NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 88, marzo de 2015, páginas 141-157

Algunas cosas más sobre el Cubo de Lola

J. A. Rupérez Padrón y M. García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen

Se analiza sistemáticamente, sin aporte informático, como ejemplo de análisis en clase de un problema espacial y de cómo representar las posiciones de las piezas, las soluciones al cubo de Lola. Lo destacamos por su vinculación con el proyecto del arquitecto ecuatoriano *Edmundo Daniel Quezada Feijo* sobre *Arquitectura modular basada en la Teoría de Policubos,* usando piezas de algunos de los cubos presentados en nuestro artículo, también citados por Serrentino y Molina (2008). Presentamos el cubo Bucólico, reconstrucción de un cubo incompleto a partir de 3 piezas policúbicas iguales.

Palabras clave

Disección de cubos. Policubos. Cubo de Lola. Cubo Bucólico. Análisis de soluciones de recomposición de cubos. Arquitectura modular con policubos. Problemas espaciales.

Abstract

Systematically analyzed, without contribution computer as an example of analysis of a space class problem and how to represent the positions of the parts, the solutions Lola cube. The highlight for their involvement with the project architect of Ecuadorian Edmundo Daniel Quezada Feijo on modular architecture based on the Theory of polycubes, using pieces from some of the cubes presented in our article, also cited by Serrentino and Molina (2008). Introducing the Bucolic cube, incomplete reconstruction from 3 equal pieces policúbicas cube.

Keywords

Dissection of cubes. Polycubes. Lola Cube. Bucolic Cube. Analysis of solutions recomposition of cubes. Modular architecture with polycubes. Spatial problems.

Cuando ya teníamos avanzada la redacción de este artículo nos ha sobrecogido una noticia tristísima: nuestro querido amigo gallego Coque (Manuel Pazos Crespo) había fallecido el 24 de diciembre. No podemos dejar de reconocer su figura de maestro ejemplar y de amigo incondicional.

Nos conocimos en las JAEM de Castellón, hace ya muchos años, y desde entonces estuvimos siempre en contacto, unidos. Volvimos a coincidir físicamente en el curso de Formador de Formadores en Barcelona y allí se cimentó aún más nuestra amistad.

Fue el invitado principal de nuestra primera Exposición de Juegos y Puzles. Nos sorprendió cuando se presentó con su humor de siempre, junto a su querida esposa Pili, disfrazados ambos de chinos para ofrecer un magistral taller sobre el Tangram.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

Asistimos, por invitación expresa suya, a sus famosas Xornadas de Matemática Recreativa en La Coruña. ¡Los paseos vespertinos por las calles de su amada ciudad! ¡Aquellas queimadas al final de las cenas! Intercambios de ideas, de proyectos…

Era un hombre apasionado por encima de todo. Por su familia, por su profesión, por las educación matemática, por las matemáticas recreativas, por sus amigos. Sigue en nuestros oídos su grito de guerra: ¡Oye, hermano!

Era la alegría hecha humanidad, con su abierta sonrisa. Siempre lo tendremos presente así: fuerte, alegre, vital, apasionado, familiar y amistoso. Amigo de sus amigos. Coque, ¡contigo siempre nuestro recuerdo! Te añoramos desde Canarias.

Hemos pensado y decidido que en este artículo vamos a ofrecerles un análisis detallado de las soluciones del Cubo de Lola.

Y ello porque dicho cubo ha resultado una disección del cubo en policubos sumamente interesante.

Los arquitectos argentinos Roberto H Serrentino y Hernán Molina, en su artículo Serrentino R. y Molina H. 2008. *Arquitectura Modular basada en la Teoría de Policubos*, extraído de http://cumincades.scix.net/data/works/att/8a44.content.pdf, exponen que “la Arquitectura modular se refiere al diseño de sistemas compuestos por elementos separados que pueden conectarse preservando relaciones proporcionales y dimensionales. La belleza de la arquitectura modular se basa en la posibilidad de reemplazar o agregar cualquier componente sin afectar al resto del sistema.”

Y después de hablar de los policubos indican que “a partir del carácter volumétrico y modular de los policubos, es posible establecer correspondencias con formas tridimensionales de uso arquitectónico, constituyendo una poderosa herramienta en los procesos de diseño asistido, para:

- ser utilizados como disparadores creativos en la realización de diseños arquitectónicos
- ampliar las posibilidades de los sistemas CAAD explorando agrupamientos modulares complejos
- desarrollar un procedimiento simplificado de enseñanza-aprendizaje de la forma arquitectónica.”

A partir de esta idea inicial el arquitecto ecuatoriano Edmundo Daniel Quezada Feijoó presenta su trabajo de fin de titulación, dirigido por el arquitecto Xavier Burneo de la Universidad Católica de Loja, con el título “Arquitectura modular basada en la Teoría de Policubos” donde aplica y desarrolla las propuestas de Serrentino y Molina.

http://cumincades.scix.net/data/works/att/sigradi2012_84.content.pdf

Lo curioso es que toma como modelos los policubos utilizados en disecciones del cubo que ya hemos comentado en artículos anteriores y, naturalmente, el Cubo de Lola, aunque no cita el artículo donde aparece mencionado. De hecho utiliza como referencia nuestros artículos sobre disecciones del cubo.

Este es el colorido cuadro donde resume las disecciones que analiza (figura 1).

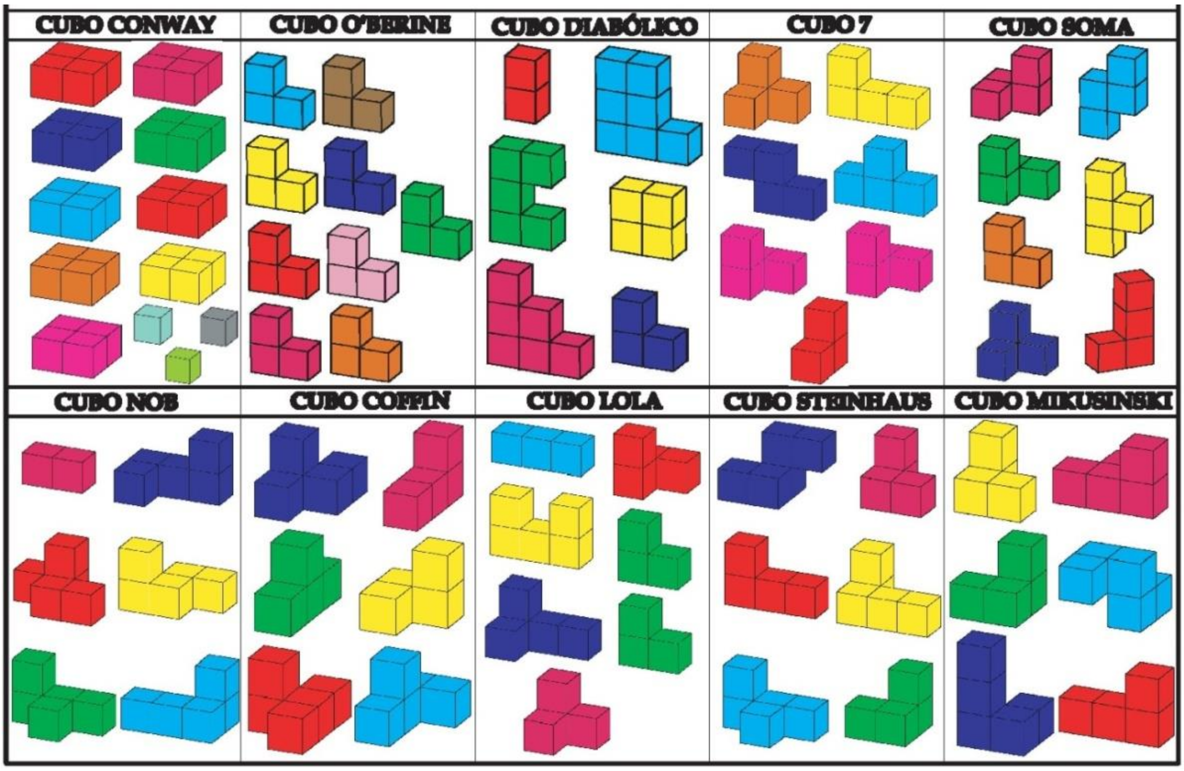


Figura 1.

Esta curiosa arquitectura basada en el uso del cubo como elemento básico no es demasiado moderna, sino que hay ejemplos conocidos, algunos de los cuales se pueden apreciar en los artículos y trabajos mencionados anteriormente. Como curiosidad decir que el excelente amigo Pepe Muñoz, en el blog que coedita con Jesús Fernández bajo el nombre de "Algo más que números" (http://algomasquenumeros.blogspot.com.es/), nos presenta una de esas singulares edificaciones.

Se trata de la cabaña Kezmarska, ubicada en la zona montañosa de Eslovaquia, en las montañas de Tatras (figura 2).

Figura 2.

Construida inicialmente en 1922 y reconstruida por el estudio checo Atellier 8000. Se trata de un albergue de montaña con forma de cubo inclinado y que incluye un restaurante, depósito de esquí con motos para la nieve y hospedaje para aficionados al senderismo. El cubo está recubierto de placas de aluminio y placas solares de forma que se convierte en una construcción ecológica y autosostenible.

Análisis del Cubo de Lola

Descripción

Creado por Muñoz y Hans (Grupo Azarquiel) y dedicado a Dolores de la Coba; este cubo se encuentra formado por siete piezas policúbicas: tres tricubos (2 en forma de V y uno en forma de I), dos tetracubos y dos pentacubos.

Piezas

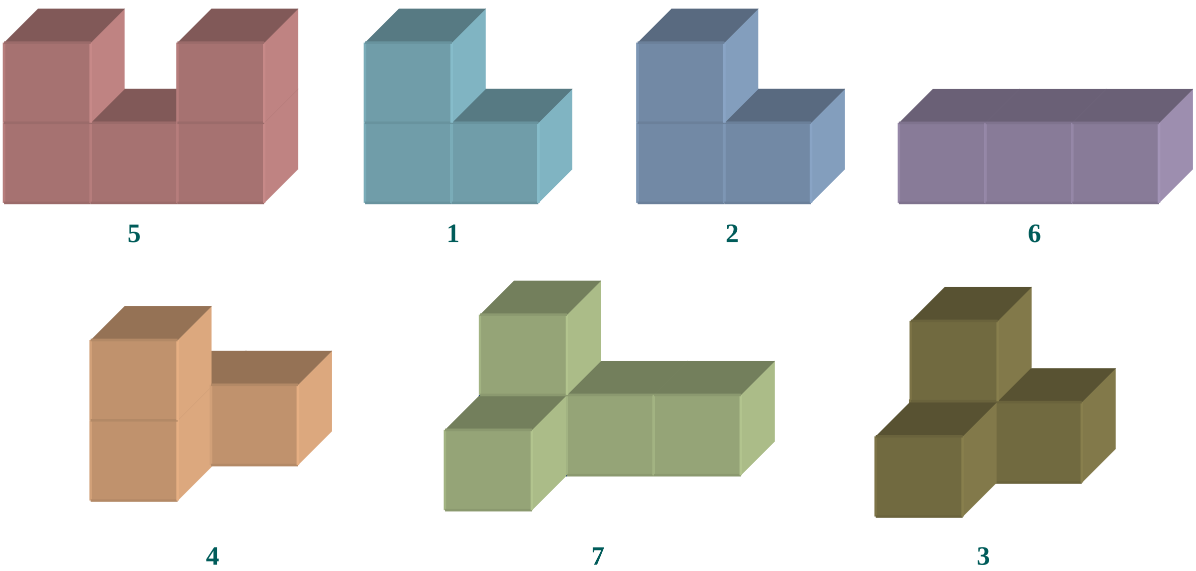


Figura 3. Piezas del Cubo de Lola

Piezas clave

En nuestro trabajo sobre los puzles siempre explicamos a nuestros alumnos que deben clasificar las piezas por su dificultad de encaje. En este caso, por su tamaño, consideramos piezas fáciles la 1, la 2, la 3 y la 4, ya que pueden ser colocadas ocupando posición en uno o dos pisos del cubo; consideramos de tipo intermedio las piezas 5 y 6, ya que ocupan uno, dos o tres pisos; y, finalmente, compleja la 7 ya que siempre ocupará dos o tres pisos (figura 3).

Estrategias

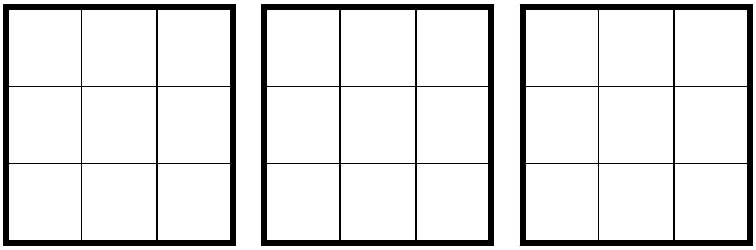
La estrategia más simple consiste en colocar dos o tres piezas complejas formando la base del cubo de manera compacta. Y a partir de esas tratar de encajar el resto para formar el cubo.

Para simplificar el estudio hemos decidido tomar las piezas 6 y 7 como referencia básica y colocarlas de todas las maneras posibles. Una vez establecidas esas posiciones, tratar de completar cada una de ellas y ver si existe o no la solución para cada una de ellas. Y, si es posible, estudiar si hay más de una solución en cada caso.

Códigos

Usamos varias maneras de representar las posiciones de las piezas en la construcción del cubo. Primero utilizaremos una plantilla donde se observen los tres planos (pisos INFERIOR, INTERMEDIO y SUPERIOR) paralelos del cubo, en un diagrama que rellenaremos con las piezas, indicando cada una de ellas con su número y un color diferente para cada una: **UNO**, **DOS**, **TRES**, **CUATRO**, **CINCO**, **SEIS** y **SIETE**. La plantilla puede ser plana o mostrar los pisos a diferente altura, pero sigue siendo una cara plana del cubito unitario.

Base para el diagrama



Piso inferior   Piso intermedio   Piso superior

Figura 4.

Una solución:

Piso inferior

6	7	7
5	4	7
5	4	7

Piso intermedio

6	3	7
5	4	4
2	2	1

Piso superior

6	3	3
5	3	1
5	2	1

Figura 5.

Soluciones

Para el análisis de las distintas soluciones, podemos partir de la posición relativa de las piezas 6 y 7. Se pueden colocar en paralelo, ocupando ambas tres pisos, o de forma transversal, ocupando la 6 un piso y la 7 tres pisos. El código utilizado será del tipo 6P7N, para la posición en paralelo, y 6T7N para la posición transversal. La letra N simboliza, en orden alfabético, las distintas posiciones que puede tomar la pieza 7 una vez colocada la 6.

Esquemáticamente, con el tricubo de la pieza 7 paralelo a la pieza 6 sería:

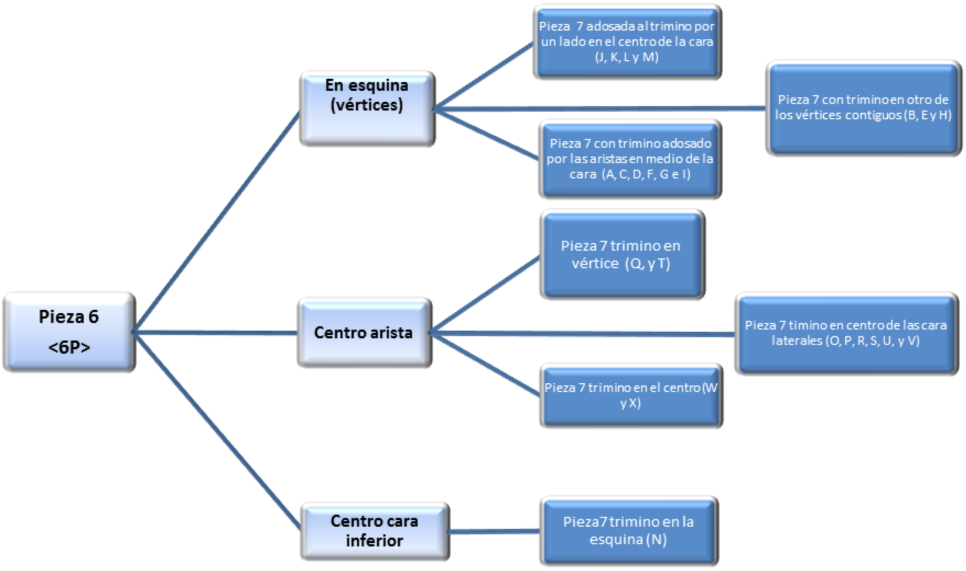


Figura 6. Esquema de una solución

Para cada posición ofreceremos algunas de las soluciones ya encontradas por nosotros. Otras las dejaremos como reto a nuestros lectores, con la única condición de construirse un cubo de Lola con cubitos de madera para "jugar" a la búsqueda todas las soluciones posibles.

Para facilitar la búsqueda y clasificación, así como la representación de las diversas posiciones, hemos numerado la cara inferior del cubo tal como vemos en el primer cuadrado de la siguiente figura ("cara guía"), comenzando en la esquina superior izquierda y en espiral hasta el centro de la cara. Los cubitos que pertenecen al tricubo de la pieza 7, en verde, aparecen en un tono más oscuro que el resto de los cubitos de esta pieza que están en contacto con la superficie inferior. Y, por último, hemos ordenado las posiciones relativas, deletreándolas, de las piezas 6 y 7, colocando el tricubo del 7 siguiendo el orden de la cara guía inicial.

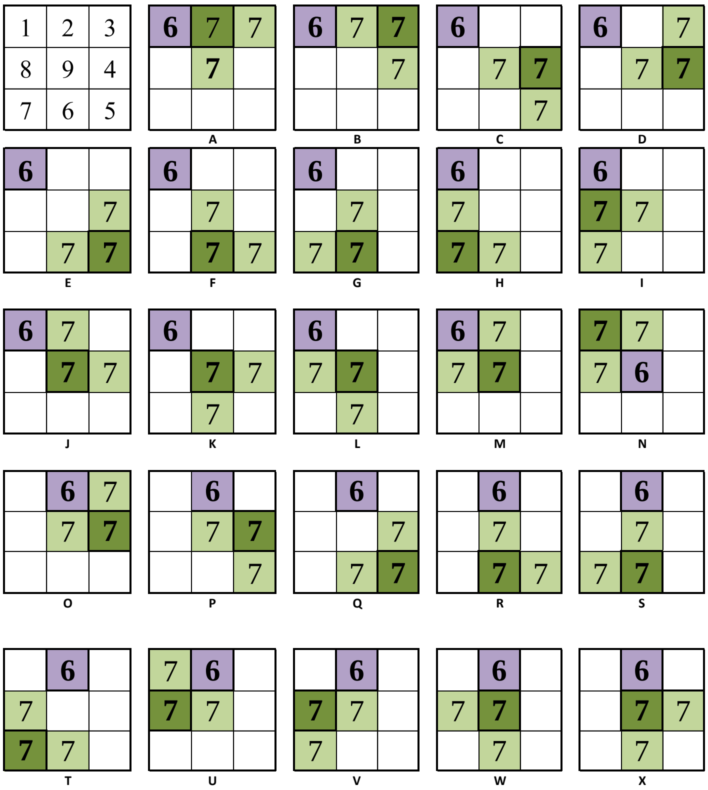


Figura 7

Posiciones paralelas:

La pieza 6 puede estar colocada en un vértice, en el centro de una arista o en el centro de la cara inferior. Cualquier otra posibilidad es transformable por rotaciones y simetrías en cualquiera de ellas. A partir de cada una de las tres colocaremos la pieza 7 en todas las posiciones posibles.

En la figura 1 vemos ejemplos de la pieza 6 en un vértice de la cara inferior y la pieza 7 apoyada sobre el tricubo que la sustenta:

Con la pieza 6 en la posición del centro de la arista de la cara inferior; en esta posición sólo hay un caso: el N.

Contempladas en perspectiva se verían así algunas de las posiciones. Como ejercicio complementario, ¿pueden dibujar las otras distribuciones? Y, basándose en ellas, ¿algunas soluciones completas?

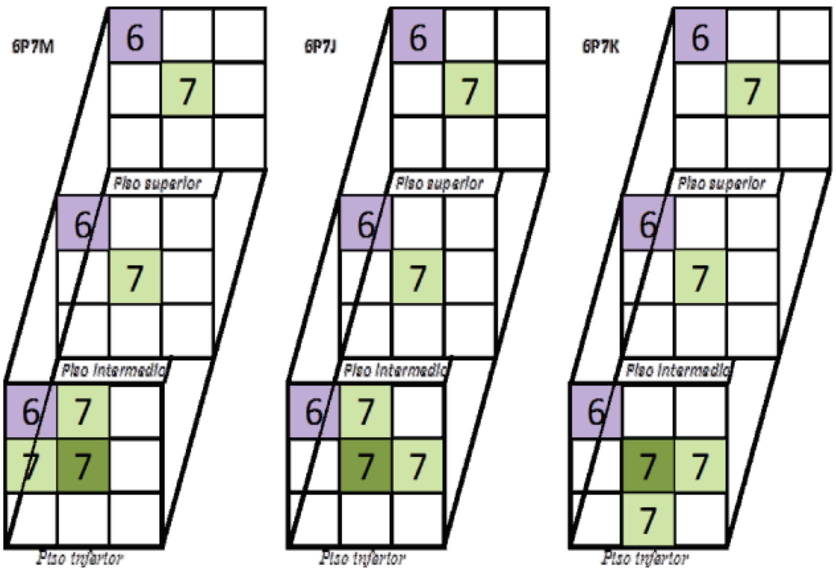


Figura 8.

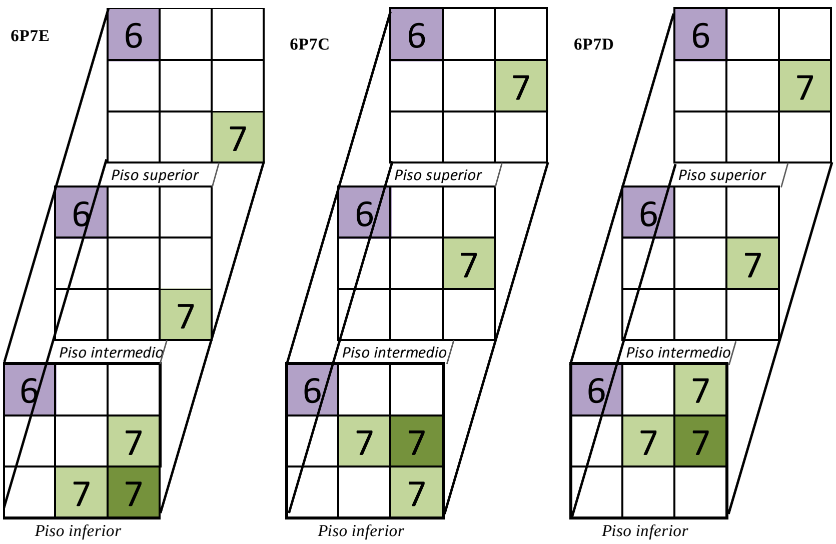


Figura 9.

Posiciones transversales:

Con la pieza 6 de pie, ocupando tres pisos, y la pieza 7 acostada sobre su parte más larga en la cara inferior del cubo (desde A hasta J), y con la pieza 6 en el centro de una arista, (desde K hasta R). Con la pieza 6 en el centro de la cara inferior están las posiciones S y T.

Debajo presentamos alguna solución completa, en el sistema de representación de los tres pisos del cubo.

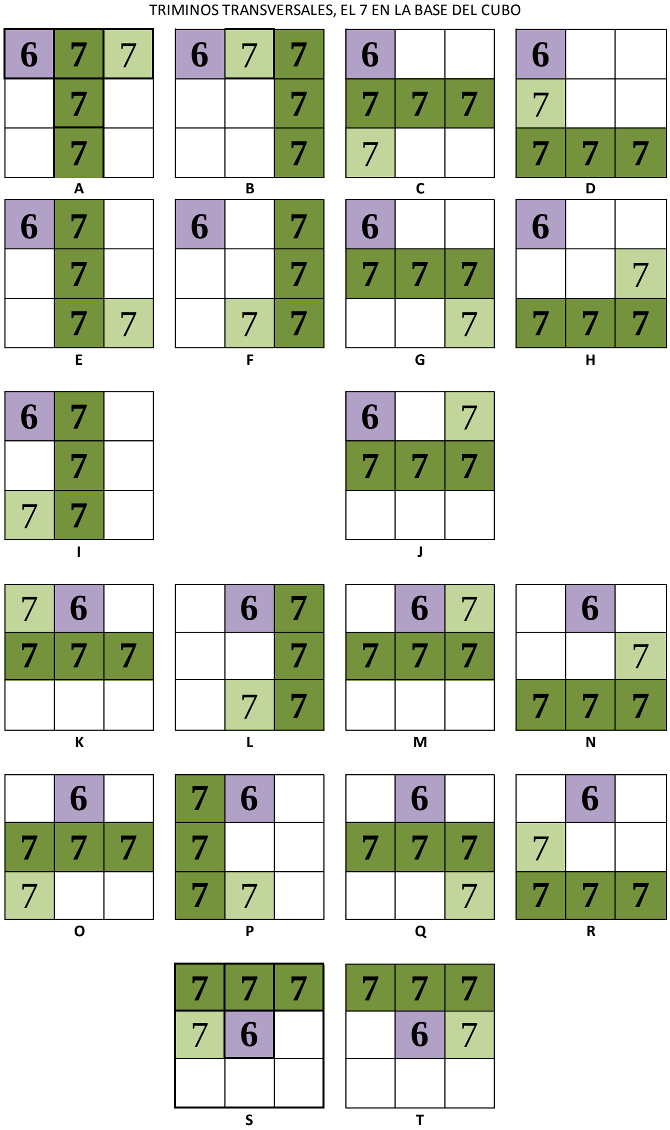


Figura 10.

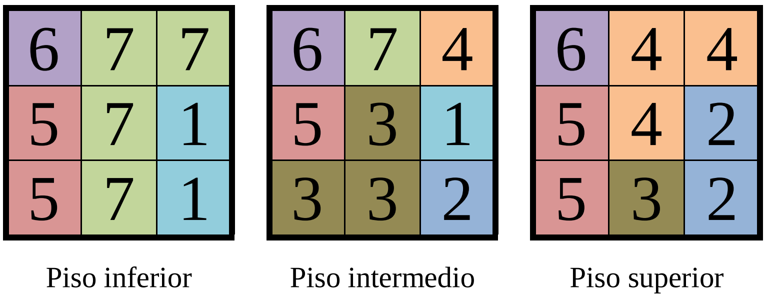


Figura 11.

6	7	7
2	2	7
2	4	7

Piso inferior

6	3	7
1	1	4
1	4	4

Piso intermedio

6	3	3
5	3	5
5	5	5

Piso superior

Figura 12.

Esta es una segunda solución para la misma disposición:

6	7	7
5	4	7
5	4	7

Piso inferior

6	3	7
5	4	4
2	2	1

Piso intermedio

6	3	3
5	3	1
5	2	1

Piso superior

Figura 13.

6		
7	7	7
7		

Piso inferior

6		
7		

Piso intermedio

6		

Piso superior

Figura 14.

6		
7	7	7
		7

Piso inferior

6		
		7

Piso intermedio

6		

Piso superior

Figura 15.

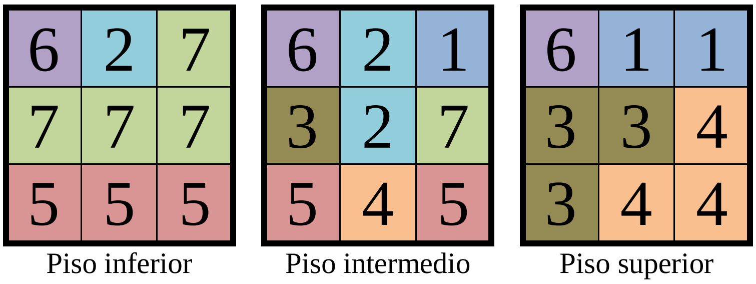


Figura 16.

Esta es otra solución para la misma disposición:

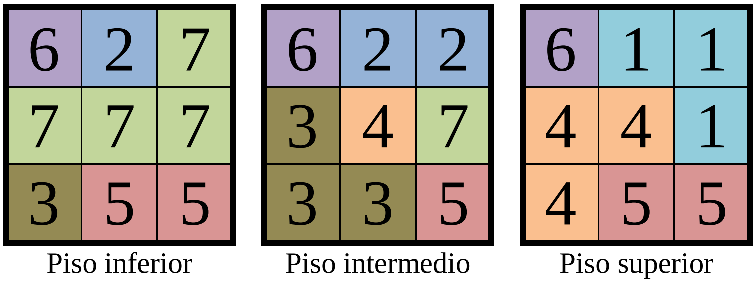


Figura 17.

6T7f

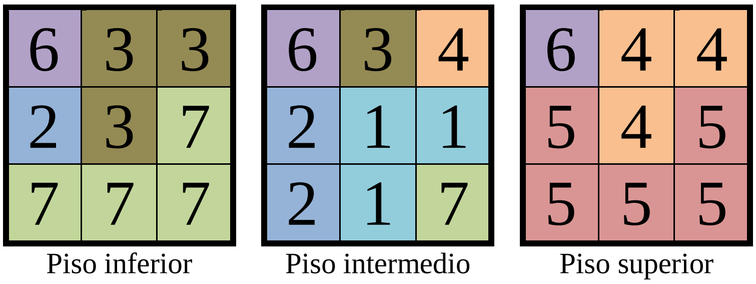


Figura 18.

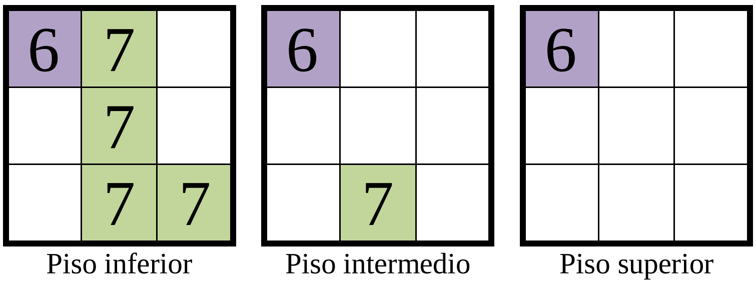


Figura 19.

Piso inferior			Piso intermedio			Piso superior		
6		7	6			6		
		7						
	7	7			7			

Figura 20.

Con la pieza 6 en el centro de una arista:

Piso inferior			Piso intermedio			Piso superior		
7	6			6			6	
7	7	7	7					

Figura 21.

Piso inferior			Piso intermedio			Piso superior		
	6			6			6	
7	7	7	7					
7								

Figura 22.

Piso inferior			Piso intermedio			Piso superior		
	6			6			6	
7								
7	7	7	7					

Figura 23.

Con la pieza 6 en el centro de la cara inferior; en esta posición sólo hay un caso:

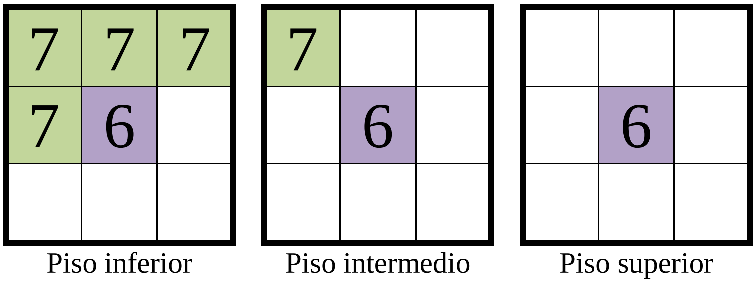


Figura 24.

Nos queda finalmente considerar la posición con la pieza 6 de pie, ocupando tres pisos, y la pieza 7 acostada sobre su parte más larga en la cara intermedia del cubo. El cuadrado más oscuro con el 7 es el que está en la parte inferior del cubo, junto a la cara del 6.

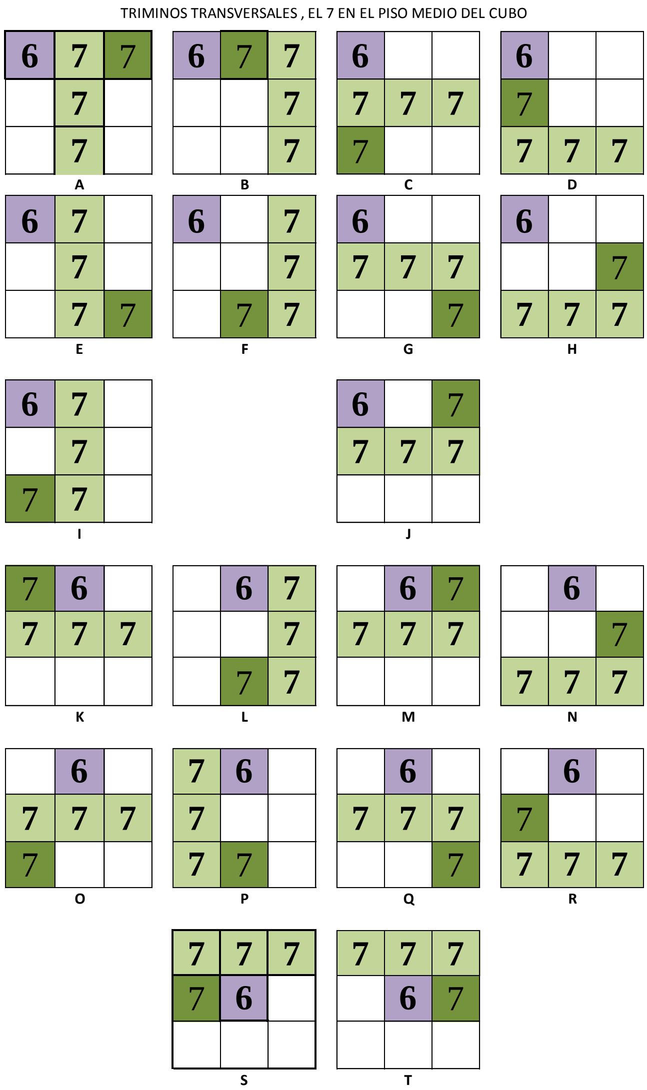


Figura 25.

6		

Piso inferior

6	7	7
	7	
	7	

Piso intermedio

6	7	

Piso superior

Figura 26.

6		

Piso inferior

6	7	7
		7
		7

Piso intermedio

6		7

Piso superior

Figura 27.

6		

Piso inferior

6		
7	7	7
7		

Piso intermedio

6		
7		

Piso superior

Figura 28.

6		

Piso inferior

6		
7	7	7
		7

Piso intermedio

6		
		7

Piso superior

Figura 29.

6	3	3
5	3	5
5	5	5

Piso inferior

6	3	7
7	7	7
4	4	2

Piso intermedio

6	1	1
4	1	7
4	2	2

Piso superior

Figura 30.

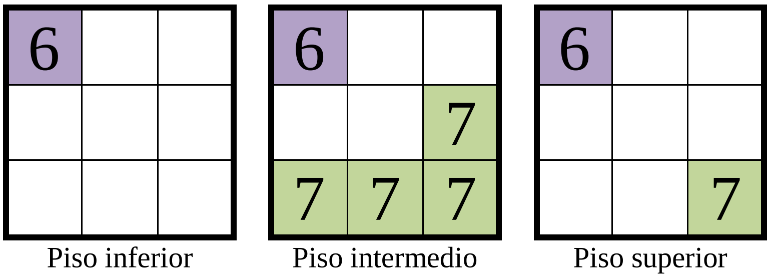


Figura 31.

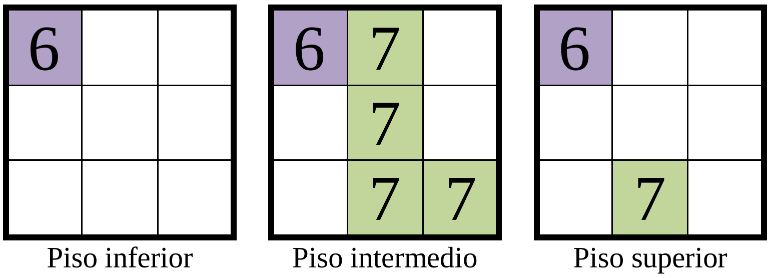


Figura 32.

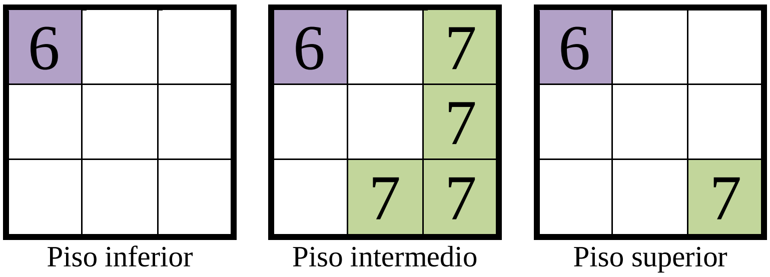


Figura 33.

Con la pieza 6 en el centro de una arista:

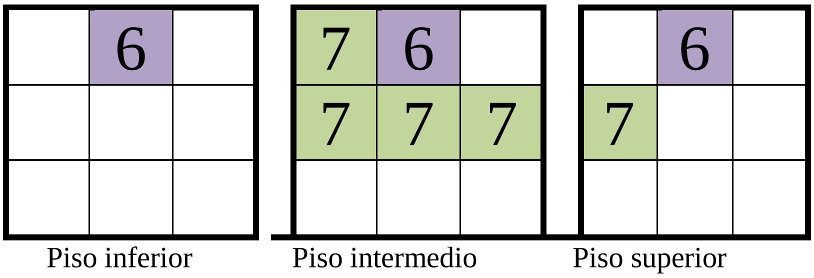


Figura 34.

Piso inferior

	6	

Piso intermedio

	6	
7	7	7
7		

Piso superior

	6	
7		

Figura 35.

Piso inferior

	6	

Piso intermedio

	6	
7		
7	7	7

Piso superior

	6	
7		

Figura 36.

Con la pieza 6 en el centro de la cara inferior; en esta posición sólo hay un caso:

Piso inferior

	6	

Piso intermedio

7	7	7
7	6	

Piso superior

7		
	6	

Figura 37.

Las soluciones encontradas de cualquier otra manera deberán comprobarse con respecto a los modelos anteriores, mediante rotaciones del cubo hasta encontrar la posición base de las dos piezas privilegiadas.

La solución que vemos a continuación ¿es equivalente a alguna de las ya estudiadas?

Piso inferior

3	7	7
3	3	7
6	6	6

Piso intermedio

5	4	7
3	1	2
5	1	2

Piso superior

5	4	7
5	4	4
5	1	2

Figura 38.

Para decidirlo bastará con hacer una, dos o tres rotaciones de esa solución para llevarla a una cualquiera de las ya analizadas. O no; en cuyo caso estaremos ante una solución diferente. Veámoslo con la anterior. Se trata de una posición transversal. Hagamos un giro de 90^0 hacia la derecha. Se colocan las tres columnas de la derecha en el piso inferior, las tres columnas centrales en el piso intermedio y las tres columnas de la izquierda en el piso superior. Nos queda la posición **6T7b** con una simetría simple de eje sobre la fila central:

7	7	7
7	2	4
6	2	2

Piso inferior

7	4	4
3	1	4
6	1	1

Piso intermedio

3	5	5
3	3	5
6	5	5

Piso superior

Figura 39.

Siempre se puede explorar un poco más sobre las cosas conocidas. El Cubo de Lola tiene muchas soluciones, lo hemos visto. Eso nos indica que es de un tipo muy similar al Cubo Soma; al menos en el sentido de que podemos formar otras figuras con sus piezas y no solamente el Cubo.

Este es un ejemplo de ellas, muy sencilla, similar a otra que se realiza con el Cubo Soma. La podemos llamar CASTILLO CON POZO (tiene patio central y tres torres).

Figura 40

En un próximo artículo podríamos explorar qué figuras son posibles y hacer un catálogo con ellas. Aquí sería inestimable la colaboración de nuestros lectores. Fabríquense un Cubo de Lola pegando cubitos unitarios para formar sus piezas; luego investiguen con creatividad y envíen a la dirección de la revista los hallazgos que hayan obtenido. Prometemos, como siempre, que daremos los nombres de los autores de cada figura.

Pueden usar nuestra plantilla para escribir las soluciones. Éste es el modelo:

Piso inferior

Piso intermedio

Piso superior

Figura 41

Pero queremos también ofrecerles una de las últimas adquisiciones del Komando Matemático. Una disección muy curiosa del cubo en policubos, que ha tenido en jaque a nuestros habituales visitantes. Tanto en la Feria de las Vocaciones de La Laguna como en la Feria de la Ciencia de La Orotava ha sido la sensación.

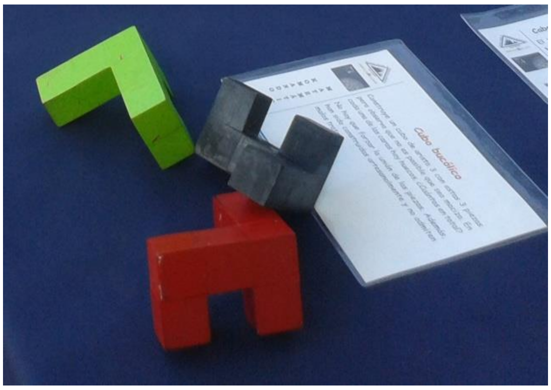


Figura 42

El Cubo Bucólico

Consta de tres piezas iguales, formadas por 7 cubitos unitarios cada una, y el objetivo es formar un cubo con 6 huecos, que totalizarían los 27 cubitos del cubo de 3x3x3.

Es un diseño de Yasuhiro Hashimoto presentado al IPP Design Competition del año 2013. Y tal y como lo describen en algún blog:

"El objetivo de reunir a las tres piezas idénticas en un cubo de 3x3x3 suena simple, pero en realidad es un poco difícil! Se aprovecha de una tendencia natural que la mayoría de la gente tiene en la resolución de este tipo de rompecabezas."

Figura 44

En este sentido, al igual que ocurre con otros puzles como la T de cuatro piezas, esa tendencia natural conduce a intentar que el prisma sobresaliente encaje en el hueco de otra de las piezas y esto imposibilita el colocar la tercera. Así que la sencillez del diseño está en relación inversa con la dificultad para resolverlo: el ideal de cualquier puzle que se precie.

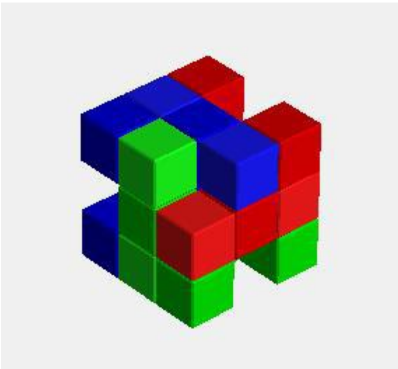
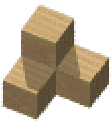


Figura 43

Permite plantear ¿cuántos huecos hay que dejar? Que dada la igualdad de las tres piezas, ¿cómo se repartirán esos huecos en sus seis caras?

Se podría considerar derivado del diseñado por Bram Cohen con el nombre de **Best 9**. Consta de cinco tetracubos como el de la figura  tres bicubos  y un cubo unitario . Tiene una única solución.

Y, también, les exhortamos a usar los juegos con sus alumnos en clase o con su familia en casa. Es divertido y educativo. Las estrategias de resolución de problemas y el uso del análisis de las figuras está al alcance de todos y su utilización mejora enormemente la competencia matemática.

Hasta el próximo NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas pues. Un saludo.

El Club Matemático