REGLA DE TRES Y REDES: DOS MUNDOS*

M. Candelaria Espinel y Alicia Bruno

En este trabajo mostramos las diferentes estrategias de alumnos de Matemáticas y de Informática ante una misma situación problemática. Se observa una gran influencia de los conocimientos sobre teoría de grafos en los alumnos de Informática, que les lleva a plantear problemas que el resto de los alumnos no consideran. Encontramos también diferencias en las técnicas de resolución y en los lenguajes utilizados.

INTRODUCCIÓN

La Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas ha organizado tres seminarios sobre Lenguaje y Matemáticas, como actividades programadas en el Convenio de Colaboración del Ministerio de Educación y la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Bajo el título de este Seminario cabe varias interpretaciones, una de las más frecuentes es el uso ambiguo de términos, por ejemplo, las palabras **«cubo»**, **«matriz»**, **«árbol»**, ... tienen un uso en la vida cotidiana, bien distinto de su significado matemático. Esta ambigüedad puede ser fuente de dificultad para la comprensión de algunos conceptos matemáticos.

* *Este trabajo se presentó durante el ICME 8 (Sevilla, 1996) en el Grupo de Trabajo* ***«Lenguaje y Matemáticas»***.

En el Primer Seminario la revisión bibliográfica entregada y los trabajos presentados por los ponentes mostró una amplia interpretación del término. En el Monográfico **«Lenguaje y Matemáticas»**, número 16 de la revista Suma (1994), fruto de este Seminario, se recogen algunos trabajos en relación con el lenguaje en la resolución de problemas, el lenguaje de los grafos, lenguaje y pensamiento, lenguaje verbal y escrito, paso de unos lenguajes a otros, etc.,

En el Segundo Seminario se diseñó un Proyecto de Trabajo para estudiar tipos y usos de lenguajes por parte de estudiantes de distintos niveles (alumnos de Primaria, Secundaria, Bachillerato y Magisterio). Para este análisis se prepararon distintos problemas con el fin de estudiar el lenguaje verbal, gráfico y numérico.

El trabajo que presentamos aquí, quiere ser un complemento del citado proyecto. Hemos analizado uno de los problemas del proyecto desde otra perspectiva, centrándonos en el tipo de conocimiento que surge ante una misma situación, en función del conocimiento o el tipo de representación que se está acostumbrado a usar.

Para ello, ampliamos la muestra a estudiantes de la Facultad de Matemáticas y de Informática, ya que intuíamos un comportamiento muy distinto entre estos dos grupos de alumnos, a pesar de que ambos tienen una amplia formación en matemáticas.

El problema se le pasó a alumnos de tercero y quinto de Matemáticas y a alumnos de primero y quinto de Informática. A los estudiantes se les presentó el problema por uno de sus profesores sin dar ninguna explicación de la finalidad del mismo.

PROBLEMA

El problema considerado ha sido el siguiente:

Antonio salió por la mañana a hacer su trabajo de representante de comercio. Antes de salir a la carretera, llenó el depósito de gasolina y puso el cuentakilómetros parcial en cero. Por la tarde, al finalizar su trabajo, fue a la gasolinera y:

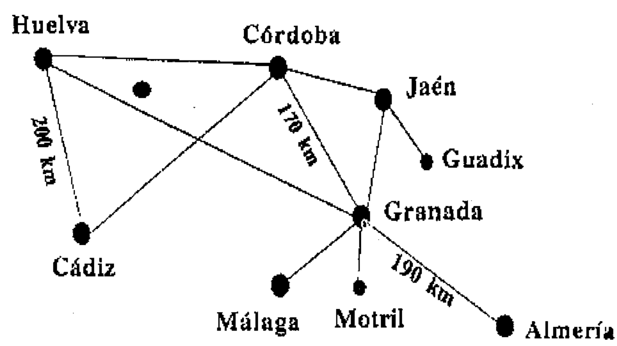
Llenó el depósito, y pagó: .... 4190 ptas.

Vio que el cuentakilómetros parcial marcaba: .... 588 km

Observó que el precio de la gasolina era: .... 98 ptas./l

Propuesta de trabajo

Utilizando los datos anteriores y el plano adjunto, enuncia situaciones problemáticas y resuélvelas. (Puedes utilizar otros datos que te hagan falta y no aparezcan aquí)



SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Enumeramos los tipos de problemas planteados por los dos grupos de alumnos, teniendo en cuenta las situaciones problemáticas que quieren resolver.

Las situaciones problemáticas mas frecuentes que formulan los alumnos de Matemáticas son:

- dinero gastado por el representante de comercio,
- distancia total recorrida,
- litros de gasolina consumidos en un trayecto determinado,
- consumo del coche,
- capacidad del depósito del coche,
- tiempo que tarda en hacer un recorrido determinado,
- ruta más económica,
- velocidad del coche,
- porcentaje de trayecto recorrido o porcentaje de litros de gasolina consumida.

Los estudiantes de Informática, además de las situaciones anteriores, contemplan cuestiones relacionadas con redes. Recogemos las cuestiones formuladas por estos estudiantes y entre paréntesis ponemos el nombre que recibe el problema en Teoría de Grafos:

- visitar todas las ciudades evitando pasar dos veces por la misma ciudad (circuitos hamiltonianos),
- partir de una ciudad y pasar por todas las demás para volver a la de partida, de forma que el circuito sea mínimo (viajante de comercio),
- número máximo de ciudades a visitar, fijada una cantidad de dinero o bien, rutas posibles a la vista del cuentakilómetros o del gasto de gasolina (viajante de comercio y problema de la mochila),
- fijadas dos ciudades de inicio y final, buscar caminos de coste mínimo, (el método del P.E.R.T. ó camino crítico),
- elegir una ciudad con la propiedad de que la distancia máxima entre esa ciudad y las demás es la menor posible, o bien, elegir un punto del plano, ciudad o carretera, para colocar un local de forma que esté situado lo más cerca posible de la ciudad más alejada (problema de localización de centros),
- pasar por cada una de las carreteras una sóla vez (circuito euleriano, si se vuelve a la ciudad de partida, o bien, camino euleriano, si cada carretera se recorre una sóla vez pero no se ha de volver a la ciudad de partida; en general, recorridos eulerianos),
- búsqueda de recorridos eulerianos pero de coste mínimo (problema

del cartero chino),
- árbol que se extienda por todas las ciudades y además con recorrido mínimo (árbol mínimo),
- calcular todas las ciudades desde las cuales se puede alcanzar las restantes ciudades (encontrar las componentes fuertemente conexas del grafo),
- encontrar un subgrafo que permita alcanzar todas las ciudades, pero gastando la menor cantidad posible de gasolina (árbol generador mínimo),
- resistencia de la carretera, la densidad del tráfico, etc. (problemas de flujo),

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Los tipos de situaciones problemáticas formuladas por los estudiantes de Matemáticas les llevaron a técnicas sencillas de resolución, como son:

- regla de tres
- resolución de ecuaciones
- conceptos geométricos: triángulos, teorema de Pitágoras, ...

Ejemplos de los métodos de solución de los estudiantes de matemáticas:

Ejemplo 1

a) ¿Cuántos ℓ , al tanque?

SOL/ $\frac{4190}{98} = 42,75 \sim 43$ litros.

b) ¿Cuánto gasta su coche por km?

SOL/ 1 km — x ℓ
588 km — 42,755 ℓ.

$x = \frac{42,755}{588} = 0,0727$ ℓ/km

c) ¿Cuántos km puede recorrer con 1 ℓ. gasolina?

SOL/ x km — 1 ℓ
588 km — 42,755 ℓ

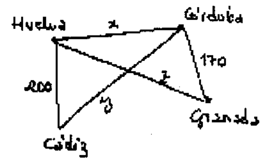
$x = 13,75$ km , casi 14 km (Nota [illegible] $y = \frac{1}{x}$)

Ejemplo 2

Si para hacer los recorridos (1), (2) y (3) gasta 5273 ptas, 5870 ptas y 7419 ptas, y sale siempre con el depósito lleno, ¿qué distancia habrá de Cádiz a Córdoba, de Huelva a Córdoba y de Huelva a Granada?

(1). Huelva - Cádiz - Córdoba - Huelva → 5273 ptas
(2) Huelva - Granada - Córdoba - Huelva → 5870 ptas
(3) Huelva - Cádiz - Córdoba - Granada - Huelva → 7419 ptas

SOL:
x ≡ distancia entre Huelva y Córdoba
y ≡ " " Cádiz y Córdoba
z ≡ " " Huelva y Granada



$\frac{x \text{ Km}}{13'75 \text{ Km}/l}$ ≡ litros de gasolina empleados para ir de Huelva a Córdoba

$\frac{x}{13'75} l \times 98$ ptas/l ≡ dinero gastado para ir de Huelva a Córdoba

$$1^{er} \text{ recorrido: } \frac{200}{13'75} \times 98 + \frac{y}{13'75} \times 98 + \frac{x}{13'75} \times 98 = 5273$$

$$2^{o} \text{ recorrido: } \frac{z}{13'75} \times 98 + \frac{170}{13'75} \times 98 + \frac{x}{13'75} \times 98 = 5870$$

$$3^{er} \text{ recorrido: } \frac{200}{13'75} \times 98 + \frac{y}{13'75} \times 98 + \frac{170}{13'75} \times 98 + \frac{z}{13'75} \times 98 = 7419$$

$$\left.\begin{array}{l} 200 + y + x = \frac{5273}{98} \times 13'75 \cong 740 \\ z + 170 + x = \frac{5870}{98} \times 13'75 \cong 823'5 \\ 200 + y + 170 + z = \frac{7419}{98} \times 13'75 \cong 1041 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 540 \\ x + z = 653'5 \\ y + z = 671 \end{array}\right\}$$

$$y = 540 - x \Longrightarrow \begin{array}{r} x + z = 653'5 \\ 540 - x + z = 671 \\ \hline 540 + 2z = 1324'5 \end{array} \Longrightarrow z = \frac{1324'5 - 540}{2} = 392'25$$

$$x = 653'5 - 392'25 = 261'25$$

$$y = 540 - 261'25 = 278'75$$

$$\boxed{\begin{array}{l} d(\text{Huelva, Córdoba}) = 261'25 \text{ Km} \\ d(\text{Cádiz, Córdoba}) = 278'75 \text{ Km} \\ d(\text{Huelva, Granada}) = 392'25 \text{ Km} \end{array}}$$

Las técnicas de solución propuestas por los estudiantes de Informática son mucho más amplias:

- recoger datos de distancias en tablas de doble entrada,
- proponer algoritmos estándares para resolver los problemas,
- para especificar los algoritmos recurren a:
  - citar por autor, por ejemplo, Floyd - Wershall, método de Hakimi, algoritmo de Prim,
  - escribir el algoritmo en un lenguaje de programación,
  - ejemplificar una solución, como dar un determinado árbol mínimo.

Ejemplos de respuestas dadas por estudiantes de Informática:

Ejemplo 3

1er problema Si la estación de servicio está en alguna de las ciudades dadas del grafo, determinar en que ciudad o parte de la carretera estaría el puesto de trabajo. Se debería de conocer las distancias de todas las carreteras presentes en el grafo

2º problema Determinar el coste para ir entre dos ciudades cualesquiera del grafo.

3er problema Determinar el camino más económico entre dos de las ciudades cualesquiera del grafo.

4º problema Determinar el camino más corto entre cualesquiera de las ciudades del grafo.

Ejemplo 4

NOTA: Además de los datos que ya venían en el mapa, le he terminado de colocar las distancias a las aristas (carreteras) que no las tenían.

1. Elegir una ciudad del mapa para que Antonio coloque el local y que se encuentre lo más cerca posible de la ciudad más alejada.

Sol: Esto es un típico problema de centros. Para resolverlo primero realizamos una $m^{n} \times n$ (siendo n el nº de ciudades que hay) en nuestro caso 9×9. En esta matriz vamos a ir colocando las distancias que hay desde nuestra posible ciudad central o de servicio (filas) hasta las ciudades de demanda (columnas), siendo estas distancias las mas pequeñas posibles, es decir, si desde una ciudad A se quiere ir a una ciudad B y se llega antes pasando por otra ciudad C, elegimos el camino que va por la ciudad C.

	Huelva	Córdoba	Jaén	Guadix	Granada	Cádiz	Málaga	Motril	Almería
Huelva	Ø	220	320	390	270	200	355	320	460
Córdoba	220	Ø	100	170	170	240	255	220	360
Jaén	320	100	Ø	70	110	340	195	160	300
Guadix	390	170	70	Ø	180	410	265	230	370
Granada	270	170	110	180	Ø	410	85	50	190
Cádiz	200	240	340	410	410	Ø	495	460	600
Málaga	355	255	195	265	85	495	Ø	135	275
Motril	320	220	160	230	50	460	135	Ø	240
Almería	460	360	300	370	190	600	275	240	Ø

Ejemplo 5

Un algoritmo para resolver este problema es.

(dij) => Matriz de distancias mínimas (Floyd-Warshall).

```
min = ∞
FOR I = 1 a x do.
  BEGIN.
    DIST = -∞
    FOR J ∈ x do.
      BEGIN
      IF  DIST < dij  THEN
          BEGIN.
            DIST = dij
          END
      END
    IF  DIST < min. THEN
      BEGIN:
        min = dist
        centro = I
      END
  END
END. }ALGORITMO}.
```

COMENTARIOS FINALES

Recogemos algunas observaciones y reflexiones a las que nos ha llevado nuestro trabajo.

Nos alegra resaltar que, como una obra abierta, este problema ha tenido la capacidad de provocar en cada receptor diferentes significados. La mayoría de los estudiantes han formulado entre tres y cinco cuestiones. Por el enunciado del problema parece lógico que un**«representante de comercio»**, por su trabajo, tenga que recorrer las ciudades del gráfico y que se imponga algún tipo de ahorro. Pero esto sólo se le ocurre a los estudiantes de Informática. A la mayoría de los alumnos les interesa cuestiones como el volumen del depósito del coche, algo en los que el protagonista de la historia no puede intervenir.

Ningún estudiante de Matemáticas formuló ningún problema que aluda a cuestiones de redes. Los estudiantes de Informática o que han dado teoría de grafos son los que formulan problemas sobre redes. De hecho, un estudiante de Informática afirma, en alusión a los problemas que él formula: **«Se supone que el que lea estos problemas tiene conocimientos sobre teoría de grafos aplicada a la Informática»**.

En los dos grupos de alumnos la regla de tres es el método **«reina»**. Los enunciados formulados están en consonancia con los códigos que maneja el individuo: ecuaciones en la Facultad de Matemáticas, algoritmos en Informática..

En la práctica, los lenguajes y los métodos de solución que utilizan los alumnos son los que piensa que el profesor le va a evaluar.

Las situaciones problemáticas propuestas están muy mediatizadas por los contenidos que los alumnos están dando en ese momento.

En cuanto al lenguaje utilizado, en los estudiantes de Matemáticas predomina el verbal en el enunciado, sin recurrir casi nunca al gráfico que acompaña al problema. Mientras que en la solución predomina el lenguaje numérico y algebraico. Estos alumnos casi siempre se inclinan por plantear cuestiones en las que tienen que cuantificar, como dinero gastado, porcentajes, tiempo empleado, etc., y se plantean mucho menos cuestiones que surjan directamente del gráfico o de optimización de recursos, como búsqueda del camino más corto.

Invitamos a reflexionar sobre ese **«mundo»** que los estudiantes de Informática perciben y que el resto resuelve con **«reglas de tres»**.