NÚMEROS
Revista de didáctica de las matemáticas
Nº 29, marzo de 1997, págs. 40-45

Procesos iterativos en bachillerato

Cástor Molina Iglesias

Los métodos iterativos en Bachillerato (LOGSE) se pueden introducir a través de las progresiones, que los alumnos deberían conocer ya (progresiones aritméticas y geométricas, posiblemente finitas, vistas como parte de su estudio de la proporcionalidad durante la E.S.O.); en otro caso, se podría aprovechar este enfoque para examinarlas. Los problemas prácticos que requieren el estudio de las progresiones, son innumerables tanto desde fuera como desde dentro de las propias matemáticas; incluso problemas implicando sumas infinitas de términos en progresión (el cálculo clásico de las áreas suministra muchos ejemplos).

Otra aproximación[1] a los métodos iterativos puede ser mediante la repetición de la pulsación de una tecla de función en la calculadora (x^2, *cos*(x), *tg*(x), ...) a partir de un valor inicial dado y observando el comportamiento a largo plazo. Esto nos lleva al estudio de los fenómenos caóticos, muy interesantes y motivadores.

Se considera una sucesión de números reales (x_n) cuyos términos se obtienen recurrentemente por medio de una función generadora g(x) como sigue:

$$\begin{cases} x_0 & \text{es un valor inicial arbitrario} \\ x_n = g(x_{n-1}) & \text{para } n \geq 1 \end{cases}$$

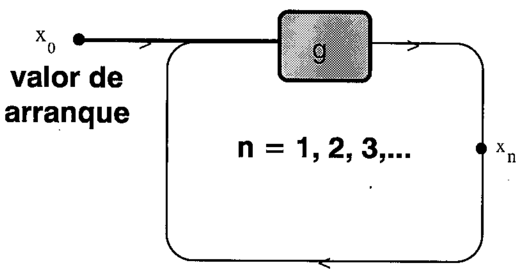

Figura 1

---

1 *Ian Stewart, ¿Juega Dios a los dados?, Grijalbo Mondadori S.A.,1991, pág.23-.*

Esta sucesión se denomina un *proceso iterativo* (repetitivo); diagramas como el de la figura 1 son muy sugerentes y útiles para captar el concepto.

Como casos particulares de la función generadora, tenemos:

- $g(x) \equiv x + d$ progresiones aritméticas (de diferencia constante d)
- $g(x) \equiv r\,x$ progresiones geométricas (de razón constante $r \neq 0$)

Fórmulas

¿Qué relación hay entre dos términos cualesquiera de la sucesión que determina un proceso iterativo? Aunque el desarrollo que sigue pueda parecer un tanto abstracto, no se trata de exponerlo tal cual a los alumnos, sino únicamente de citar las ideas que deben alcanzar a partir de la reflexión y la manipulación.

A partir del diagrama anterior es obvio que:

$$x_n = g^{(n)}(x_0)$$

para $n \geq 0$, donde $g^{(n)}$ representa aplicar g sucesivamente n veces; por convenio $g^{(0)}$ es la identidad.

Del mismo modo, el alumno comprobará, tal vez tomando valores particulares de $n,m \geq 0$, que:

$$g^{(n+m)} = g^{(n)} \circ g^{(m)}$$

donde $\circ$ denota la *composición* de aplicaciones; a continuación se le puede plantear si esta fórmula tendrá sentido y será cierta para n,m enteros cualesquiera e incluso ver la similitud con las fórmulas para la función exponencial de base numérica. De las fórmulas vistas se obtiene en seguida que:

$$x_{n+m} = g^{(n)}(x_m)$$

De la particular elección de la g(x), resultan las conocidas fórmulas para las progresiones:

- aritméticas: $x_{n+m} = x_m + nd, \quad x_n = x_0 + nd$
- geométricas: $x_{n+m} = x_m\, r^n, \quad x_n = x_0\, r^n$

Trabajos

Se puede proponer a los alumnos investigar la fórmula del término general de otros procesos iterativos simples; por ejemplo:

1. $g(x) \equiv x^r,\ x > 0$
2. $g(x) \equiv ax + b$

Convergencia

El estudio del comportamiento de los términos de la sucesión en un proceso iterativo, cuando n crece indefinidamente, se puede hacer con la calculadora y gráficamente (mediante los conocidos diagramas del tipo siguiente):

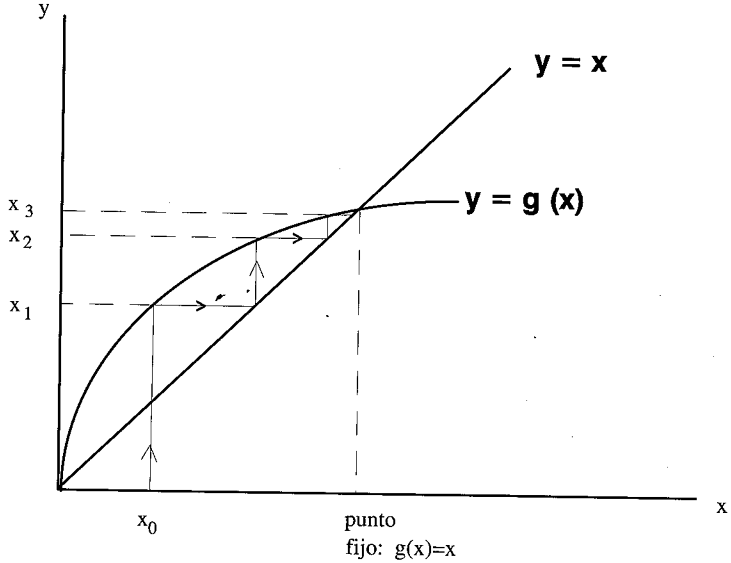

Figura 2

Así, por ejemplo, las progresiones aritméticas divergen a $\pm\infty$ siempre, si $d \neq 0$; las progresiones geométricas, convergen a 0 si $0 < r < 1$; divergen a ∞, si $r > 1$. Otros comportamientos, pueden estudiarse para: $g(x) \equiv mx + n$, $g(x) \equiv \cos(x)$, y $g(x) \equiv \mathrm{tg}(x)$.

Merece la pena estudiar el comportamiento de la conocida función generadora: $g(x) \equiv c\,x(1-x)$ para x_0 inicial en el intervalo (0,1) y diferentes valores[2] del parámetro c en (1,4). Otro ejemplo simple a estudiar, del mismo tipo, es: $g(x) \equiv c\ \mathrm{sen}(x)$.

2 *Véase, por ejemplo, pág. 221-. del libro de COU de J. Colera y M. de Guzmán de Ed. ANAYA así como la obra citada de Ian Stewart, pág. 201-.*

Puntos fijos

Puede enunciarse el intuitivo teorema de Brouwer, sobre la existencia de puntos fijos para una función continua que aplica un intervalo [a,b] en sí mismo, y su interpretación geométrica:

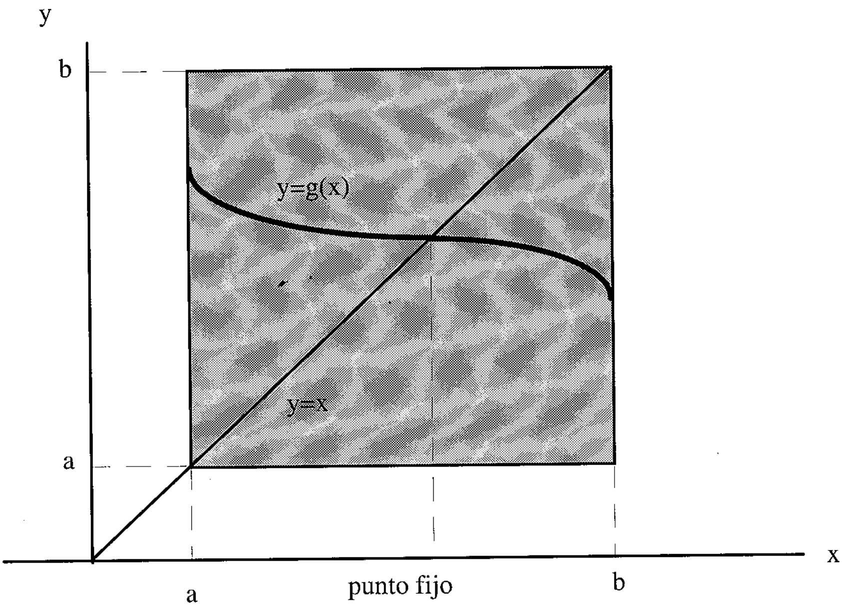

Figura 3

Es imposible unir con un trazo continuo dos lados opuestos de un cuadrado, sin atravesar ninguna de sus diagonales.

Así, manteniéndonos dentro de tal clase de funciones g(x), el alumno observará que si el proceso iterativo converge, digamos a x_∞, entonces: $g(x_\infty)=x_\infty$, es decir, lo hace hacia un punto fijo para g(x). Geométricamente, hacia la abscisa del punto donde la gráfica de y=g(x) corta a la recta y=x.

No parece conveniente en 1°, tal vez sí en 2°, de Bachillerato enunciar teoremas de convergencia. El autor de este artículo, lo ha venido haciendo en una optativa de Matemáticas de 2° de Bachillerato denominada MODELOS, ALGORITMOS Y SIMULACIÓN[3] (abreviada M.A.S.y anteriormente llamada *Rudimentos de Cálculo Científico*, en las Enseñanzas Experimentales); en todo caso, podemos pasar por alto las demostraciones y limitarnos al marco de lo puramente intuitivo. Los teoremas considerados en M.A.S. fueron:

- el de la aplicación *contractiva* que da una condición suficiente para la existencia y unicidad del punto fijo, proporcionando además una cota geométrica para la velocidad de convergencia: $|x_n - x_\infty| \leq C\lambda^n$, donde $\lambda \in (0,1)$ es la *constante de contracción*
- una condición suficiente de contractividad, más fácil de manejar en los problemas, que es la acotación en valor absoluto de la primera derivada por $\lambda<1$ en el intervalo considerado.

Si conviene desarrollar las intuiciones que lleven a obtener procesos iterativos convergentes (forma *achaparrada* de la curva y=g(x), esto es, cualquier secante de la misma teniendo una pendiente pequeña). Ello se puede hacer a través del estudio del comportamiento de $g(x) \equiv cx(1-x)$ (parábola con las ramas hacia abajo) para diferentes valores del parámetro *c*, que ya se mencionó al final del apartado anterior.

Resolución de ecuaciones

Puede ensayarse la solución de ecuaciones f(x) = 0, escribiéndolas en la forma equivalente: x = g(x), y tratar de buscar un proceso iterativo convergente basándose en las intuiciones desarrolladas

Para empezar, podemos partir de ecuaciones simples de resultado conocido como, por ejemplo, x = 3/2, despejando x en diferentes formas que produzcan comportamientos diferentes de las sucesiones de valores; así, con $x_0=1$: $g_1(x) \equiv 3-x$ tiene un comportamiento oscilante entre 1 y 2, $g_2(x) \equiv 3(x-1)$ lleva a un proceso divergente a $-\infty$ y $g_3(x) \equiv x/3+1$ a un proceso convergente a 3/2.

Luego se puede continuar con otras ecuaciones simples como: sen (x) - x/2 = 0 y algunas otras con significado geométrico claro. Otro ejemplo, algo más complicado: la ecuación:

$$e^x = 2\cos(x)$$

---

3 *Esta optativa se imparte en la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud con un enfoque hacia los métodos numéricos y en Humanidades y Ciencias Sociales, hacia la investigación operativa.*

se puede escribir en la forma: x=g(x) de varias formas; entre ellas:

$$g_1(x) \equiv \frac{2x\cos(x)}{e^x} \quad \text{y} \quad g_2(x) \equiv \ln[2\cos(x)]$$

ambas convergiendo para x_0=0.75, a la solución (con redondeo a 5 decimales): 0.53978.

En todos los casos, conviene dibujar y examinar la forma más o menos aplastada de la g(x) para que el alumno pueda crear las intuiciones adecuadas de como esa forma influye en la convergencia hacia x=g(x).

Ayuda del ordenador

Algunos programas de ordenador, pueden ser una herramienta útil en el estudio de las progresiones, los procesos iterativos y su convergencia. Por citar algunas funciones interesantes de los más populares en Secundaria y Bachillerato:

1) DERIVE
   - la función **vector**, permite generar sucesiones finitas, a partir de su término general
   - el menú **calculus** permite calcular límites, sumas y productos (finitos o no) de sucesiones

2) GRÁFICOS
   - la opción punto fijo del menú *Resolución de ecuaciones*, permite ver la convergencia de un proceso iterativo a la vez gráfica y numéricamente

3) Otro recurso muy útil, para estudiar el comportamiento de los procesos iterativos, por su alto valor didáctico y facilidad de manejo, son las *Hojas de cálculo* (Lotus 1-2-3, Qpro, Excel, ...).

Cástor Molina Iglesias
Instituto de Bachillerato "Poeta Viana"
Simón Bolivar, 7
Santa Cruz de Tenerife