NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 39, junio de 1999, páginas 39-48

¿Nada es perfecto?
Un recorrido por algunas clases de números y su aplicación en la Educación Secundaria Obligatoria.

José Antonio Rupérez Padrón

Resumen

Haciendo un repaso por distintos tipos de números: perfectos, amigos, pitagóricos, etc., se ejemplifican actividades para la clase encaminadas a que alumnos de la ESO practiquen propiedades de los números enteros y sus operaciones, con la excusa de obtener números de estas tipologías.

¿Pero hay algo perfecto? Me preguntabas. Y ni tus pupilas eran azules, ni las clavabas en mí. Pero la pregunta se las traía.

¿Algo perfecto? Seguro que esperabas que la respuesta fuera "tú"; pero lo primero que me vino a la mente fue un número: el seis.

Era en un sueño velado, en un duermevela soñado, en esa frontera difusa entre el mundo onírico y el mundo real. Recordé que el 6, y algunos más, como el 28, se definen como *números perfectos* al cumplir la propiedad de ser iguales a la suma de sus divisores, excluido él mismo (suma de sus partes alícuotas). Ocurre que también el 6 lo podemos considerar *pluscuamperfecto,* ya que el producto de sus divisores es, asimismo, 6, lo que no ocurre con 28.

Estas reflexiones me llevaron a pensar las dos cuestiones siguientes:

¿Hay muchos números que por sus características tienen nombre propio, constituyendo un subconjunto interesante de números?

¿Cómo puedo utilizarlos en la actividad docente?

Releyendo algunos libros que ya acumulaban polvo, he encontrado distintos tipos de números no muy corrientes ni populares, unos más conocidos que otros y, sin pretender ser exhaustivo, aquí van.

Los números perfectos y pluscuamperfectos pueden constituir una posibilidad didáctica en el estudio de los divisores de un número a nivel de 1º de la ESO. Junto a ellos hay que hablar de *números defectivos*, cuando la suma de sus divisores es menor que el número o *excesivos* cuando es mayor.

Con vistas a una utilización didáctica de estos números, buscando el que los alumnos practiquen la investigación de divisores, parece más conveniente usar como definición de número perfecto esta otra: “n es un número perfecto si la suma de sus divisores da el doble del número”, y adaptar las otras definiciones de número excesivo, defectivo y pluscuamperfecto de tal manera que se considere al propio número entre los divisores. Se conocen algunas propiedades de los números perfectos desde la antigüedad y así Euclídes ya estableció que si $(2^p - 1)$ es primo –primo de Mersenne -, $2^{p-1}(2^p - 1)$ es perfecto.

Cuando la suma de los divisores de un número, que denotamos por $\sigma(n)$, es tres veces el número “n”, tales números se llaman *triplemente perfectos*, o en general, los números para los que $\sigma(n) = kn$, se llaman *múltiplemente perfectos o k-perfectos*. Un ejemplo es 120: $\sigma(120) = 360 = 3 \cdot 120$, ya que los divisores de 120: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 y 120, suman 360.

Unas actividades donde intervengan los números perfectos, sencillas, podrían ser así:

A1 Un número perfecto es aquel que la suma de sus divisores da como resultado el doble del propio número.

Por ejemplo, el número 6 es perfecto ya que sus divisores: 1, 2, 3 y 6 al sumarlos dan 12. El 8, sin embargo, es *excesivo* ya que la suma de sus divisores, 1, 2, 4 y 8 es 15, un número menor que 16, que es el doble de 8. Por el contrario el 12 es *defectivo* puesto que la suma de sus divisores es: $1+2+3+4+6+12 = 28$, más grande que el doble del propio 12: 24.

Clasifica los primeros 60 números naturales en perfectos, excesivos o defectivos, repartiendo el trabajo con tus compañeros y buscando un sistema que te simplifique esta labor: por ejemplo separando los números primos primero. Al número perfecto que encuentres, si ha sido tu grupo el primero en hacerlo, lo vamos a bautizar como “número perfecto de <nombre del grupo>”

A2 Un número pluscuamperfecto es aquel que el producto de sus divisores da el cuadrado del número. Por ejemplo el número 6 es pluscuamperfecto ya que el producto de sus divisores: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$, cuadrado de 6.

¿Hay algún otro número pluscuamperfecto entre 0 y 50? ¿Y entre 50 y 100?

La introducción de las reglas de divisibilidad y sobre el valor del máximo de los divisores excluido el propio número, son aspectos que ayudarían en estas actividades.
Hay otra clase de números que, sin llegar a gozar de la virtud de la perfección disfrutan de la virtud de la amistad: son los llamados números amigos. Una pareja de números se considera amistosa si la suma de los divisores de uno de ellos es el otro número (excluyendo, como antes, a los propios números entre los divisores), y decimos que ambos números son amigos.

Se cuenta una anécdota de Pitágoras al respecto. Le preguntaron un día qué cosa entendía con la palabra "amigo" y contestó:

- *Es uno que es como otro yo; como lo son el 220 y el 284.*

Está recogida por Carlos Fisas en su "Historias de la Historia", segunda serie. Explica que conocía la anécdota y le parecía una estupidez hasta que encontró en el Anecdotario delle Scienze de Sagredo la explicación de por qué esos números se llamaban amigos y reconoce ser él el tonto, aunque le parece que es llevar muy lejos y de manera complicada el concepto de amistad. Contribuyamos a que alguno de nuestros alumnos, eminente conferenciante en un futuro, no ignore estas clases de números.

Otras parejas de números amigos son: 1 184 y 1 210, 2 620 y 2 940, 6 232 y 6 368, 17 296 y 18 416, etc. Euler publicó en 1 750 una lista de 60 parejas.
Otra clase menos abundante es la de los números honestos o cabales. Son aquellos que la cantidad de letras de su nombre coincide con el valor que expresan. En español el CINCO es el único cardinal que es honesto, pero no debemos pensar, cabalísticamente, que donde aparece el número 5 hay honestidad. Cinco dedos tienen tanto la mano del ciudadano más cabal como la del ladrón de guante blanco. En inglés es el 4 (four), el 3 lo es en danés, noruego, sueco o italiano (tre), y en irlandés, galés y gaélico (tri), el 5 además de en español lo es en portugués (cinco), en rumano (cinci), en polaco (piaty) y en algunas otras lenguas. Por curioso podemos citar que en esperanto, los números consecutivos 2, 3 y 4 son honestos (du, tri y kvar) ó que en una de las formas de transcripción del japonés, es honesto el 12: tooaramihuta. Cabe hablar también de números ordinales honestos como "séptimo", o de operaciones honestas: "la mitad de cuarenta y dos".

Los números honestos son un chascarrillo para la clase, un recurso para romper la monotonía; un pequeño trabajo de investigación si hablamos de operaciones honestas.

A3: Un número o una operación matemática es honesto si el número de letras que usamos para indicarlo coincide con el número nombrado o con el resultado de la operación. El 5 es honesto ya que su nombre CINCO, tiene 5 letras; la operación "El cociente entero de dividir a noventa y cinco entre dos" también es honesta (los espacios no se cuentan, así que tiene 47 letras).
Investiga distintas maneras en las que pueden expresarse números como resultado de operaciones, de tal forma que sean "operaciones honestas". El texto debe indicar claramente las operaciones a realizar y éstas deben ser seguidas correctamente en su orden de prioridades.

La actividad señalada se puede considerar que posee un carácter interdisciplinar, por cuanto se refuerza la escritura de números, el orden y prioridad de operaciones, la subordinación de oraciones, el significado de las fracciones al usar expresiones tales como "un medio de", "la mitad de", "dos cuartas partes de", como expresiones equivalentes pero con diferente cantidad de letras.

Podemos pensar que deben existir números que no pertenecen a ninguna de las categorías que estamos enunciando, que podríamos llamar *números libres*, pero cada vez quedarán menos, y por otro lado se produce la situación paradójica de B. Russell: ¿no estamos categorizando a los que no estaban en ninguna categoría? Entonces ya no se deben considerar números libres...

Entre los que carecen de libertad (no discutiremos la paradoja) están los números acuartelados. Se forman como resultado de operaciones en las que sólo interviene la cifra 4 y los símbolos matemáticos. Así podemos expresar 1 como 4/4, 2 como (4+4)/4, 10 como (44 - 4)/4, etc. Aunque existen varias maneras para expresar los números del 1 al 10 con operaciones aritméticas, la cosa se complica del 10 a 20 y no parece posible sin usar factoriales, raíces cuadradas, la coma decimal, etc. Se llega hasta el 112, pero para el 113 no se ha encontrado una expresión "natural". Propiamente no serían una clase de números como los que estamos explicando, pero dan lugar a una actividad

divertida e interesante, y lo de acuartelados,... bueno, es un nombre curioso para números que no tienen mucho que ver con cuarteles o con la Benemérita, aunque desde cierta óptica el 4 tiene forma de tricornio.
De nuevo podemos construir una actividad para 1° de la ESO.

A4: Usando las operaciones llamadas elementales: suma, resta, multiplicación y división, junto con todos los 4 que necesites, opera estos cuatros para que el resultado sea 0, 1, 2, ... , 10. Por ejemplo: $4 - 4 = 0$.

Los *números capicúas o palindrómicos* son de los más equilibrados. Se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda: 8998, por ejemplo; ¿quién no ha visto una matrícula capicúa? Se puede preguntar cuál es el menor número capicúa que es primo (11), el que es cuadrado perfecto (121), o cuántos cuadrados hay menores que 1000 que sean capicúas ($484 = 22^2$ y $676 = 26^2$).

Pero el palindromismo puede aplicarse a palabras y frases: "AMOR Y ROMA", "YO HAGO YOGA HOY", "A MERCEDES ESE DE CREMA" o la conocida "DÁBALE DE COMER ARROZ A LA ZORRA EL ABAD", son algunos ejemplos. Sirvan de ejemplos en otras lenguas la frase latina "IN GIRUM IMUS NOCTE ET CONSUMIMUR IGNI", y la inglesa "A MAN, A PLAN, A CANAL: PANAMA".

También con las operaciones se puede ver el palindromismo, pudiendo llegarse a unos números tan especiales como los números parejos. El 12, por ejemplo, es un número parejo. Si elevamos 12 al cuadrado obtenemos 144; al volver de izquierda a derecha este resultado (lo que no es lo mismo que obtener su inverso) tendremos 441, cuadrado de 21, volvimiento de 12.

$$12 \rightarrow 12^2 = 144 \rightarrow 441 = 21^2 \rightarrow 21$$

De parejas que guardan cierta relación puede calificarse a los *números primos gemelos*, que son aquellos que difieren en 2 unidades, como el 5 y el 7 o el 17 y el 19; pero podemos pasar a tríos de números que mantienen alguna relación. En esta categoría están las ternas pitagóricas, conjuntos de tres números a, b y c, que mantienen la relación de $a^2 + b^2 = c^2$, catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo. Estos números como 3, 4 y 5, son *números pitagóricos*.

Relacionados, en cierta medida, con los grupos anteriores podemos considerar a los *números autoduplicantes*, que con los siguientes ejemplos supongo quedan aclarados.

$$954 - 459 = 495$$
$$2961 - 1692 = 1269$$
$$9108 - 8019 = 1089$$

o el curioso $987654321 - 123456789 = 864197532$

Pueden definirse como números que contienen los mismos dígitos aunque en distinto orden y que al operar con ellos se obtiene un tercer número de iguales dígitos.

Pero como objeto de otra actividad que permite a los alumnos manejar y conocer ciertas propiedades de los números, útiles en este caso para evitar resultados erróneos, sería la realizada en la investigación de *números automorfos*. Los números de este tipo tienen la propiedad de aparecer al final de su cuadrado. Entre los de un dígito es fácil realizar la investigación, pero si lo extendemos a mayor número de dígitos podemos proponer otra actividad.

A5: Los números automorfos son aquellos que aparecen como cifras finales de su cuadrado. Tal es el caso de 5, que aparece al final de su cuadrado 25, o del 25 que aparece también al final del $25^2 = 625$.

Tanto el 5 como el 25 son automorfos por esa propiedad de volver a aparecer al final de sus cuadrados.

Encuentra qué números de uno y dos dígitos son automorfos.

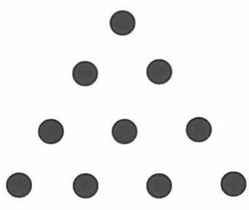
Orientación: observa que aquellos cuadrados que terminan en un número distinto que quien los origina, ya no pueden ser automorfos. Así, 27^2 terminará en 9 y no puede ser automorfo. Piensa en esto y discute el porqué con tus compañeros y compañeras de grupo.

¿Observas alguna regla en la aparición de números automorfos? Te informo que de tres dígitos están el 625 y el 376, y de cuatro dígitos el 9 376 y de cinco el 90 625.

Hay ocasiones en que la búsqueda de los números de una de estas clases no necesita de la aplicación de muchos conocimientos matemáticos, pero constituye un entretenido pasatiempo. Eso ocurre con los números ortolineales y sus variantes. Estos números mantienen cierta relación con los números honestos, ya que la pertenencia a este conjunto escaso de números tiene que ver con la manera en la que se escriben los nombres de las cantidades. Definimos números ortolineales como aquellos en los que su nombre en mayúsculas tipo imprenta, contiene la misma cantidad de segmentos que indica el número cuando la letra no tiene tramos curvos. Un ejemplo lo tenemos en el 17; su nombre en mayúsculas es DIECISIETE, y sumando los segmentos que aparecen en las letras que no tienen tramos curvos, tendremos: 0+1+4+0+1+0+1+4+2+4 = 17, y es un *número ortolineal* (Como se puede observar, hemos colocado un 0 para las letras con tramo curvo). Las letras que se consideran para el cómputo de segmentos son: A(3), E(4), F(3), H(3), I(1), K(3), L(2), M(4), N(3), T(2), V(2), W(4), X(2), Y(3) y Z(3). Y algunos de estas letras nunca aparecen en los nombres de números en español, por lo que podemos pedir a los alumnos que encuentren números ortolineales en otros idiomas como un ejercicio entretenido que enriquecerá su vocabulario. Se puede limitar la búsqueda entre 1 y 50 y hacerles ver ciertas imposibilidades. Para que sea posible encontrar más números ortolineales, se pueden considerar todas las letras formadas sólo con segmentos, con lo que la C tendrá 3, la B 5, etc. Serían los ortolineales plus.

Como observamos, estos números son clasificados en esta categoría por ciertas propiedades geométricas asociadas a sus nombres. En otros números también se utilizan propiedades geométricas y topológicas. Los números triangulares, cuadrados, pitagóricos, etc., pertenecen a estas categorías.

Números triangulares son aquellos que representan el número de vértices de una red de puntos que forman un triángulo, y que se construye colocando un punto encima y al centro de dos ya colocados, partiendo de una base con un punto, dos puntos, tres puntos, etc.



1

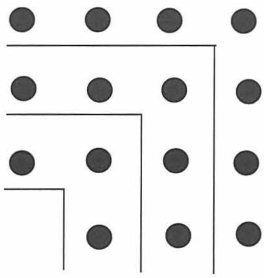
2 3

4 5 6

7 8 9 10

Los primeros de esta sucesión son: 1, 3, 6, 10,...

Números cuadrados pueden considerarse como cantidad de vértices de un cuadrado que se va formando como una red que empieza con 1, luego 4, después 9 y así continúa con los cuadrados de los naturales.



1 |1+3=4 | 4+5=9 | 9+7=16

Algunas de sus propiedades son sencillas de encontrar y pueden constituir una actividad relacionada con los conceptos de sucesiones. Y hablando de sucesiones no podemos olvidar los *números de Fibonacci*, conocida sucesión cuya historia, en si misma, ya constituye un buen recurso didáctico. En ella los dos primeros términos son $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$, y los restantes a_n se hallan sumando los dos anteriores: $a_{n-2} + a_{n-1}$, cosa harto conocida. No tan sabida es la expresión del término general:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

La serie de números 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1 430, 4 862,... forma el conjunto de los números de Catalán. Relacionados con las combinatoria, tienen como expresión general:

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

y se pueden encontrar en el Triángulo de Pascal, fuente de curiosas series numéricas.

Los números de Bell, relacionados con el número de particiones de un conjunto de n elementos, también indican las rimas posibles de un poema con 1, 2, 3,... n versos. Los números son: 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, etc.

En cuanto a los números pitagóricos ya mencionados, ¿qué decir? Se han definido como ternas (a, b, c) que cumplen la propiedad de ser $a^2 + b^2 = c^2$, y los alumnos de 2º de la ESO pueden realizar esta actividad:

A6: Tres números naturales a, b y c se llaman pitagóricos si verifican la relación $a^2 = b^2 + c^2$ pues en tal caso son longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

La terna 3, 4 y 5 es la más conocida. Encuentra otras cuatro más.

Sugerencia. Haz una lista con los cuadrados de los primeros números: del 1 al 20 por ejemplo, (sí la llegaras a memorizar, te ahorrará mucho tiempo en un futuro y podrás sorprender con cálculos rápidos).

Trata de comprobar si las ternas mantienen algún tipo de relación, de parentesco, es decir, si hay alguna regla de formación.

Con una cinta métrica de costurera o sastre, o de las que regalan en las ferreterías como propaganda, de papel, comprueba que marcando las tres cantidades, una a continuación de la otra (en las unidades adecuadas: dm o cm generalmente), podemos construir un triángulo rectángulo. Comprueba el ángulo recto superponiendo a la cinta doblada una escuadra o cartabón. Este método lo utilizaban ya los egipcios para construir los triángulos rectángulos y trazar ángulos rectos.

En la confianza de que le sean válidas a los lectores estas explicaciones, están invitados a encontrar otras sugerencias para actividades, y conocimientos más completos sobre familias de números, en la bibliografía que se acompaña.

Bibliografía

Bolt, B. (1989). *Actividades matemáticas.* Labor, Barcelona.

Bolt, B. (1989). *Aún más actividades matemáticas.* Labor, Barcelona.

Bolt, B. (1988). *Divertimentos matemáticos.* Labor, Barcelona.

Gardner, M. (1993). *El universo ambidextro: simetrías y asimetrías en el cosmos.* Labor, Barcelona.

Gardner, M. (1986). *Los mágicos números del Doctor Matrix.* Gedisa, Barcelona.

Gardner, M. (1990). *Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas.* Labor, Barcelona.

Gardner, M. (1988). *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas.* Labor, Barcelona.

Peterson, I. (1992). *El turista matemático.* Alianza Editorial, Madrid.

José Antonio Rupérez Padrón es Catedrático de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Secundaria "Canarias Cabrera Pinto" de La Laguna, Tenerife. Es miembro de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas y en ella ha desempeñado varios cargos.
E-mail: jrpg@correo.rcanaria.es