NUMEROS.20
S.C.P.M. "ISAAC NEWTON"

UN PAR DE PROBLEMAS PARA B.U.P.

CARLOS DE OLANO LORENZO-CÁCERES
I.B. MENCEY ACAYMO
GUÍMAR

INTRODUCCIÓN.

Existen muchos ejercicios interesantes o curiosos para desarrollar en las clases y cada profesor conoce algunos de ellos. Pienso que cuantos más ejercicios de este tipo conozca cada profesor será mejor para la mayor comprensión de la asignatura y su correspondiente dominio por parte de los alumnos. Me atrevo a exponer a continuación una pequeña aportación en este sentido.

PROBLEMA 1.- *Dividiendo en dos trozos un cordel de 4 m., de longitud y construyendo con ellos una circunferencia y un cuadrado respectivamente, averiguar la longitud del lado del cuadrado para que la suma de las dos superficies sea mínima.*

RESOLUCION: Llamaremos x a la longitud del lado del cuadrado. En principio, e intuitivamente, teniendo en cuenta que las formas circulares se caracterizan por ser las de mayor superficie para el mismo perímetro, podríamos decir (un tanto precipitadamente) que las soluciones serían:

superficie total máxima para $x = 0$
superficie total mínima para $x = 1$

Pero procedamos analíticamente, que es, además, como lo intentarían los alumnos.

Superficie del cuadrado : x^2

Para calcular la superficie del círculo necesitamos primero conocer su radio en función de x :

$$2\pi r = 4 - 4x \Rightarrow r = \frac{2 - 2x}{\pi}$$

y la superficie del círculo:

$$\pi \cdot \left[\frac{2 - 2x}{\pi} \right] = \frac{4}{\pi} \cdot x^2 - \frac{8}{\pi} \cdot x + \frac{4}{\pi}$$

Y así:

Superficie total: $S(x) = \left[1 + \frac{4}{\pi} \right] \cdot x^2 - \frac{8}{\pi} \cdot x + \frac{4}{\pi}$

Derivando e igualando a 0 :

$$S'(x) = 2 \cdot \left[1 + \frac{4}{\pi} \right] \cdot x - \frac{8}{\pi} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{4 + \pi}$$

que es la única solución.

La segunda derivada, $S''(x) = 2 \cdot \left[1 + \frac{4}{\pi} \right]$, es constante y positiva (lo cual es lógico puesto que la gráfica de $S(x)$ es una parábola "hacia arriba").

Hasta aquí tenemos la siguiente situación:

a) Para el valor $x = \frac{4}{4 + \pi} = 0'560099153$ la superficie total es mínima (error que se hubiera cometido si nos hubiéramos precipitado con nuestra supuesta intuición) y su valor numérico es $\frac{4}{4 + \pi}$ (¡igual que la longitud del lado del cuadrado!), siendo los perímetros respectivos:

circuferencia : 1'759603386
cuadrado : 2'240396614 (bastante próximos).

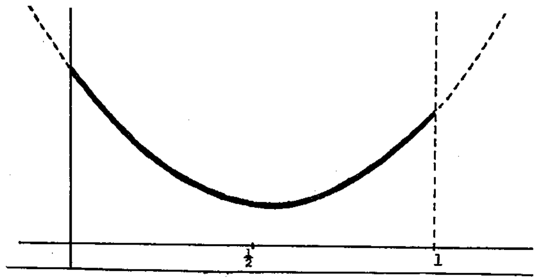
b) No existe ningún máximo de tangente horizontal.

Los alumnos tenderían a decir que no existe valor máximo, acostumbrados como suelen estar a no salirse de sus rutinas, fórmulas y automatismos, pero esto no es cierto.

Para resolver esta cuestión basta representar gráficamente la función $S(x)$ y tener en cuenta que el intervalo de definición de x es el $[0, 1]$.

El vértice de la parábola tiene por coordenadas:

$\left(\frac{4}{4 + \pi}, \frac{4}{4 + \pi} \right) = (0'56\ldots, 0'56\ldots)$, esto es está ligeramente desplazado hacia la derecha respecto al intervalo de definición de x. La gráfica resulta de la forma:



y en ella se observa claramente que la superficie total es máxima para $x = 0$ (de acuerdo con nuestra supuesta intuición).

PROBLEMA 2.- *De un triángulo se conocen* $a = 59$, $b = 37$ y $C = 37^\circ\ 37'\ 37''$. *Resolverlo.*

Este es un típico problema de resolución de triángulos, pero con una pequeña pega que lo hace muy interesante de cara al alumnado.

RESOLUCION: Aplicando el teorema del coseno, se obtiene:

$$c = 37'31107807$$

Y por el teorema del seno:

$$A = 74^\circ\ 53'\ 11{,}61''$$

Para calcular el ángulo B restante bastaría hacer:

$$B = 180^\circ - (A + C) = 67^\circ\ 29'\ 11{,}39''$$

y el alumno se quedaría satisfecho y pensando que había hecho bien el ejercicio.

Pero si para calcular el ángulo B aplicáramos nuevamente el teorema del seno, en lugar del procedimiento anterior, resultaría:

$$B = 37^\circ\ 15'\ 34{,}61''$$

que contradice el resultado anterior. Pero es que, además, en este último caso, resulta que:

$$A + B + C = 149^\circ\ 46'\ 23{,}32''$$

En el supuesto de que el alumno hubiera optado por este procedimiento y hubiera efectuado la suma para comprobar sus resultados (cosa, por desgracia, bastante poco probable), se quedaría realmente estupefacto:

¿Es que me he equivocado?. Repasa todo el ejercicio y no, no se ha equivocado.

¿Es que mi calculadora está mal?. Lo revisa con otra calculadora y obtiene idénticos resultados.

¿Es que los teoremas del seno y del coseno no son siempre válidos?. Evidentemente siempre lo son.

¿Entonces?

El problema del alumno radicaría evidentemente en su fe ciega en las calculadoras, que en este caso lo inducen a error por no considerar las distintas posibilidades cuando la calculadora le ofrece un resultado, ya que ésta siempre le responde con ángulos agudos.

En este triángulo hay un ángulo que es obtuso. Este es evidentemente el ángulo A, que resulta ser:

$$A = 105^\circ\ 6'\ 48{,}39''$$

y ahora sí que coinciden y son correctos los valores del ángulo B calculados por el teorema del seno o por la correspondiente diferencia:

$$B = 37^\circ\ 15'\ 34{,}61''$$

Pienso que este tipo de problemas, que realmente ellos sí pueden y deben saber hacer, sirve para ampliar sus horizontes, profundizar en el conocimiento de la materia y romperles un poco su excesiva "cuadriculación". Para que no se conformen con un "esto no se puede hacer", simplemente porque no se ajusta a sus extremadamente rígidos esquemas y normas tipo.