conceptual del mismo.

Retomando la clasificación de la Tabla 1, pensamos que el concepto de Derivada es un concepto muy rico en cuanto a los diferentes significados que podemos otorgarle:



- En su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. De ahí nuestro interés por “*Interpretar geoméricamente (HC1)*”.
- En su enfoque variacional: como razón de cambio instantánea en diferentes ciencias (Física, Biología, Economía, etc). En consecuencia nos interesamos por “*Reconocer el concepto en otras ciencias u otros contextos (HC2)*”.
- En su definición formal, como límite del cociente incremental de una función en un punto. Es por esta razón que estudiamos las habilidades “*Extraer o Dar significado de expresiones dadas en forma simbólica o formal (HC3)*”.

### 6. Instrumentos de recolección de datos: test inicial y test final

Como explicamos en el punto 5.1, la clase anterior al test inicial, desarrollamos una clase sobre el concepto de derivada. En la clase siguiente aplicamos el test inicial involucrando lo explicado y todas las habilidades a ser estudiadas. Luego de realizadas las seis actividades (cada grupo en su entorno de trabajo) aplicamos un test final involucrando todos los temas del test inicial y con características similares al mismo. De esta manera logramos hacer una comparación de los resultados de cada test por persona y en los dos grupos.

Cabe explicar que los test fueron diseñados y tomados en un entorno tradicional de lápiz y papel debido a que, en un comienzo (test inicial), ningún alumno había trabajado con una herramienta informática integrada a la clase habitual. Por otro lado, el test final debía tener la misma naturaleza que el test inicial y requerir acciones que puedan ser realizadas por los dos grupos.

Para obtener la validez de contenido de estos dos instrumentos, nos inspiramos en un cuestionario realizado y aplicado por otro investigador (Dolores, 2000, p. 175), el cual persigue un objetivo similar al nuestro. A su vez lo sometimos a valoración por juicio de expertos con el fin de hacer las correcciones necesarias y observaciones realizadas por dichos expertos.

#### 6.1. Test inicial

Lo realizaron 49 alumnos. El objetivo principal fue indagar sobre la comprensión del concepto de derivada a través del análisis de las habilidades conceptuales, de aplicación y de argumentación, sin haber puesto aún en juego actividades que fomenten el desarrollo de dichas habilidades (en ninguno de los dos entornos).

El instrumento mencionado consta de tres ejercicios que fueron diseñados involucrando todas las habilidades a estudiar en la investigación de forma tal de poder ser evaluadas en los alumnos participantes. Por extensión del artículo mostramos aquellos ítems que involucran habilidades conceptuales. El primer ejercicio se refiere a la velocidad de un objeto que recorre una determinada trayectoria. El segundo ejercicio trata el concepto de derivada desde la interpretación geométrica, brindando una curva y la tangente a la misma en un punto dado. En el tercer ejercicio se dan proposiciones que involucran el concepto desde un punto de vista formal y de las cuales hay que decidir si son V o F y justificar la respuesta.

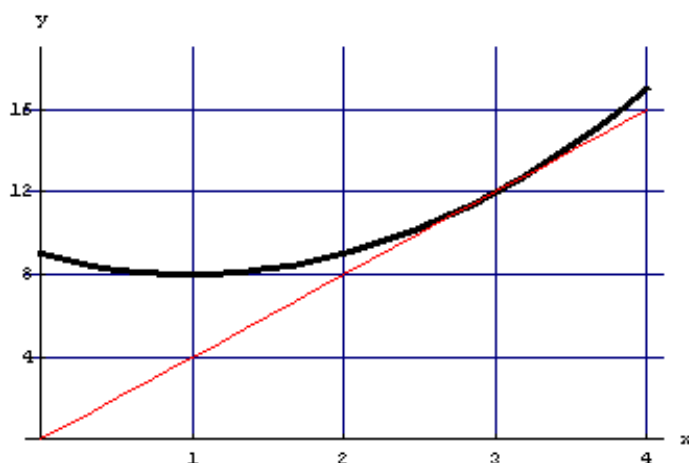
##### 6.1.1. Ejercicio 1

La distancia que recorren los cuerpos en caída libre está dada por la ecuación  $s = f(t) = 4.9t^2$ . Supongamos que se deja caer una pelota desde una torre que tiene 450 metros y  $f(t)$  es la distancia que recorre luego de  $t$  segundos.

- ¿Cuál es la distancia que recorre la pelota en los primeros 2 segundos?
- ¿Cuál es la distancia que recorre la pelota entre el segundo y tercer segundo?
- ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota en el intervalo  $[2,3]$ ?
- ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota en un intervalo de la forma  $[2, t]$ ? ¿Y en un intervalo de la forma  $[t,2]$ ?
- ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota a los 2 segundos?

### 6.1.2. Ejercicio 2

El siguiente es el gráfico de una función y su recta tangente en el punto de abscisa  $x = 3$ :



- ¿Cuánto vale  $f(3)$ ?
- ¿Cuál es el valor de  $f'(3)$ ?

### 6.1.3. Ejercicio 3

Responder V o F Justificar.

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  es la derivada de  $f$  en  $x = a$  (si el límite existe)
- $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $y = f(x)$  en el punto de abscisa  $x = a$ .
- Si  $2x + 3y - 4 = 0$  es la recta tangente a una curva  $y = f(x)$  en el punto de abscisa  $x = -1$ , entonces  $f'(-1) = -2/3$ .

## 6.2. Test Final

Este test contempló ejercicios similares a los involucrados en el test inicial y lo realizaron 37 alumnos.

### 6.2.1. Ejercicio 1

Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el piso. Si  $t$  es el tiempo (en segundos) que transcurre desde que la pelota fue lanzada,  $s$  es la distancia (en metros) de la pelota desde el punto



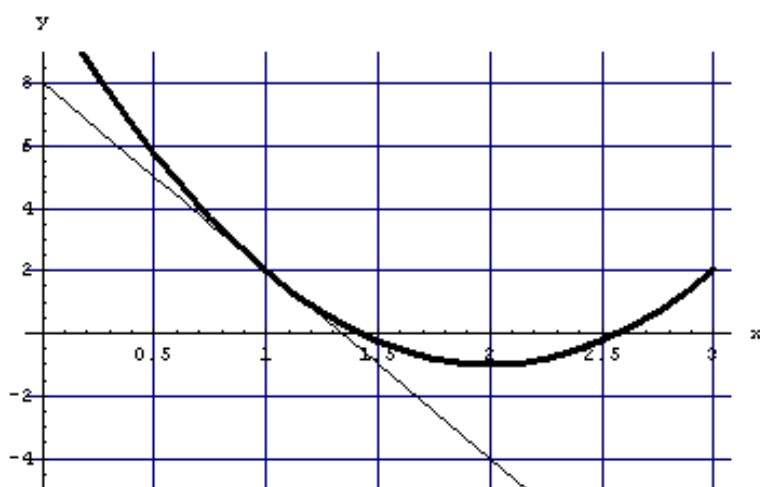
inicial (el piso) a los  $t$  segundos, la ecuación del movimiento de la pelota está dada por:

$$s(t) = -16t^2 + 64t$$

- ¿Cuántos metros recorrió la pelota en el primer segundo?
- ¿Cuántos metros recorre la pelota entre los instantes  $t = 1$  y  $t = 2$ ?
- ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota en el intervalo  $[1,2]$ ?
- ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota en el intervalo  $[1, t]$ ? ¿Y en  $[t, 1]$ ?
- Calcular la velocidad instantánea de la pelota en  $t = 1$

### 6.2.2. Ejercicio 2

El siguiente es el gráfico de una función y de su recta tangente en  $x = 1$ . Responder:



- ¿Cuánto vale  $f(1)$ ?
- ¿Cuál es el valor de  $f'(1)$ ?

### 6.2.3. Ejercicio 3

Responder V o F Justificar.

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  es la derivada de  $f$  en  $x = a$  (si el límite existe)
- $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $y = f(x)$  en el punto de abscisa  $x = a$ .
- Sea  $2x - y + 3 = 0$  la recta tangente a una función  $y = g(x)$  en el punto de abscisa  $x = -2$  entonces  $g'(-2) = 2$ .

### 6.3. Análisis preliminar de los test

En este apartado ofrecemos el análisis preliminar de los test, es decir, el análisis que consiste en establecer qué habilidades (establecidas en la investigación) esperamos que estén presentes en la resolución de cada uno de los ejercicios para luego poder efectuar la valoración de las mismas en el desempeño de los alumnos. Sólo mostramos lo referido a habilidades conceptuales.

Análisis preliminar del test inicial y final

Ejercicio	Habilidad	Procedimiento
1	HC2	Reconocer el concepto de cociente incremental como velocidad promedio (ítem d) y de derivada como velocidad instantánea (ítem e)
2	HC1	Interpretar la derivada como pendiente de la recta tangente (ítem b)
3	HC3	Extraer o dar significado cuando se reconoce la definición de derivada (ítem a) o la de cociente incremental (ítem b)
	HC1	Interpretar la derivada como pendiente de la recta tangente (ítem c)

Tabla 2. Análisis preliminar de los test (respecto a habilidades conceptuales).

## 7. Resultados de los test en los dos grupos

En el test inicial participaron 49 alumnos, 25 correspondientes al Grupo 1 y 24 del Grupo 2. Una vez que fueron realizadas las seis instancias de actividades con ambos grupos procedimos a tomar el test final. En esta oportunidad se presentaron en total 37 alumnos, 18 del Grupo 1 y 19 del Grupo 2.

Las categorías que establecimos para evaluar las habilidades son:

**N:** no está presente la habilidad, o porque el alumno no efectúa el ejercicio o porque lo hace mal.

**R:** regular

**B:** bien

Los criterios que determinamos para la valoración del desempeño de los alumnos, los explicamos en la sección correspondiente al análisis de cada habilidad. Como acercamiento a la información, decidimos efectuar un análisis descriptivo de frecuencias relativas de las respuestas de acuerdo a la calificación alcanzada.

Cuando realizamos el análisis de frecuencias relativas porcentuales de cada grupo y de cada habilidad, comparando los resultados de las dos instancias (test inicial y test final), tuvimos en cuenta sólo los alumnos que realizaron las dos pruebas (un total de 37 estudiantes).

Decidimos mostrar cada una de las frecuencias en los dos grupos en forma conjunta con el fin de visualizar el comportamiento en los dos casos.

### 7.1. Habilidad conceptual: Interpretación geométrica de la derivada (HC1)

La habilidad conceptual que consiste en interpretar el concepto de derivada geoméricamente como pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de tangencia, se manifiesta en los test cuando dado el gráfico de una función y su recta tangente en el punto de abscisa  $x = a$  (con escalas simples y grilla para identificar valores), solicitamos brindar el valor de  $f'(a)$  (ejercicio 2 b). En el caso del test inicial “a” es igual a 3 y en el caso del test final “a” es igual a 1:



Ejercicio	Criterios de evaluación	
	N	B
2 b) (test inicial)	No da respuesta o indica un valor incorrecto para $f'(3)$ .	Responde con el valor correcto de $f'(3)$ .
2 b) (test final)	No da respuesta o indica un valor incorrecto para $f'(1)$ .	Responde con el valor correcto de $f'(1)$ .

Tabla 3. Criterios de evaluación de desempeño de la habilidad HC1 (ejercicio 2b).

Las frecuencias relativas respecto a esta habilidad, por grupo y por test, son las siguientes:

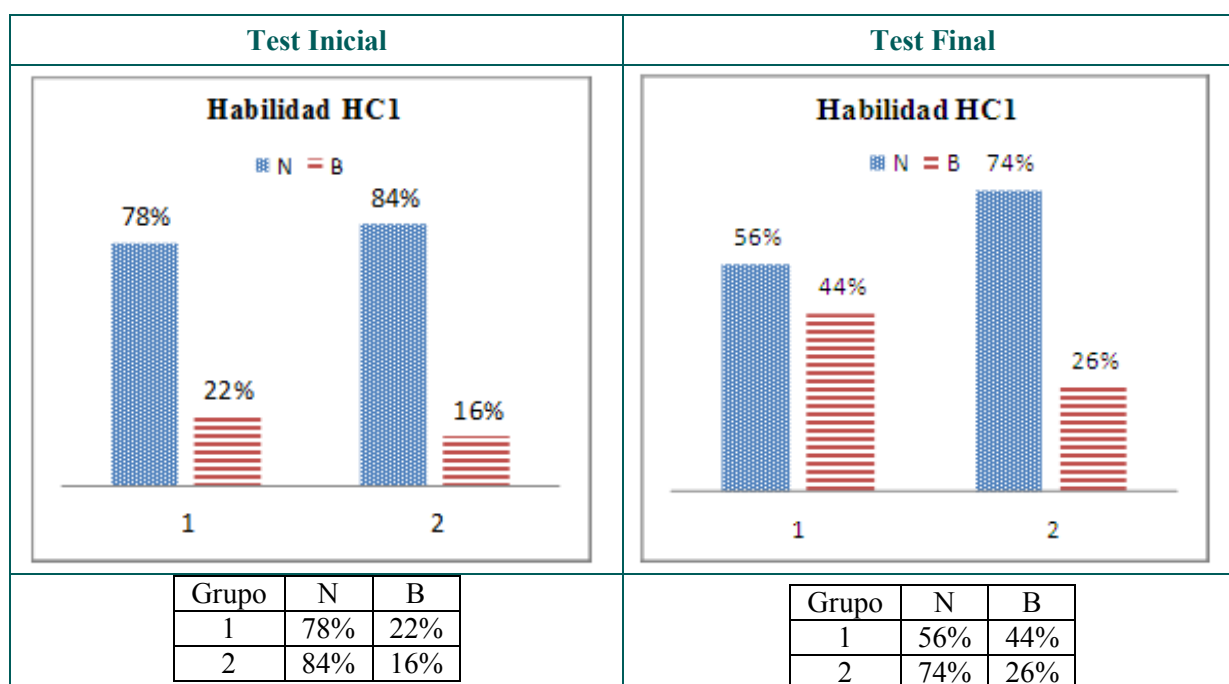


Figura 1. Primera manifestación de HC1 ( $N_1 = 18$ ,  $N_2 = 19$ , fuente propia).

En el test inicial un gran porcentaje de alumnos (alrededor del 80% en los dos grupos) contestó mal el valor de la derivada de la función en el punto de abscisa  $x = 3$  o no lo hizo. El error que cometió la mayoría de los alumnos que valoramos con N esta habilidad fue tomar como  $f'(3)$  el valor de la ordenada de la recta tangente en ese punto y no su pendiente. En una de las investigaciones realizadas por Dolores (2000) este error se manifiesta frecuentemente en la muestra estudiada por ese autor.

Con respecto a los resultados del test final, el 44% de los alumnos del Grupo 1 respondió correctamente el valor de la derivada de una función dada en forma gráfica en  $x = 1$ , conociendo el gráfico de la recta tangente en dicho punto. Esta habilidad conceptual de interpretación geométrica del concepto de derivada no tiene el mismo nivel de desarrollo en el Grupo 2, aunque el porcentaje de alumnos que la manifestó también aumentó en el test final para este grupo.

Se ha logrado un progreso considerable, manifestado en mayor medida en el Grupo 1. Inferimos que el uso más frecuente de gráficos por parte de este grupo, dado por la facilidad que brinda el software, contribuyó a la interpretación geométrica del concepto.

La otra instancia de evaluación de esta habilidad conceptual se manifiesta en el ítem que damos la recta tangente en forma implícita (ejercicio 3 c) en ambos test), a una función desconocida en un punto y el alumno, para responder a la consigna, debe hallar el valor de la derivada de la función en ese punto. Una de las diferencias con el ítem anterior, es que, en el primero, suministramos los datos en forma gráfica y, en el segundo caso, en forma analítica.

El criterio que tuvimos en cuenta para evaluar la manifestación de esta habilidad es el siguiente:

Ejercicio	Criterios de evaluación		
	N	R	B
3c) (test inicial)	Si el alumno no realiza el ejercicio, o da otro valor de $f'(-1)$ , o da la ecuación de la recta en forma explícita y la deriva para obtener el valor de $f'(-1)$ .	Si se equivoca al despejar y es ésta la razón de dar una respuesta incorrecta, pero manifiesta que sabe interpretar geoméricamente la derivada en un punto.	Si despeja en forma correcta y brinda el valor de la pendiente de la recta tangente como $f'(-1)$ .
3c) (test final)	Si no lo hace, o derivan la ecuación de la recta y de ahí sacan el valor, o despejan y reemplazan $(-2)$ en esa ecuación.	Si manifiesta interpretar geoméricamente el concepto pero, por ejemplo, despeja mal y por eso no obtiene el valor correcto.	Despeja correctamente e indica el valor de la pendiente de la recta tangente como $g'(-2)$ .

Tabla 4. Criterios de evaluación de desempeño de la habilidad HC1 (ejercicio 3c).

Los resultados obtenidos son los siguientes:

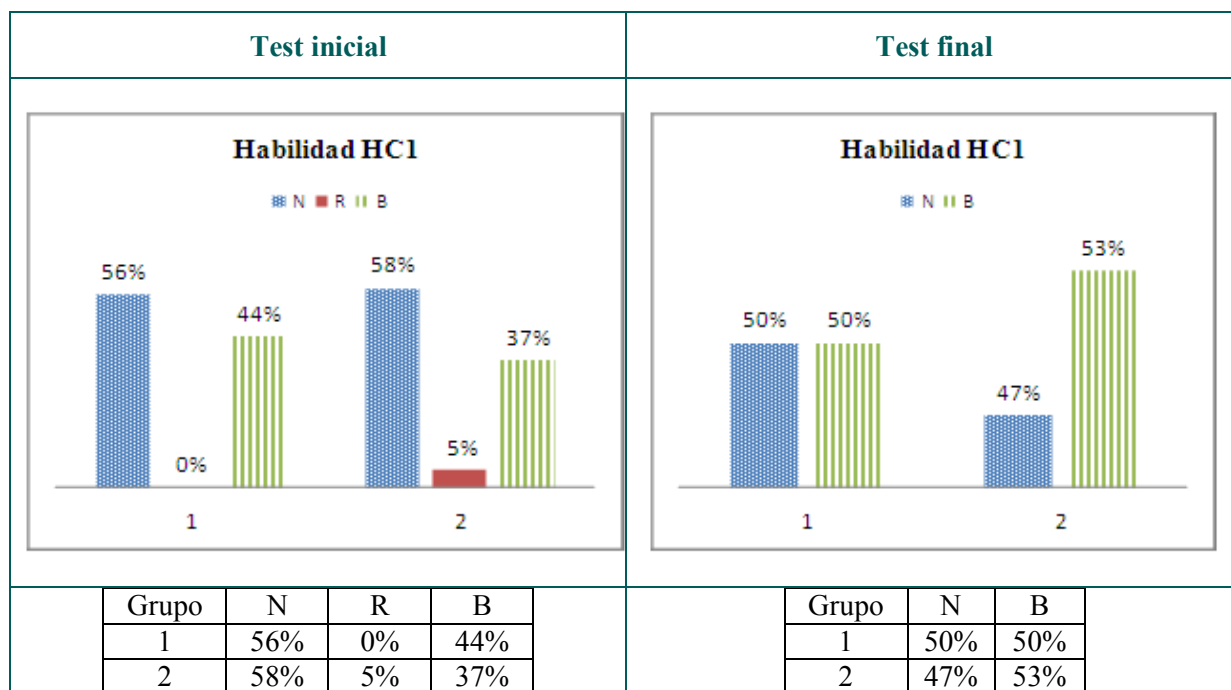


Figura 2. Segunda manifestación de HC1 ( $N_1 = 18$ ,  $N_2 = 19$ , fuente propia).



En el test inicial en los dos grupos más de la mitad de los alumnos contestó mal o no hace el ejercicio. Si bien la habilidad conceptual es la misma que en el apartado anterior, notamos que al brindar la ecuación de la recta tangente en forma analítica (en vez de dar el gráfico), los resultados en los dos grupos, fueron mejores. Un error común, y similar al explicado en la situación que precede a ésta, fue evaluar la recta tangente para  $x = -1$  y tomar ese valor como  $f'(-1)$ . Algunos consideraron la recta tangente como la función derivada  $f'(x)$  y explicaron que por esa razón para hallar  $f'(-1)$  reemplazaban  $x$  por  $-1$ . Otros despejaron “ $y$ ” en la ecuación de la recta tangente y derivaron dicha expresión, obteniendo el valor correcto, caso que consideramos mal y por lo tanto evaluado con N.

En el test final los dos grupos tienen frecuencias porcentuales similares: la mitad de los alumnos tiene un buen desempeño de esta habilidad.

La misma habilidad brindada en registros de representación diferentes, manifiesta un progreso más notorio en el Grupo 1 cuando trabajamos gráficamente, y más evidente en el Grupo 2 cuando el registro es analítico.

### 7.2. Habilidad conceptual: Reconocer el concepto en otras ciencias o contextos (HC2)

En el ejercicio 1 del test inicial trabajamos con la derivada en la Física como velocidad instantánea y el cociente incremental como velocidad promedio de una pelota que cae, habiendo dado la distancia recorrida (en metros) del objeto, al cabo de  $t$  segundos. En el test final volvimos a recurrir a la Física para evaluar esta habilidad conceptual, manifestándose también en dos instancias: cálculo de la velocidad promedio en dos intervalos de una pelota que es lanzada hacia arriba (como dato damos la distancia de dicho objeto desde el suelo en función del tiempo) y cálculo de la velocidad instantánea para el instante  $t = 1$ .

La primera manifestación de la habilidad conceptual mencionada se da cuando el alumno plantea la velocidad promedio como cociente incremental en los dos intervalos solicitados. Es por esto que el criterio de evaluación que dispusimos, para este ítem en ambos test, es el siguiente:

Ejercicio	Criterios de evaluación		
	N	R	B
Ejercicio 1 d). Test inicial y final.	Si el alumno no efectúa el cálculo de la velocidad promedio o lo hace mal.	Si lo realiza en un solo intervalo o se equivoca en la expresión del cociente incremental en algún paso insignificante.	Si lo plantea y calcula bien para los dos intervalos solicitados. Cabe aclarar que algunos alumnos simplificaron la expresión y otros la dejaron indicada. Como no solicitamos dicha simplificación, consideramos Bien los dos casos.

Tabla 5. Criterios de evaluación de desempeño de la habilidad HC2 (ejercicio 1d)).

Veamos los resultados en las dos ocasiones:



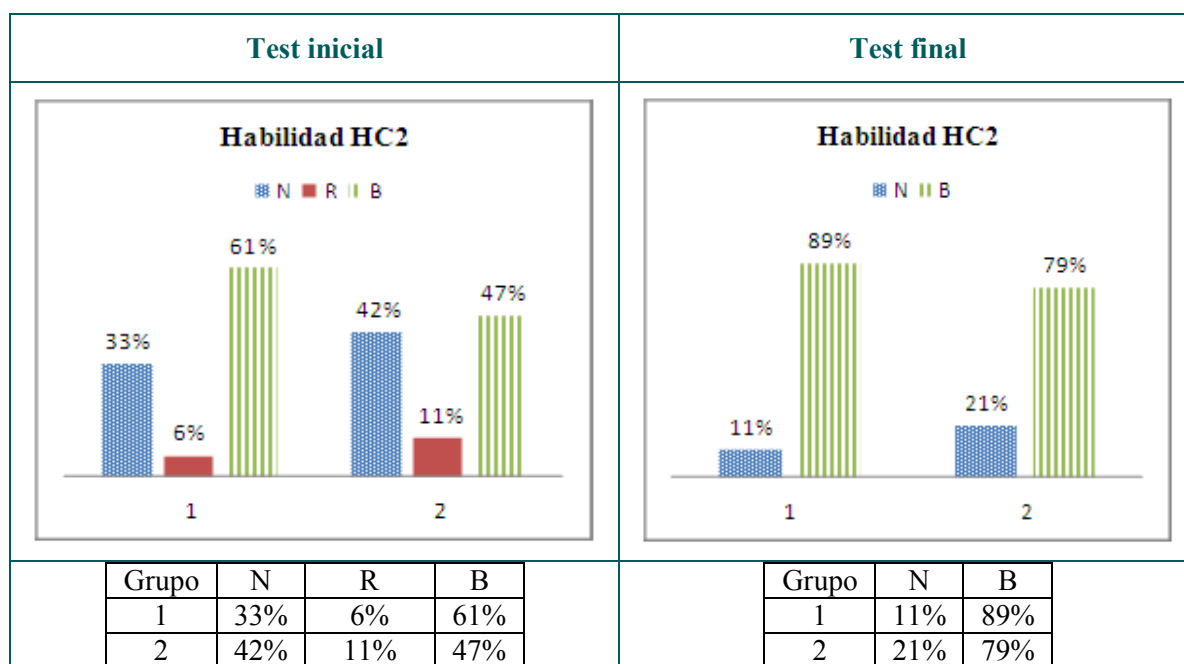


Figura 3. Primera manifestación de HC2 ( $N_1 = 18$ ,  $N_2 = 19$ , fuente propia).

Notamos una mejoría en los niveles de desempeño de esta habilidad en ambos grupos comparando los resultados de los dos test. En los dos casos, redujeron considerablemente el porcentaje de alumnos evaluados con N en esta habilidad. Podemos decir que prácticamente los alumnos reconocen al cociente incremental como velocidad promedio en un intervalo determinado. Reiteramos que en esa ocasión no nos interesa la manipulación algebraica.

En el test inicial un porcentaje de alumnos obtuvo desempeño Regular debido a que calcularon la velocidad promedio en un solo intervalo, comportamiento que no se repitió en el test final.

En el ítem siguiente al anterior pedimos la velocidad instantánea de la pelota para un instante dado ( $t = 2$  en el caso del test inicial,  $t = 1$  en el test final). El alumno podía calcularla como límite de la velocidad promedio que había planteado en el punto anterior o derivando la función original, ya que conocía los dos procedimientos. Los criterios de evaluación para esta habilidad son:

Ejercicio	Criterios de evaluación		
	N	R	B
Ejercicio 1 e). Test inicial y final,	Si el alumno no hace el ejercicio o lo plantea mal.	Si plantea la velocidad instantánea como la derivada en el punto pero se equivoca en algún paso algebraico o se equivoca al aplicar alguna regla de derivación.	Si reconoce la derivada como límite de la velocidad promedio tomando límite en la expresión hallada en el ítem 1d) y lo calcula bien o derivando la función y reemplazando en el instante considerado.

Tabla 6. Criterios de evaluación de desempeño de la habilidad HC2 (ejercicio 1e).

Obtuvimos las siguientes frecuencias en este caso



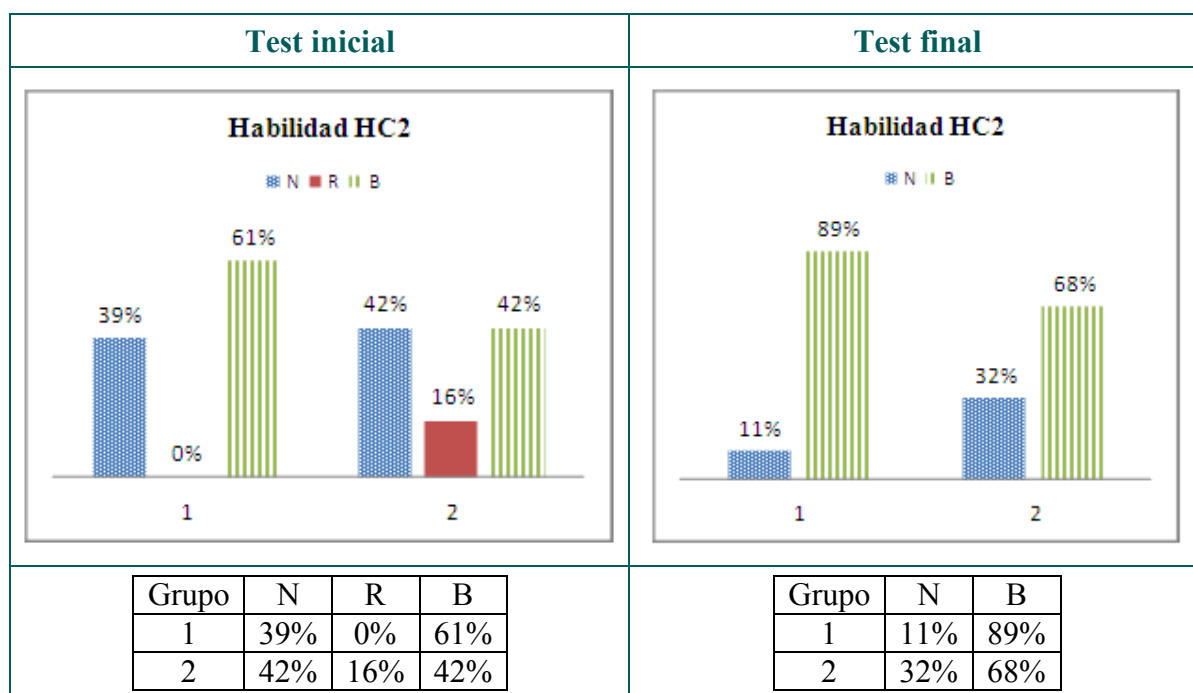


Figura 4. Segunda manifestación de HC2 ( $N_1 = 18$ ,  $N_2 = 19$ , fuente propia).

La mejora fue notable en los dos grupos. La mayoría de los alumnos identifica el concepto de derivada como la velocidad instantánea cuando la función dada tiene que ver con el espacio recorrido de un objeto o su distancia al suelo en función del tiempo.

### 7. 3. Habilidad conceptual: Extraer o dar significado a expresiones dadas en forma simbólica o formal

En el último ejercicio de los dos test trabajamos con dos expresiones dadas en forma simbólica: una de derivada y la otra de cociente incremental. En el primer ítem, el alumno debía responder si el límite dado correspondía o no a la derivada de la función en el punto  $x = a$ . Para evaluar si el alumno posee o no la habilidad HC3, debemos ver plasmada en su respuesta alguna explicación que nos permita deducir si Extrae o Da significado a la expresión, de acuerdo a las ideas de Tall y Fusaro (2002). Esta aclaración nos conduce a formular los siguientes criterios de evaluación para el primer ítem del mencionado ejercicio, común a ambos test.

Ejercicio	Criterios de evaluación		
	N	R	B
3 a) test inicial y final	Si el alumno sólo dice “verdadero por definición”, o no lo hace, o lo hace mal.	Si Extrae o Da significado pero en lo que justifica (ya sea definición de derivada o gráfico), se equivoca en algún paso o argumento.	Si Extrae significado apelando explícitamente a la definición de derivada y la escribe simbólicamente en forma correcta. Da significado bien si apela a un gráfico o imagen para justificar y lo realiza en forma correcta.

Tabla 7. Criterios de evaluación de desempeño de la habilidad HC3 (ejercicio 3a)).

Los resultados obtenidos en esta habilidad son los siguientes:

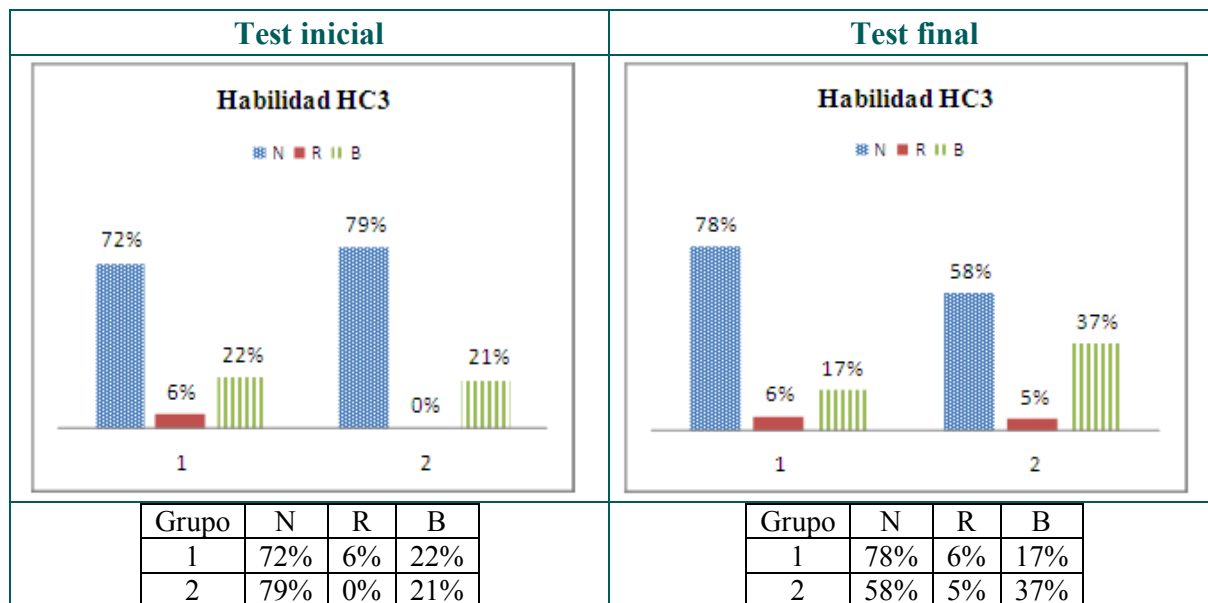


Figura 5. Primera manifestación de HC3 ( $N_1 = 18$ ,  $N_2 = 19$ , fuente propia).

En los resultados observamos el alto porcentaje de alumnos que no manifestaron esta habilidad en forma explícita. Observando los resultados del test final el Grupo 1 tuvo un comportamiento similar al del test inicial, la mejora en este caso se produjo en el Grupo 2. Todos los alumnos que manifestaron la habilidad fueron “Extractores” de significado, es decir, apelaron a la definición de derivada en forma simbólica para justificar que la proposición dada es verdadera. Ningún alumno, considerando también al Grupo 1, fue “Dador” de significado, esto es, utilizó un gráfico o esquema para dar su argumento.

El otro ítem del último ejercicio donde podemos vislumbrar el desarrollo de esta habilidad HC3, es aquel en que damos la fórmula del cociente incremental y decimos que es la pendiente de la recta tangente al gráfico de una función  $y = f(x)$  en un punto de abscisa  $x = a$ . La proposición es falsa. Los criterios de valoración que establecimos en este caso son:

Ejercicio	Criterios de evaluación		
	N	R	B
Ejercicio 3 b) Test inicial y final.	Si el alumno no lo hace o toma la proposición como verdadera.	Si sólo explica que el cociente dado es la pendiente de la recta secante (con la expresión formal <i>Extrae significado</i> , con el gráfico, <i>Da significado</i> ); o sólo explica que para que sea la pendiente de la recta tangente falta calcular límite a la expresión dada.	Si explica correctamente dos cosas: que el cociente planteado es la pendiente de la recta secante y escribe cuál sería la pendiente de la recta tangente. Esto lo puede realizar con expresiones formales ( <i>Extrae significado</i> ) o con gráficos ( <i>Da significado</i> ).

Tabla 8. Criterios de evaluación de desempeño de la habilidad HC3 (ejercicio 3b)).

Veamos las frecuencias relativas porcentuales obtenidas:



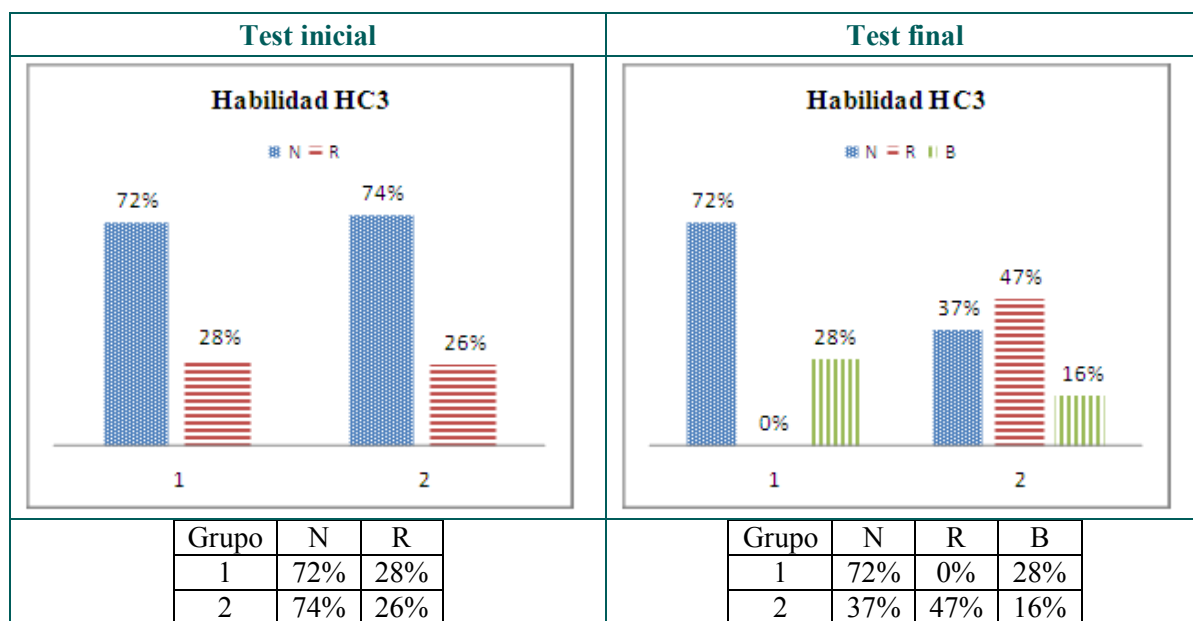


Figura 6. Segunda manifestación de HC3 ( $N_1 = 18$ ,  $N_2 = 19$ , fuente propia).

En el test inicial no obtuvimos resultados B (bien), ya que ningún alumno plasmó en su trabajo las dos respuestas esperadas, por un lado explicar que ese cociente es la pendiente de la recta secante, y por el otro dar la expresión correcta de la pendiente de la recta tangente. En general, para los alumnos que lo hicieron R (regular), sólo aclararon que al cociente dado le faltaba “el límite” para que sea la pendiente de la recta tangente. Del total de alumnos con desempeño R (regular), cuatro “Dan significado” a la expresión explicando con un gráfico y los demás “Extraen significado” escribiendo la definición formal de derivada en un punto.

Comparando los dos test, el Grupo 1 mantuvo el mismo porcentaje de mal desempeño. Los alumnos de este grupo no obtuvieron desempeño R (regular) en el test final, esto es, el que explicó por qué la proposición es falsa, lo hizo argumentando sobre los dos aspectos: que la expresión dada es la pendiente de la recta secante y brindando en forma correcta la pendiente de la recta tangente. En el caso del Grupo 2 disminuye considerablemente el porcentaje de alumnos que no manifiesta la habilidad y aumenta los que poseen desempeño regular o bien.

## 8. Conclusiones

Obtuvimos, en general, progresos en el desarrollo de las habilidades conceptuales en ambos grupos luego de haber puesto en juego el dispositivo didáctico.

### 8.1. Sobre las habilidades conceptuales

Respecto a la habilidad conceptual de interpretación geométrica de la derivada (HC1), se evidencia una evolución favorable en el desarrollo de la misma. Los alumnos que trabajaron con el software lograron progresar más en sus registros gráficos, manteniendo el mismo nivel en su trabajo algebraico. El progreso considerable en esta habilidad trabajando con gráficos, nos sugiere que el software favorece la visualización, es decir, el proceso de formar imágenes con el auxilio de alguna herramienta, en este caso la tecnología (Zimmerman y Cunningham, citado en Torroba et al, 2009, p.1). Cabe aclarar que durante la experiencia, ese proceso de visualización en varias ocasiones se

produjo gracias a la orientación del docente: si bien los alumnos contaban con la computadora en algunas actividades el profesor tuvo que intervenir para que se produzca el proceso mencionado, no se dio en forma inmediata sólo por contar con tecnología. La situación en el Grupo 2 se manifiesta con una mejora menor cuando el registro es gráfico y manifestaron un avance notable cuando trabajaron con registros analíticos.

Los resultados sobre el desarrollo de la habilidad conceptual HC2 son muy buenos en ambos casos. Esto nos invita a incorporar a nuestras clases situaciones que reflejen a la derivada como razón instantánea de cambio en otras ciencias. Este concepto generalmente se deja de lado en las clases o se hace una mención muy rápida. Contreras, Luque, Ordoñez, Ortega y Sánchez (2000) en las conclusiones de su proyecto de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de conceptos fundamentales del Análisis Matemático, proponen “introducir el concepto de tasa de variación media e incidir en los ejemplos y problemas relativos a la misma” (p. 163).

Dolores (2000) señala que uno de los enfoques de enseñanza de la Derivada que prioriza el significado es el enfoque variacional, en el cual se parte de razones de cambio promedio en estudio de fenómenos de la vida diaria y se arriba a la derivada como razón de cambio instantánea basándose en la idea intuitiva de límite. Según este autor una propuesta didáctica basada en ideas variacionales, puede contribuir a la comprensión del concepto de derivada.

Con respecto a la habilidad HC3, pensamos que los instrumentos usados para su estudio, probablemente, deberían haber sido otros. La misma requiere una observación particular que puede ser planteada en investigaciones futuras. De todas maneras notamos que los alumnos ante una expresión dada en símbolos, la mayoría le otorga significado usando también símbolos y no apelando a un gráfico o esquema

## 8.2. Sobre las preguntas de investigación

Las preguntas de investigación que planteamos en este artículo:

- ¿Los alumnos de primer año de Ingeniería de la UNLaM poseen un nivel similar de desarrollo de habilidades matemáticas cuando trabajan con software que cuando lo hacen sin esta herramienta?
- ¿Cuáles de todas las habilidades estudiadas son las más promovidas con el uso del software?

las pudimos contestar luego de toda la investigación y no sólo con los resultados de los test sino también del análisis que efectuamos en las producciones de los alumnos de los dos grupos en las seis actividades realizadas.

Para limitarnos a lo aquí expuesto, respecto a la habilidad conceptual HC1 los alumnos del Grupo 1 tuvieron, en términos generales, a lo largo de toda la experiencia y considerando las actividades, mejor desempeño que el Grupo 2. En los test sólo lo evidenciamos en la figura 1. Estimamos que el trabajo gráfico con el programa, la claridad de las representaciones, la posibilidad de cambiarlos sin costo ni esfuerzo, fue una de las causas de que se produjera un mejor nivel de desempeño en esta habilidad.

Respecto de las demás habilidades los dos grupos progresaron en su desempeño y lo hicieron con niveles similares. Como señalamos anteriormente, en esta experiencia combinamos diferentes espacios de enseñanza y aprendizaje:



- Expositiva-dialogada: la que nos permitió desarrollar temas teóricos con el tiempo destinado de acuerdo al cronograma de la asignatura. Mediante la misma brindamos los principales contenidos que luego continuamos trabajando en los demás espacios.
- Taller (en dos entornos diferentes, con uso de computadora y de lápiz y papel): posibilitó que el alumno adoptara una posición activa, que compartiera ideas y trabajo con sus compañeros, que se forme más que se informe, siendo el profesor mediador y orientador. En este espacio utilizamos las actividades especialmente diseñadas para desarrollar las habilidades estudiadas en la investigación.
- Trabajo en el aula en la clase práctica: el profesor de trabajos prácticos desarrolló ejercicios en el pizarrón y también creó espacios para que los alumnos resolvieran algunos ejercicios en clase.

Pensamos que esta combinación favoreció la creación de un ambiente de trabajo dinámico y motivador que, junto con el dispositivo de enseñanza aplicado, se vio reflejado en el desarrollo de habilidades en ambos grupos de forma similar.

### 8.3. Sobre el uso del software

De acuerdo a los resultados de los test en habilidades conceptuales obtuvimos un progreso en ambos grupos. Creemos que este resultado es alentador en la medida que el alumno que trabaja con software puede desarrollar habilidades conceptuales y además aprender el uso de una herramienta diseñada para ser soporte en su futura vida profesional como ingeniero. El *Mathematica* es un programa específico de Matemática que puede, por ejemplo, facilitar tareas de desarrollo e investigación, pudiendo ser de gran utilidad en la vida laboral del estudiante. Del Castillo y Montiel (2009), reafirman lo anteriormente explicado diciendo que “todo instrumento es conocimiento”. En el caso de los alumnos del Grupo 1 pudieron lograr dos tipos de aprendizaje, el de las habilidades matemáticas promovidas y el del uso de la herramienta mencionada.

Siguiendo esta idea el conocimiento que se adquiere al resolver una tarea con CAS es del tipo mixto: matemático y sintáctico (Berger, 2009) logrando una integración entre la herramienta y los objetivos emprendidos, convirtiendo a este último en un verdadero instrumento de trabajo, reutilizable en otras situaciones.

Otro punto importante para agregar es que los alumnos que trabajaron en el entorno computacional no descuidaron las habilidades propias del entorno de lápiz y papel como pueden ser: plantear y resolver ecuaciones, derivar una función usando reglas de derivación, calcular límites, entre otras. Esto se debió a que estas sesiones de trabajo de actividades con software se intercalaban con clases habituales teóricas y prácticas. Consideramos fundamental cuando se programan actividades de este tipo diseñar un equilibrio adecuado entre los dos entornos de trabajo con el fin de no descuidar aprendizajes propios de cada uno.

### Bibliografía

- Berger, M. (2009). Designing tasks for CAS classrooms: Challenges and opportunities for teachers and researchers. En Kadujevich, D. y Zbiek, R. (Eds) *Proceedings of the 6<sup>th</sup> CAME Symposium*, 5-10. Megatrend University: Belgrado.
- Camacho, M. (2005). La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS. En Maz Machado, A., Gómez Alfonso, B. y Torralba Rodríguez, M.(eds.) *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 97-110. SEIEM y Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba: España.

- Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) (2006). *Primer acuerdo sobre competencias genéricas. Primer y segundo informe*. Recuperado el 9 de septiembre de 2007 de [http://www.confedi.org.ar/component/option,com\\_docman/task,catalog\\_view/gid,20/dir,DESC/order,date/limit,5/limitstart,5/](http://www.confedi.org.ar/component/option,com_docman/task,catalog_view/gid,20/dir,DESC/order,date/limit,5/limitstart,5/)
- Contreras, A., Luque, L., Ordoñez, L., Ortega, M. y Sánchez, C. (2000). *Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes del bachillerato-logse y de primer curso universitario*. Recuperado el 23 de julio de 2009 en <http://www.doredin.mec.es/documentos/080100029.pdf>
- Contreras, A., Font Moll, V., García Armenteros, M., Luque Cañada, L., Marcolini Bernardi, M., Ordoñez Cañada, L., Ortega Carpio, M.; Sánchez Gómez, C. (2005). Aplicación del programa Mathematica a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. En A. Maz Machado, B. Gómez Alfonso y M. Torralba Rodríguez (Eds.). *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 271-282). España: SEIEM y Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- Cuevas Vallejos, C. (s.f.) *¿Qué es software educativo o software para la enseñanza?* Recuperado el 5 de octubre de 2009, de <http://www.matedu.cinvestav.mx/~ccuevas/SoftwareEducativo.htm>
- Cuicas, M., Debel, E., Casadei, L. y Álvarez, Z. (2007). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. *Actualidades Investigativas en Educación*, 7 (2), 1-34. Recuperado el 16 de junio de 2009 de <http://revista.inie.ucr.ac.cr>
- Del Castillo, A. y Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. En Leston, P (ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 459-467. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa: México.
- Delgado Rubí, J.R. (1998). Los procedimientos generales matemáticos. En Hernández, H., Delgado Rubí, J., Fernández, B., Valverde, L. y Rodríguez, T. (eds) *Cuestiones de didáctica de la Matemática*, 69-87. Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones: Rosario.
- Depool, R. y Camacho, M. (2001). *Influencias en el uso de las nuevas tecnologías en la actitud y rendimiento académico de los estudiantes de Cálculo*. Recuperado el 2 de agosto de 2009, de <http://tecnologiaedu.us.es/eusXXI/Programa/paginas/regionlarayaracuy/Depol%20y%20Camacho.doc>
- Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En Cantoral, R. (ed) *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME 8*, 155-181. Grupo Editorial Iberoamérica: México.
- Esteban, M. (2002). El diseño de entornos de aprendizaje constructivista. *RED. Revista de educación a distancia*, 6. Recuperado el 17 de julio de 2009, de <http://www.um.es/ead/red/6/documento6.pdf>
- Falsetti, M., Favieri, A., Scorzo, R. y Williner, B. (2012) Actividades de cálculo diferencial con computadora: estudio de habilidades matemáticas desarrolladas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 13 (1).
- Guzmán, M. (1991). Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática. En Abellanas, M. y García, A. (eds) *Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad*, 9-27. Universidad Politécnica de Madrid: España.
- Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19-58.
- Hernández, H. (1998). Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana. En Hernández, H., Delgado Rubí, J., Fernández, B., Valverde, L. y Rodríguez, T. (eds) *Cuestiones de didáctica de la Matemática*, 33-53. Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones: Rosario.
- Hernández, R., Fernández, C y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ta ed.). México: Mc Graw Hill.
- Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de objetos matemáticos en ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 213-223.
- Hitt, F. y Cortés, C. (2001). Hacia el siglo XXI: Funciones en contexto en formato electrónico. En Cortés, C., Hitt, F., Sepúlveda, A. y Guerrero, L. (eds) *Memorias de la Conferencia Internacional*



- sobre el Uso de Tecnología en la Enseñanza de la Matemática y Noveno Encuentro de Profesores de Matemática del Nivel Medio Superior, 118-123. México.
- Jonassen, D., Carr, Ch. y Yueh, H-P. (1998). Computers as mindtools for engaging learners in critical thinking. *TechTrends*, 43 (2), 24-32.
- La Taxonomía de Bloom y sus dos actualizaciones. (s.f.). Recuperado el 15 de noviembre de 2009 de <http://www.eduteka.org/TaxonomiaBloomCuadro.php3>
- Leonetti, A., Medina, E., Alday, M., Sowter, C., Pandiella, S., Quiroga, R. y Pandiella, P. (2007). *La formación docente y la calidad de la educación en el marco de la Enseñanza para la Comprensión*. Recuperado el 10 de agosto de 2010 de <http://www.feeye.uncu.edu.ar/web/posjornadasinve/area4/Formacion%20docente%20y%20evaluacion%20en%20la%20formacion%20docente/104%20-%20Leonetti%20y%20Otras%20-%20UN%20San%20Juan.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *The Use of Technology in the Learning and Teaching of Mathematics*. Recuperado el 4 de agosto de 2009 de <http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=6360&itemid=6360&linkidentifie=id>
- Oteiza, F., Silva, J. y Equipo Comenius (2001). *Computadores y comunicaciones en el currículo matemático*. Recuperado el 5 de enero de 2010 de <http://www.eduteka.org/pdfdir/SilvaMatematicas.pdf>
- Salinas Ibáñez, J. (1994). Hipertexto e hipermedia en la enseñanza universitaria. *Píxel-bit. Revista de medios y educación*, 1. Recuperado el 18 de marzo de 2010 de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1410243>
- Sánchez, M (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades del pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 4 (1). Recuperado el 4 de diciembre de 2009 de <http://redie.ens.uabc.mx/vol14no1/contenido-amestoy.html>
- Tall, D. y Fusaro, M. (2002). *Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning*. Recuperado el 7 de agosto de 2009 en <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999g-pinto-pme.pdf>
- Torroba, E., Etcheverry, N y Reid, M. (2009). Explorando el rol de la visualización en experiencias de cátedra. *TE&ET. Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, 3. Recuperado el 13 de enero de 2010 de <http://teyet-revista.info.unlp.edu.ar/nuevo/files/No3/TEYET3-art01.pdf>
- Torroba, E., Reid, M., Etcheverry, N. y Villareal, M. (2006). Los estudiantes proponen un problema: una posibilidad favorecida por los ambientes computacionales informatizados. *Revista UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 7, 39-51. Recuperado el 8 de marzo de 2008 de [http://www.fisem.org/web/union/revistas/7/Union\\_007\\_005.pdf](http://www.fisem.org/web/union/revistas/7/Union_007_005.pdf)
- Trouche, L. (2003). *Managing the complexity of human/machine environment (CBLE): guiding student's process command through instrumental orchestrations*. Recuperado el 6 de julio de 2010 de <http://www.lkl.ac.uk/research/came/events/reims/2-Presentation-Trouche.doc>
- Vílchez Quesada, E. (2007). Sistemas expertos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación superior. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 3, 42-64.
- Zabala, A. (2007). Los enfoques didácticos. En Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé I. y Zabala, A. (eds) *El constructivismo en el aula*, 125-161. Editorial GRAÓ: Barcelona.

**Betina Williner.** Universidad Nacional de La Matanza, Argentina. Es Magister en Educación en Ciencias (Orientación Matemática) y Licenciada en Matemática Aplicada. Es profesora adjunta, investigadora y Jefa de Cátedra de Análisis Matemático I de la Universidad Nacional de La Matanza, profesora adjunta de la Universidad Tecnológica Nacional (Argentina), profesora asociada de la Universidad de Morón (Argentina). Líneas de investigación: habilidades matemáticas, uso de software en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, hipertextos para aprender matemática.  
Email: [bwilliner@ing.unlam.edu.ar](mailto:bwilliner@ing.unlam.edu.ar)