# Problemas comentados

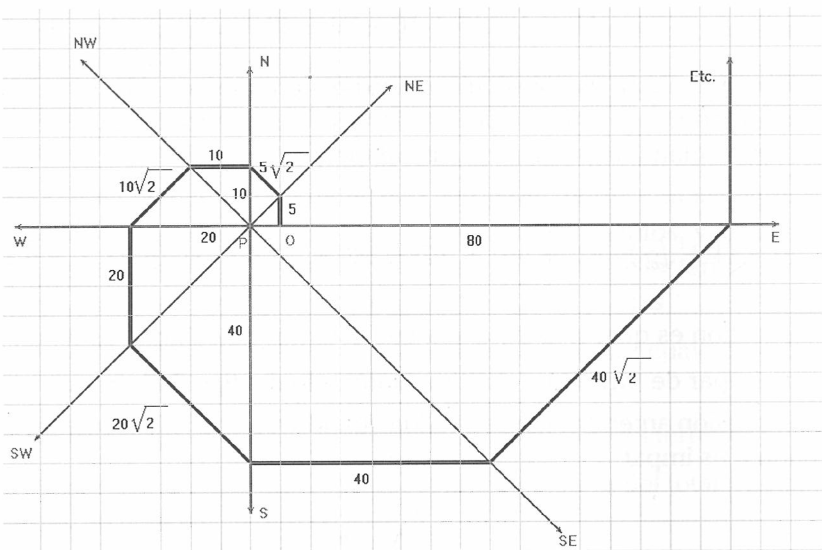
## A cargo del Club Matemático

Uno de los temas propuestos para el Día Escolar de la Matemática 2003 es el relativo a las proyecciones sobre planos, cálculos sobre superficies no planas y otros temas que relacionan matemática y cartografía. Es por ello que pretendemos traer a estas páginas algunos problemas que, conocidos o no, pueden encajar en la temática que mencionamos. El problema número 8 del recorrido en espiral, con las menciones a la situación cardinal con respecto al poste, puede ser un punto de arranque.

### Problema nº 8:

*Un hombre está de pie en una llanura, a 5 m al este de un poste, y mirando al norte. Camina recto hacia el norte hasta que se sitúa directamente al nordeste del poste; entonces, siempre en línea recta, camina al noroeste hasta que está directamente al norte del poste; entonces camina hacia el oeste hasta que está directamente al noroeste del poste; y sigue así, describiendo una línea poligonal en espiral. Cuando de nuevo está situado al este del poste, ¿cuántos metros ha recorrido? Encontrar una fórmula, con d = distancia desde el poste, y n = número de segmentos caminados.*

*(Barr, S. "Mathematical Brain Benders"; Dover)*



Y para resolverlo nos ayudamos de una técnica de resolución de problemas que muchas veces infravaloramos cara a nuestros alumnos: el uso de gráficos, esquemas y dibujos que ayuden a visualizar el problema y su solución.

En este caso, la figura representa el trayecto que sigue el hombre desde que parte en su camino espiral, con el poste situado en el punto P, y el inicio del camino en el punto O. Como muestra el diagrama, cada segmento caminado es uno de los dos lados iguales de los triángulos rectángulos isósceles, múltiplos de 5 cuando camina en la dirección N-S o E-W, y múltiplos de $\sqrt{2}$ los trayectos en diagonal. Las denominamos $S_i$ y $S_p$.

$$S_i = 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + \ldots = 5 \cdot 2^0 + 5 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \ldots$$

para los trayectos 1º, 3º, 5º, 7º, ...

$$S_p = 5 \cdot \sqrt{2} + 10 \cdot \sqrt{2} + 20 \cdot \sqrt{2} + \ldots = 5 \cdot 2^0 \sqrt{2} + 5 \cdot 2^1 \sqrt{2} + 5 \cdot 2^2 \sqrt{2} + 5 \cdot 2^3 \sqrt{2} + \ldots$$

para los trayectos 2º, 4º, 6º, ...

Tenemos entonces dos series: una de los trayectos impares, múltiplos de 5, y otra para los trayectos pares, múltiplos de $\sqrt{2}$ . La suma de ambas series nos dará el camino recorrido, **d**, hasta la finalización del trayecto a considerar.

$$\mathbf{d} = 5 + 10 + 20 + 40 + \ldots + 5 \cdot \sqrt{2} + 10 \cdot \sqrt{2} + 20 \cdot \sqrt{2} + \ldots =$$

$$(1 + \sqrt{2}) \cdot (5 + 10 + 20 + 40 + \ldots)$$

La cuestión ahora es conseguir una expresión que nos relacione la distancia recorrida **d** con el número de trayectos realizados **n**. Podemos escribir la última expresión de esta manera:

$$d = (1 + \sqrt{2}) \cdot (5 \cdot 2^0 + 5 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \ldots) = (1 + \sqrt{2}) \cdot \left( \sum_{n=0}^{n} 5 \cdot 2^n \right)$$

La cuestión es que, si la distancia que estamos calculando es de un número impar de trayectos, el último sumando del tipo $5 \cdot 2^n \sqrt{2}$ nos sobra. La expresión anterior es, pues, válida cuando n es par, y la siguiente para cuado n es impar:

$$\mathbf{d} = (1 + \sqrt{2}) \cdot \left( \sum_{n=0}^{n} 5 \cdot 2^n \right) - 5 \cdot 2^n \sqrt{2}$$

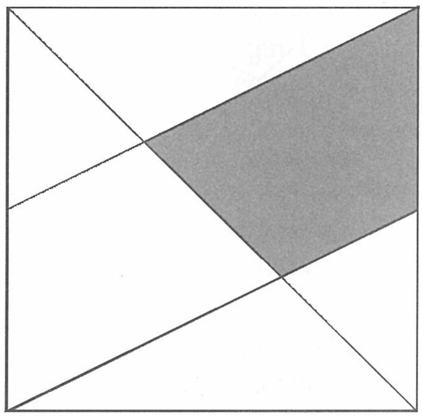
No cabe duda que la visualización del problema, sobre una cuadrícula, aporta una información importante para su resolución.

Los dos problemas propuestos en el último artículo, basados en los que fueron publicados en las fuentes que se mencionan, tienen otro elemento común: sus enunciados describen figuras, lo cual suele ser una dificultad añadida

**Problema nº 9:**

*Un agricultor tiene un terreno de forma cuadrada. Lo divide mediante tres rectas, una diagonal y las otras dos, paralelas entre si, uniendo uno de los vértices libres con el punto medio del lado opuesto. Queda así el terreno dividido en seis trozos. Hallar el área de uno de los trozos de mayor superficie.*

*(Revista "Math-École"; Suiza)*



De entrada, resulta difícil para nuestros alumnos visualizar la situación descrita. Muchos de nuestros alumnos se encuentran muy alejados de la lectura y con una comprensión deficiente de la misma.

La primera parte de la estrategia utilizada debe comenzar por trazar un dibujo geométrico con regla y compás.

Cualquier otra figura que se trace siguiendo las instrucciones, mediante los giros oportunos, se convierte en la ya dibujada o en su simétrica.

La pregunta es, pues, hallar el área de uno cualquiera de los dos trapecios que se forman en la banda central.

Este problema afecta a contenidos de Geometría, como son las figuras equivalentes, el paralelismo y puntos medios de segmentos, y también de Aritmética, como pueden ser las fracciones. Por supuesto, también de la Medida, medidas de segmentos y áreas de figuras planas.

Los procedimientos implicados pueden consistir en uno cualquiera de estos:

a) hallar un polígono común a cada una de las partes del terreno;

b) constatar que la parte gris representa la cuarta parte del total y deducir que su área es 1/4 del terreno;

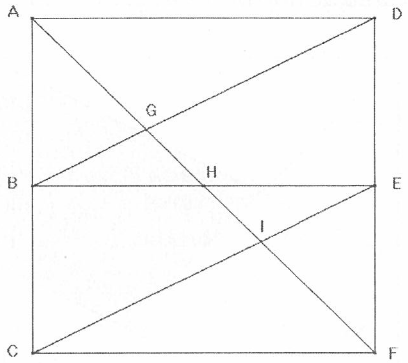
c) medir cada parte y calcular su área;

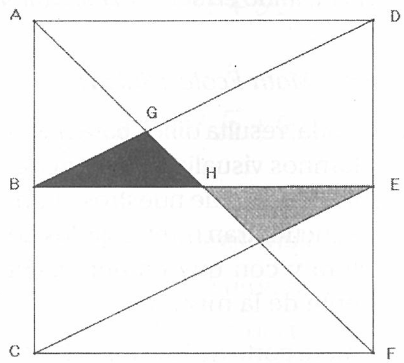
d) elegir una unidad y calcular las medidas y el área de la parte gris, utilizando el teorema de Pitágoras.

Los procesos para calcular o para medir conducen a una respuesta aproximativa y presenta dificultades para determinar la fracción de terreno.

La mejor y más exacta forma de abordar el problema consiste en utilizar las técnicas de dibujo para hacer las deducciones que precisamos o mediante un modelo igual en papel y, utilizando tijeras y pegamento, reconstruir la figura de manera más asequible.

Trazando una línea (BE) que una los puntos medios de los lados de donde han partido las dos líneas secantes, se obtiene:

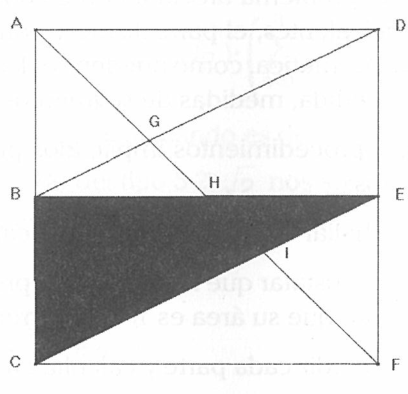



Ahora se ve inmediatamente que los dos triángulos pequeños (BGH y HEI) que se han formado son iguales. Sus ángulos están en posición de paralelas (BD y EC) cortadas por una secante (AF o BE, según convenga) y sus lados iguales.

El trapecio, cuya área tenemos que medir, se ha convertido ahora en una figura equivalente al trasladar el triángulo pequeño de manera que se forma un triángulo rectángulo (BEC) idéntico a los otros tres (ADB, DEB y CEF) que, junto a él, rellenan el cuadrado.

Y ya está resuelto. El área de la parte BGIC mide un cuarto del terreno.




Además de la revisión de estos dos problemas queríamos comentar una cuestión que siempre sale cuando hablamos de problemas y de estrategias de resolución. ¿Sirve para algo? ¿Se pueden realmente enseñar estrategias y heurísticos específicos a nuestros alumnos? ¿Vale la pena dedicar tiempo en clase a realizar estas enseñanzas?

Es difícil contestar a estas preguntas, pues sus resultados se ven a muy largo plazo. Además perdemos de vista a los alumnos con que trabajamos; difícilmente estamos con ellos más allá de dos años y no hay garantías de que nuestros compañeros continúen la labor iniciada.

Sin embargo se nos ha ocurrido dedicar un espacio de este artículo a ver qué cosas utiliza una alumna concreta a través del análisis de todos los problemas que ha realizado a lo largo de esos dos años, incluso estando el segundo de ellos fuera de nuestra enseñanza directa. Comentaremos en próximos artículos algunas de sus soluciones y reproduciremos respuestas completas para apoyar el argumento que defendemos.

Creemos que los alumnos mejoran siempre su manera de abordar, razonar, solucionar y presentar los problemas que se le proponen. Cada uno según su estilo, sus cualidades y su personalidad. Pero siempre hay una mejora. Aunque sólo fuese el cuidado en la presentación o la búsqueda de la comprensión del enunciado, nos daríamos por contentos. Por ello seguimos dando gran importancia a la resolución de problemas y dedicamos un tiempo en cada clase a enseñar estrategias de resolución.

Como de costumbre, no nos queremos despedir sin invitarles una vez más a colaborar con nosotros enviando sus propias soluciones, sus comentarios a las soluciones expuestas, sus experiencias con alumnos ante los mismos problemas, etc. También, agradecemos los problemas que juzguen interesantes y nos envíen para su publicación.

Queda hacer una nueva propuesta de problema. Esta vez se trata de un problema de lógica, original de Tarkus y extraído de los suplementos de pasatiempos del diario El País.

**Problema nº 10:**

*Durante sus horas matinales de playa, cuatro amigos (Ángel, Daniel, Isabel, Susana) que pasan sus vacaciones juntos se suelen divertir resolviendo sus pasatiempos favoritos (autodefinidos, crucigramas, sopas de letras, charadas). Descubra qué juego soluciona cada uno, los utensilios de escritura (bolígrafo, lápiz, pluma, rotulador) que emplea para ello y la bebida (bíter, limonada, té, tónica) que le gusta tener mientras en la mano.*

1. Daniel disfruta resolviendo crucigramas.
2. Quien emplea un lápiz, le gusta beber tónica; quien utiliza bolígrafo, se divierte con las sopas de letras.

3. Isabel soluciona los pasatiempos con una pluma.
4. Quien resuelve charadas, lo hace siempre bebiendo refrescantes limonadas.
5. Ángel es quien toma bíter.
6. Quien bebe té (que no es Susana), emplea para escribir un rotulador.

Recuerden que en los problemas de lógica es muy importante distribuir espacialmente la información, para lo cual conviene utilizar un diagrama adecuado.

Y conforme a la idea expuesta en el encabezamiento de este artículo, formulamos ahora unas cuestiones un tanto curiosas encuadradas dentro del

**Problema 11.**

¿Cuál es la tierra americana más cercana a las Islas Canarias? ¿Cuánto mide esa distancia?

¿Qué diferencia horaria real existe entre los dos extremos este-oeste del Archipiélago Canario? Consideramos que los extremos son Punta del Barbudo, junto al Faro de Orchilla, en la isla de El Hierro y Punta Prieta, cerca de Órzola, en Lanzarote.

Si el Almirante Cristóbal Colón desconocía la declinación magnética y hubiera dispuesto de una brújula y otros instrumentos para determinar el rumbo, de suficiente precisión, suponiendo que la declinación a la altura de las Islas Canarias a finales del siglo XV era de unos 13°, viajando hacia el oeste desde la Gomera, ¿dónde habría arribado? Compruébalo en una esfera terrestre.

Bien, pues aquí queda todo de momento. Y, como siempre, de ustedes, lectores, depende la bondad de esta sección y su continuidad.

Ánimo y hasta el próximo NÚMEROS.

Club Matemático.

**El** Club Matemático **está formado por los profesores** José Antonio Rupérez Padrón, **del** IES de Canarias-Cabrera Pinto **(La Laguna), y** Manuel García Déniz, **del** IES Tomás de Iriarte **(Santa Cruz de Tenerife).**

mgarciadeniz@sinewton.org / jruperezpadron@sinewton.org