NÚMEROS
Revista de didáctica de las matemáticas
N° 32, diciembre de 1997, págs. 43-53

Procurando la auto-orientación de intuiciones desproporcionadas

Héctor Deambrosi

1.- En sus publicaciones sobre Didáctica de las Matemáticas, Puig Adam expresaba que, experimentando formas de introducir proporcionalidad con alumnos de 10 a 12 años, *le llamó la atención* y lo señaló como *merecedor de un estudio más detenido,* el hecho de que, propuesta como actividad rellenar los espacios vacíos en parejas de «sucesiones» numéricas del tipo:

A).	2	4	6	10	20	....	50	100	150	200	....
B).	3	6	....	15	30	45	75	....	225	300	330 ,

algunos de los alumnos que colocaban los números 9; 30; 150 y 220, *manifestaban luego haber procedido por adición.*

2.- Treinta años después, en 1985, la Comisión permanente de Reflexión sobre la Enseñanza de las Matemáticas de Francia (COPREM) en un artículo titulado **La proporcionalidad** expresaba: *«La dualidad de aspecto de la proporcionalidad (función e isomorfismo) ha suscitado numerosas investigaciones sobre su enseñanza elemental y en el ciclo básico. Los resultados ya obtenidos muestran en particular que los procedimientos del tipo isomorfismo están más disponibles y son utilizados más voluntariamente por los alumnos que los procedimientos del tipo «función». Sin embargo, esto depende de la familiaridad de los alumnos con los valores numéricos en juego dentro de los problemas planteados: un cambio de los valores numéricos puede entrañar una modificación de los procedimientos; en este caso, las variables numéricas constituyen variables didácticas a disposición del docente para favorecer, o por el contrario bloquear, un procedimiento».*

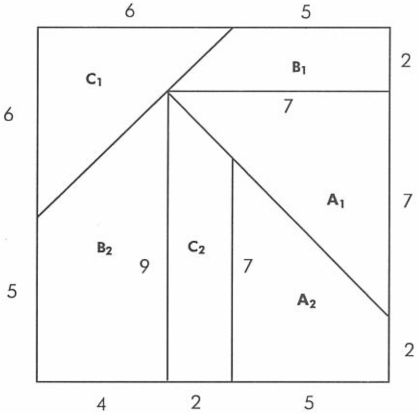
3.-En el mismo año, en su trascendental e insoslayable investigación sobre «Etapas del pensamiento y conceptos utilizados por los alumnos del Secundario en Geometría Euclidiana Plana», Gérard Audibert detectó lo que llamó **seudoproporcionalidad**: ante el problema de construir un triángulo «de la misma forma» que uno dado y que tenga por lado un segmento conocido, no pocos alumnos (un 30 %) creen obtener las medidas de los restantes sumando una misma diferencia a las de los lados preimagen.

4.- Tanto Brousseau como el Grupo Cero de Valencia predican que *las situaciones didácticas de mayor provecho son aquéllas en las cuales el alumno se pone a trabajar creyendo poder resolverlas con éxito mediante la aplicación del hasta ese momento su bagaje de conocimientos, y que, en determinada instancia, por insuficiencia del mismo, le generan conflicto cognitivo.* Como actividad a plantear en el tratamiento de Proporcionalidad en los 11 a 13 años, Brousseau con su equipo del IREM (Instituto de Investigación en Educación Matemática) de Burdeos propone la

AMPLIACIÓN DE UN ROMPECABEZAS

Paso a relatar mi visión sobre experiencias de aula en las cuales he intentado seguir las lineas del diseño «broussoniano».

Material necesario:



Tantos juegos del rompecabezas adjunto como la tercera parte del número de alumnos haya en el grupo. (Cada uno en su sobre o bolsita de nilon) .
Las dimensiones indican cm (Construíbles en carton-plast, cartulina, tapas de carpetas en desuso, fibra de madera prensada o cualquier otro material ligeramente rígido).
Resultan utilizables con varios grupos durante varios años.

ETAPA 0). (No especificada por Brousseau). Objetivos: que los alumnos se familiaricen con formas poligonales simples, observen, manipulen, comparen, analicen, consoliden en el subconsciente el concepto de que la forma de una figura es independiente de su posición, establezcan relaciones, intercambien y discutan opiniones y, fundamentalmente, comiencen en forma exitosa una actividad en grupo, reafirmando autoestima y confianza en que el pensar da resultados.
«Me han dado este rompecabezas». Lo exhibo y me muevo rápidamente entre los bancos mostrando un juego armado.

Los desafío a que no son capaces de armarlo ni trabajando en grupos de a tres. «Sin mover las mesas *reúnanse en grupos de tres*».

Distribuyo los juegos en sus bolsas para que los armen, al tiempo que cuido la estructuración de los grupos; para las etapas subsiguientes no es conveniente que sean los tres integrantes de un mismo nivel extremo. (Por restos puede que queden hasta dos grupos con cuatro alumnos).

Les dejo trabajar

Cuando algún grupo anuncia haber resuelto el problema, voy a verificar su solución, mientras aprovecho para observar qué dificultades pueden hacer esperable un fracaso.

Cuando estimo que la mitad de los equipos obtendrá una solución, auxilio a aquellos grupos a los cuales va ganando el desánimo fingiendo ponerme a pensar en su mesa. (Les ayudo a ubicar las piezas C1, B1, y según las posibilidades del equipo, puede que también la A1. Son felices luego al lograr ubicar las restantes).

ETAPA I). Cuando todos están satisfechos por el éxito logrado, (aproximadamente a los quince o veinte minutos de clase) les digo que, si bien me cabe felicitarlos por lo realizado, el problema real no consistía en armar el rompecabezas. Su destino es ser usado en Primaria. Lo malo es que estas piezas, para ser usadas en cursos inferiores, resultaron chicas. Es menester ampliarlas. ¿Cuánto? . Me dijeron que *el rompecabezas debe ser ampliado en tal forma que lo que aquí mide 4, en el ampliado mida 7.* Observen que en cada juego hay dos piezas A, dos piezas B y dos piezas C. Repártanse el trabajo: *un integrante del grupo amplía las dos piezas A, otro las dos piezas B y el restante las dos piezas C.* Apenas se pongan de acuerdo sobre qué par de piezas ampliará cada uno, me hacen un favor, se separan, van a sus respectivas mesas y allí en completo silencio cada uno amplía su par de piezas. Creo que lo mejor es dibujar las piezas ampliadas en papel cuadriculado y recortarlas. Luego, como verificación de lo hecho, el equipo se vuelve a reunir y arma su proyecto de rompecabezas ampliado.- Reitero: la ampliación tiene que ser tal que lo que en el original es 4 cm, en el ampliado sea 7 cm. Escribo en el pizarrón: 4 ——> 7 .

Tres detalles en los que Brousseau pone énfasis: a) que el coeficiente de proporcionalidad sea un racional no natural; b) que los alumnos no se puedan consultar en cuanto al procedimiento de cómo ampliar; c) que durante el proceso de ampliación no tengan a la vista ningún rompecabezas armado que les pueda servir de orientación.

Cuando todos comienzan a medir los lados de sus piezas originales, dibujo separadamente en el pizarrón las dos piezas A, las dos B y las dos C, indicando en cada una sus ángulos rectos y las medidas señaladas en la figura inicial. Les digo:

«Al recortar las partes de estos rompecabezas es muy probable se hayan cometido pequeños errores. Ahórrense el trabajo de tomar las medidas de las piezas que tienen en su poder, y trabajen en base a los datos que figuran en el pizarrón». «Más, junten en la bolsa las piezas de cada grupo y me las devuelven».

Trabajan en la ampliación

(Las etapas 0 y I suelen ocupar conjuntamente un «período» de clase. Si a continuación disponemos del siguiente período, proseguimos. Si no, queda como tarea para la próxima clase traer recortadas las dos piezas ampliadas, con recomendación especial de que ni se extravíen ni se deterioren. La responsabilidad pasó a ser triple: quien no las traiga anula el trabajo de todo su equipo).

ETAPA II). Muy pocos grupos logran éxito en su primer intento de armado con las piezas ampliadas. Difícilmente alguno de sus integrantes no ha cometido al menos un error. Por lo menos, de distracción al tomar una medida, lo cual rápidamente subsanan. Pero en la mayoría de los casos quienes se equivocaron procedieron por «seudoproporcionalidad». Por la forma de las piezas y los procesos constructivos empleados, todos han obtenido piezas con ángulos iguales a los de las originales y no detectan a simple vista el error (registra Audibert que en esta edad la mayoría de los alumnos ya tiene intuitivamente incorporado el que las semejanzas conservan los ángulos). Ternas de piezas consecutivas se yuxtaponen sin dificultad (lo imposible en caso de error es ensamblar dos ternas).

Copio el rompecabezas en un costado del pizarrón

Comienzan a sospechar que alguno de los integrantes del equipo ha cometido un error de procedimiento en la ampliación.

Al poco rato, todos los grupos tratan de detectar y corregir sus errores. En general, no me consultan. Si lo hicieran, eludiría el contestarles. (Estimo carece de sentido privarles de la posterior satisfacción, formativa e incentivante, de haber hallado por sí mismos una solución).

Cada integrante narra a sus compañeros el procedimiento que ha seguido. Lo analizan, discuten, y ello les lleva a buscar justificaciones. Procuro registrar el mayor número posible de ideas, a fin de considerarlas en lo que pueda ser una razonable ordenación de la «Puesta a punto», que encaramos cuando todos los equipos (o casi todos) tienen el problema resuelto.

(Prestando atención a sus conversaciones, me reafirmo en la convicción de que con clases expositivas, -o con sus familiares directos, los conductistas diálogos desde la cima -, lo que mejor logramos es imponerles el destrozo de iniciativas y creatividad). Resultan escuchables desde el mecanizado «es de los problemas de resolver con «x»: hay que poner 4 ——> 7 y debajo 5 ——> x y después multiplicar éste por éste dividido éste, y así para cada lado», casi nunca aceptado por carencia de justificativo convincente, hasta el «es como cuando saltas en la cama del gimnasio: se estira en todos los lados. Si lo que es 4 cm aumenta 3, en cualquier dirección en cada cm crece 3/4 cm», pasando por una discutida y muy controlada tabla de correspondencias (mayoría por isomorfismo), al estructurar la cual algunos grupos llegan a la conveniencia de disponer del correspondiente de 1 cm. A los integrantes de los equipos que van finalizando les ocupo pidiéndoles el perímetro y el área de cada pieza, tanto original como ampliada.

(Brousseau señala, y en mis experiencias con más de quince grupos de veintipico de alumnos de primer año no lo he detectado, que fracasada la correspondencia $n \longrightarrow n + 3$, en sus tanteos de procedimientos de ampliación llegan a considerar otras funciones lineales, como: *n* ——> *2n - 1*).

ETAPA III). Puesta a punto. (Comulgo con el pensamiento de Alan Schoenfeld de que tanto o más que un resultado correcto o un camino totalmente desbrozado conducente al mismo, importa que los alumnos aprendan cómo desbrozar y cómo desechar los incorrectos. Por ello, y porque entiendo importante que todos se sientan partícipes de haber resuelto el problema -quizá con mucho más mérito quienes partieron de suposiciones erróneas-, procuro mencionar y analizar todas las ideas que hayan manejado en sus diálogos. Es muy difícil entonces que tenga dos clases, y menos dos puestas a punto, iguales. Lo que sigue intenta ser una aproximación (¿idealizada?) a la intersección de todas ellas).
Comienzo diciendo :
- P: «Yo, como muchos de ustedes, empecé sumando 3 cm en cada lado».
- A: «No. Está mal. Aumentan distinto».
- P: «También como ustedes, al intentar verificarlo me di cuenta que estaba equivocado. Verificando uno sabe si lo tiene bien. Siempre hay que hacerlo: es la manera de no quedar en el error».
- A: (asienten) .
- P: «Me dicen que segmentos distintos aumentan cantidades distintas. ¿y segmentos iguales?»
- A: «Iguales...»
- P: «¿Y si un segmento es el doble de otro? ¿ o el triple?»
- A: «Queda el doble o el triple».
- P: «Vamos por lo seguro: Si 4 cm del original aumentan 3 y se transforman en 7, me animo a preguntar cuánto tiene que ser en el ampliado lo que en el original es 8 cm».

Mientras titubean y terminan por decir 14 (¿problema de tablas?, ¿de ordenación inadecuada?,¿les choca comenzar por algo no pedido?) escribo en el pizarrón: 4 —> 7 ; y debajo, dejando los intervalos necesarios para completar una tabla ordenada de correspondencias de los naturales a sus imágenes, 8 —> 14.
- A: «2 es la mitad de 4; a 2 le corresponde la mitad de 7: es 3,5 cm».
Puesta en la tabla la pareja (2; 3,5), pugnan por cómo proseguir. Finjo no oír a quienes (casi desesperadamente) gritan que 1 (como mitad de 2) se transforma en la mitad de 3,5 y atiendo previamente a quienes

consideran el correspondiente de 6 como el de 4 sumado con el de 2 (fuerzo a considerarlo también como a mitad de distancia entre el de 4 y el de 8),(A: «Es lo mismo»); el de 10 como el de 4 más el de 6 (u 8 + 2); el de 5 como mitad del de 10 (o media entre 4 y 6); el de 3 como mitad del de 6; el de 7; el de 9, y finalmente el de 1 como mitad del de 2.

- A : «¡Si encuentran antes que 1 cm va a 1,75 es mucho más rápido! Después basta con multiplicar lo que sea por 1,75».
- P : «¿Cómo?»
- A : «Está bien. Cualquiera lo puede obtener sumando cm a cm».

Conduzco sobre la tabla una rápida verificación por cálculo mental de lo que acaban de decir.

- P: «Más que interesante. ¿Así que ustedes se animan sin más a decirme ahora el correspondiente de 23 ?».
- A: «23 x 1,75 «. Utilizan la calculadora y agregan: «40,25».
- P: «¿y el de 1348?».
- A: «1348 x 1,75 ... 2359!».
- P: «¿Y el de cero?»
- A: (titubean) . "Luego: «0!».

los cuales también fui ubicando en el cuadro.

- P: «Así que en este problema multiplicando cualquiera por el correspondiente de 1 se tiene el correspondiente de ese cualquiera. Ahora me explico por qué cuando yo iba rellenando la tabla algunos querían poner cuanto antes el correspondiente de 2; a partir de él pasábamos a obtener el de 1 haciendo 3,5 dividido 2».
- A: «Se puede tener antes: hallas 7 dividido por 4, que da 1,75»
- P: «¿Cómo?. ... Veamos: a 4 cm le corresponden 7 y en cada cm aumenta lo mismo, ... entonces, ... en el ampliado, a cada cm del original, ¿le correspode más o menos de 7?»
- A: «Menos».
- P: «¿Cuántas veces menos?»
- A: «Cuatro».
- P: «Entonces está bien, 7 dividido entre 4 es lo correspondiente a cada cm». Pero para mí 7 dividido entre 4 es ¡7/4 !».
- A: «Es lo mismo: 7/4 es 1 y 3/4, y 3/4 es 0,75».
- P: «De acuerdo, salvo que habíamos visto que se debe decir setenta y cinco centésimas, y no cero coma setenta y cinco. Sigamos, porque a mí 14 dividido entre 8 me da 14/8...».

- A: «Es lo mismo que 7/4».
(El factor de proporcionalidad propuesto por Brousseau brinda una óptima oportunidad para consolidar las múltiples formas de representación de un mismo racional, y en particular la irreducible de los decimales, entendidos por tales los representables por fracciones decimales. Insisto en ello según las necesidades de los alumnos y la disponibidad de tiempo).
- P: «Así que en este tipo de correspondencias, que se llaman de proporcionalidad, (escribo la palabra en el pizarrón), hay un conjunto que llamaremos de partida y uno que llamaremos de llegada; a la suma de dos cualesquiera del de partida le corresponde la suma de sus respectivos correspondientes en el de llegada; si se multiplica (o divide) uno cualquiera del de partida por un número, su correspondiente en el de llegada queda multiplicado (o dividido) por ese mismo número; y lo super-importante, lo que ustedes hoy me dijeron: El valor del correspondiente de cualquiera es el de ese cualquiera multiplicado por el valor del correspondiente de 1; y para poder hallar el valor del correspondiente de 1 basta con tener un elemento del conjunto de partida y su correspondiente en el de llegada: se divide el valor del de llegada entre el valor del de partida del cual es correspondiente.

Los matemáticos juzgan tan importante eso que Uds. me dijeron, que al valor del correspondiente de 1, que en este tipo de correspondencias es también el factor constante por el cual basta multiplicar el valor de cualquiera para tener el de su correspondiente, le pusieron nombre y apellido: le llaman factor o coeficiente de la proporcionalidad».
- P: «Si quisiéramos proseguir la tabla, podríamos poner infinitas parejas. Hoy están inspirados y me han dicho formas de ahorrarnos mucho trabajo. ¿Alguien se anima a dar una formulita o una ley de cómo obtener todas las parejas; a escribir en la tabla un renglón que exprese o simbolice en forma condensada todos los demás?»
- A1: «Sí, yo; (1; 1,75).- No, no sirve para todas».
- A2: « Ponemos (P; P x 1,75).
Asienten. Lo pongo en la tabla como cabecera.
- P: «¿Ustedes dicen que así están condensadas todas las parejas?... ¿Puedo borrar esta última que tenemos escrita aquí debajo?»
- A: «Sí».
La borro.

- P: «¿Y éstas que ni están escritas?».
- A: « También».

y pidiendo siempre previa anuencia, sigo borrando la tabla en vertical ascendente hasta que sólo quede la cabecera.

Les pregunto si basta con sólo ese renglón, a lo que responden, al principio sorprendidos algunos, y luego alborozados todos, unánimemente que sí. Lo recuadro.

- P: «Los felicito.- ¿Recuerdan las dudas y equivocaciones iniciales? No hace tanto teníamos dificultades con unas pocas parejas para ampliar el rompecabezas. Dudamos; nos equivocamos; probaron; investigaron; discutieron; hallaron los errores; trabajaron, tengo que reconocer que responsablemente muy bien, y ahora son capaces de hallar todas las infinitas parejas posibles, y escribirlas en menos de un renglón. ¿Se dan cuenta lo que fueron capaces de progresar?.- Forzosamente los tengo que felicitar».

ETAPA IV).- (No especificada por Brousseau).- Una posible extensión. Si nos quedan más de quince minutos como final de un período de clase, les pido que cada uno calcule perímetro y área de las piezas que le correspondió ampliar (original y ampliada), dibujando y midiendo lo que sea menester; y que luego, con los valores obtenidos cada equipo estructure un cuadro. «Hacer Matemáticas es hallar regularidades», y agrego: y muchas veces, como en lo anterior, un cuadro puede ayudar a detectarlas.

Escribo en el pizarrón las cabeceras del cuadro:

Pieza	Perímetro		Área	
	original	ampliada	original	ampliada

y agrego en la columna de piezas, en el séptimo renglón, cuadrado

Después de completarlo suelen decir:

- El área del cuadrado sirve como verificación: tiene que ser la suma de las áreas de toda la columna.

- No así el perímetro.
- La columna de perímetros del ampliado tiene que ser la del original multiplicada por 1,75.
- Así lo calculamos nosotros: hallas uno de los dos, y multiplicas o divides por 1,75.
(Aprovecho la oportunidad para una revisión consolidante de la distributiva de la multiplicación respecto de la adición.- «Gracias a ella es posible ahorrarse mucho trabajo»).
- No es necesario medir todas las diagonales (por oblicuas): nosotros medimos una, y para las otras multiplicamos por 1,4.
Si no lo dicen espontáneamente, les pido que investiguen si hay alguna relación entre las áreas de la original y la ampliada, que de existir, para otra vez también nos pudiera ahorrar trabajo. Tienen calculadora, y al rato algún grupo dice que para pasar de una a otra hay que multiplicar por 3,0625. La curiosidad por saber de dónde sale ese número «extraño» les acicatea.
- A: «Es 1,75 x 1,75».
- A: «Pero, ¿ por qué se multiplica dos veces?».
Lo vemos (conmutativa y asociativa de x) y seguimos por una tan breve como ineludible referencia a la conversión de áreas y volúmenes en el sistema métrico decimal. Creo que les queda un buen sustrato acerca de que en una semejanza el factor de las áreas es el cuadrado del de la semejanza, y una posible alerta acerca del factor de los volúmenes.

ETAPA V). (No especificada por Brousseau). Un control consolidante. Por no más de un par de días seguimos trabajando específicamente sobre proporcionalidad (reconocimiento de conjuntos proporcionales, contra-ejemplos, ejercicios, descalificación de la pareja (0;0) como determinante del coeficiente, algún problema, etc.), pero mucho más que un tema, entiendo la proporcionalidad como hilo conductor del estudio de numerosos puntos: cambios de unidad; conversiones; costos; velocidades; porcentajes; estimaciones de órdenes de magnitud (comparaciones por proporcionalidad); gráficas; algunas inferencias; etc.

A nunca menos de un mes y medio de la ampliación anteriormente descrita, planteo como control el problema «SIM» del IREM de Montpellier. Distribuyo dos hojas a cada alumno: una rectangular formato medio carta (21,5 cm x 28,0/2 cm), en la cual hay dibujado un rectángulo de dimensiones 11,0 cm x 7,0 cm con lados paralelos a los bordes, y la otra de forma cuadrada de lado 14 cm (28,0/2) en la cual hay dibujado un triángulo de lados respectivos 2,0 cm, 4,0 cm y 5,0 cm, con ninguno paralelo a los bordes. Les planteo como trabajo individual en clase construir dentro del rectángulo el mayor triángulo posible de la misma forma que el dibujado en la hoja cuadrada.

Hasta descubrir cada uno la diagonal como candidata a lado mayor (mayor segmento inscriptible en el rectángulo) pasan por todas las etapas reseñadas por Audibert (algunos, para salir de bloqueos, con necesidad de preguntas orientadoras) . A partir de la diagonal, ninguno titubea: toman la regla graduada, miden la diagonal que terminaron de dibujar, (para su apreciación de lectura, 13,0 cm), su preimagen, y calculan 13,0/5,0 = 2,6 que utilizan como factor de proporcionalidad para la ubicación del tercer vértice. Para hacerlo, unos hallan previamente el pie de la altura que pasa por él y los restantes hallan las correspondientes medidas de los otros dos lados.

La obtención (inducida) de las restantes 3 soluciones nos sirve como revisión de las simetrías del rectángulo, y de las propiedades de las simetrías.

(Quienes obtuvieron tempranamente las 4 soluciones, las más de las veces se ocuparon luego en la, al menos en mis clases, inusual práctica de colorear el dibujo resultante).

Héctor Deambrosi
Presidente de la Sociedad de
Educación Matemática de Uruguay