REFLEXIONES SOBRE LA DIDACTICA DE LOS NUMEROS

Cástor Molina Iglesias
y Antonio Martinón Cejas

1. INTRODUCCION

Se viene observando de un tiempo a esta parte, por parte de los profesores de ciencias, en la mayoría de los alumnos de Bachillerato, una notable falta de destreza para el cálculo mental y escrito combinada con unos escasos conocimientos de la geometría intuitiva y, por si fuera poco, una casi total ineptitud para aplicar las matemáticas a sencillos problemas de la vida ordinaria.

Nuestros compañeros de otras asignaturas se quejan a menudo de estas deficiencias. El profesor de Física y Química se encuentra en el dilema de qué hacer con un alumno que plantea bien el problema (señal de que tiene claros sus conceptos físicos) pero que naufraga en el cálculo. A su vez, el de Dibujo se lamenta de que confundan, y no se trata de un único caso, milímetros con kilómetros, así como de que no tienen una idea aproximada del tamaño de las unidades de medida más comunes.

Los mismos profesores de Matemáticas vemos que muchos de nuestros alumnos, no sólo no saben operar, sino que se asustan y muestran extrañeza cuando se les hace observar una simplificación mal hecha, o que deben escribir "a" en lugar de "1.a, a/1, a^1", o que deben simplificar y no arrastrar a lo largo de todo el cálculo expresiones tales como "0/1", "(-2+8)/6", ..., o que no deben aplicar la propiedad distributiva para efectuar cálculos como "(2/5 - 1/2) x 1/3", etc. La primera vez que les planteamos a alumnos de 1° de BUP cuestiones tales como "calcula 7 - 3/5", tienen que escribir 7 como 7/1; luego calculan (!) el MCM (1,5). A la pregunta ¿cuántos quintos tiene una unidad?, pocos responden. Una vez aclarado esto, el resolver el problema (?) anterior diciendo 7 unidades son 7 x 5 = 35 quintos, luego la diferencia buscada vale 32 quintos, les parece "más rollo" y suelen rechazarlo. ¿Por qué? Pues porque están acostumbrados a hacerlo mecánicamente y el tener que pensar les molesta.

No es tan importante el hecho de que una operación se realice de un modo o de otro, aunque son intrínsecas al espíritu matemático la economía de pensamiento y la elegancia de los planteamientos, pero si un alumno desconoce que 1 unidad tiene "n" n-avas partes, ignora en absoluto lo que significa una fracción; y ello, aun cuando (en el mejor de los casos) pueda ser muy eficiente en el manejo operativo de las mismas.

No se pretende aquí, en lo que sigue, listar los errores y omisiones más frecuentemente habidos en la formación numérica de los alumnos, sino hacer unas reflexiones sobre estos asuntos que están en la base de toda formación matemática o científica de los mismos. Por los resultados no lo estamos haciendo bien; tal vez porque los alumnos están recibiendo las matemáticas en forma inadecuada para su asimilación.

Todo profesor debe conocer en profundidad y estar al día en la disciplina que explica; también debe conocer la historia de la génesis de sus conceptos. Lo primero le permite conocer qué es lo esencial y, de este modo, fijar las metas de lo que ha de explicar; lo segundo, en cambio, le orientará en el camino a seguir para lograr esas metas, ya que le hace sabedor de los esfuerzos y fracasos de quienes le antecedieron para lograr los actuales conocimientos. Ambos son instrumentos pedagógicos de gran ayuda para el profesor.

Por último, una cosa es lo que debe saber un profesor y otra muy distinta lo que debe enseñar a sus alumnos. No sólo en lo referente a la cantidad, sino en cuanto a la calidad. Con un símil alimentario: a un niño de pocos meses no se le puede dar la misma comida que a un adulto, ni aun cuando se le dé adecuada a su peso; el estómago del niño no puede digerir a edades tan tempranas alimentos que luego le serán beneficiosos y posiblemente hasta básicos. Si nos saltamos esta simple norma, caemos en el peligro aun de enfermarlo. Y hay que tener en cuenta que las malas experiencias pueden llevar al aborrecimiento. El desarrollo mental de un niño es más lento que su desarrollo físico; no en cuanto capacidad intelectiva, sino en cuanto a que su mundo mental CONCEPTUAL necesita, para irse conformando, de la experiencia, y ésta no se transmite, sino que se vive.

Al objeto de ilustrar lo dicho, se ha realizado una encuesta a alumnos de 1°, 2° y 3° de BUP y de COU, pertenecientes a dos Institutos (uno urbano y otro rural) de la isla de Tenerife. Los resultados han sido demasiado bajos para lo que cabría esperar, a pesar de que los grupos encuestados han sido normales -en algún caso buenos- en relación con los demás grupos del mismo curso e Instituto.

2. ANALISIS DE UNA ENCUESTA SOBRE LOS NUMEROS EN BUP Y COU

Con el fin de ilustrar este trabajo con unos datos sacados de la realidad, se llevó a cabo una encuesta en los Institutos de Bachillerato de Guía de Isora (localidad rural) y "Poeta Viana" de Santa Cruz de Tenerife (centro urbano).

El número de alumnos encuestado fue el siguiente

Curso	Centro rural	Centro urbano	Total
1° BUP	30	31	61
2° BUP	32	22	54
3° BUP	15	48	63
COU	22	45	67
Total	99	146	245

Hay que tener en cuenta que la encuesta ha sido realizada en Marzo, cuando ya el curso está bastante avanzado, y que en 1° de BUP se había realizado un repaso del cálculo con enteros y racionales antes de comenzar con los reales.

Las preguntas sólo se refirieron a operaciones con enteros y racionales y se procuró que recogieran los dos aspectos esenciales de los números: el conceptual y el operativo. Se pusieron cinco preguntas de cada tipo, alternándolas para hacer más agradable la cumplimentación del cuestionario.

Aunque el número de alumnos encuestado no es muy elevado, se trató de que los grupos elegidos fuesen normales, ni buenos ni malos. En el Instituto urbano la encuesta a 3° y COU se realizó a dos grupos diferentes (de profesor diferente), obteniéndose resultados que, en su mayor parte, no difieren en más de un 10%.

Primera pregunta: El termómetro marca 13° C. Una ola de frío hace bajar la temperatura 24°. ¿Cuánto marcará el termómetro?

La mayor parte de los errores se debe a no especificar el signo "-", dando por respuesta 11°, y a restar mal. Algunos errores aislados son -13°, -24°, 13° + 24°; incluso dos alumnos de 3° dicen "es imposible, porque ¿cómo va a bajar la temperatura 24° si el termómetro marca 13°?".

Segunda pregunta: Calcular: (2+6) x 13 = ; 4:2 + 3 = ; 8 + 1:2 = ; 7x4 - 1 = .

En su mayoría los errores se deben a efectuar las operaciones en el orden en que las encuentran, secuencialmente, haciendo caso omiso del convenio de prioridad para el caso en que no hay paréntesis y aparecen tres números enlazados mediante "+" o "-" y mediante "x" o ":".

<u>Tercera pregunta</u>: Julio César nació en 102 a. de C. y murió en 44 a. de C. ¿Cuántos años vivió?

Los errores más frecuentes consisten en no saber efectuar la resta de un número mayor a otro menor: 44 - 102 = 42. Es digno de observar que hay alumnos de 3° que no comprenden cómo puede haber muerto Julio César en la fecha en que murió habiendo nacido cuando nació.

<u>Cuarta pregunta</u>: Calcular: (3+2) x 13 - ((4-5) x (-2-7) + 4) x 11 = .

Los resultados erróneos están muy dispersos; muchos se deben a no respetar el criterio de prioridad ya señalado en la pregunta segunda para cuando se suprimen los paréntesis.

<u>Quinta pregunta</u>: Una operaria de una fábrica de puros los empaqueta en cajas de 24 unidades. Al terminar su trabajo ha completado 152 cajas, sobrándole 7 puros. ¿Con qué operación matemática relacionas el trabajo de la operaria?

La mayor cantidad de respuestas no acertadas (se consideró acertada "división") dicen "multiplicación y/o suma o resta"; muchos efectúan el cálculo que no se les pide; varios responden "la regla de tres".

<u>Sexta pregunta</u>: Escribe en forma de fracción, opera y representa gráficamente el resultado: 23´4 - 0´33333... =

Muchos alumnos, incluso en 3° y COU, dejan en blanco esta cuestión. El error más frecuente es sustituir 0´33333... por 33333/100000. Sólo uno de los encuestados ha realizado bien el cálculo y la representación; la mayoría de los que ejecutan una representación aceptable (?) lo hacen "a ojo".

<u>Séptima pregunta</u>: Una tableta de chocolate tiene 6x4 cuadraditos: (a) Juan se ha comido 5/8 de la tableta, ¿cuántos cuadraditos quedan?; (b) Blas llegó más tarde y se tomó 6 cuadraditos, ¿qué porción de la tableta se ha comido?; (c) Raquel comió 1/3 de lo que había quedado después de haber comido Juan y Blas, ¿cuántos cuadraditos se ha comido ella?; (d) ¿Podrían entre 5 personas comerse 15/11 de una tableta? Razona la respuesta.

En el apartado (a) muchos errores consisten en dar como resultado lo que se ha comido Juan y no lo que queda; hay quienes para calcular los 5/8 de 24 escriben la suma 5/8 + 24. Las cuestiones más acertadas han sido (a) y (d) en el centro urbano, habiendo equilibrio en el centro rural entre los porcentajes de aciertos de las cuatro cuestiones.

Octava pregunta: Calcular: $\frac{4}{5} : \frac{6}{7} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \times \frac{2}{3} =$

Incluso en 3° y COU hay alumnos del centro urbano que no responden, mientras que en el rural responden todos. Algunos responden tomando el "aspa" del producto como una "x". Como anteriormente, bastantes errores se deben a no respetar el convenio de prioridades en expresiones de la forma a.b+c.

Novena pregunta: A cierto señor le tocó, en una participación de la lotería, 5/8 del premio del décimo. Para saldar una deuda usó 2/3 del premio quedándose con 2500 pts. ¿Con cuánto dinero fue premiado el décimo? ¿Y el billete completo?

Casi la mitad de los alumnos no responden a la pregunta. Los errores se deben, sin excepción casi, a un planteo disparatado.

Décima pregunta: Calcular: $(a+1)/(1/a - 1) =$

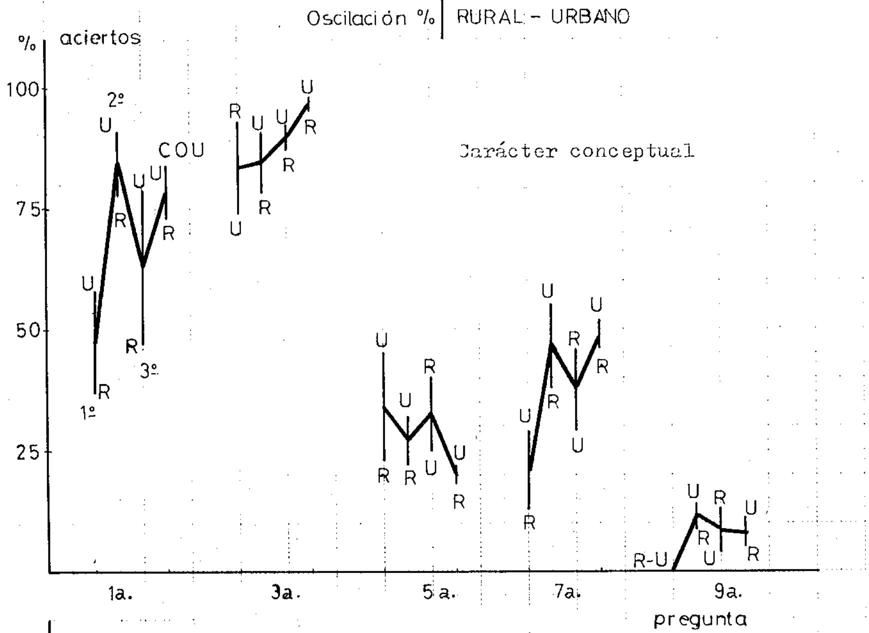
Muchos de los errores se deben a simplificaciones ilícitas.

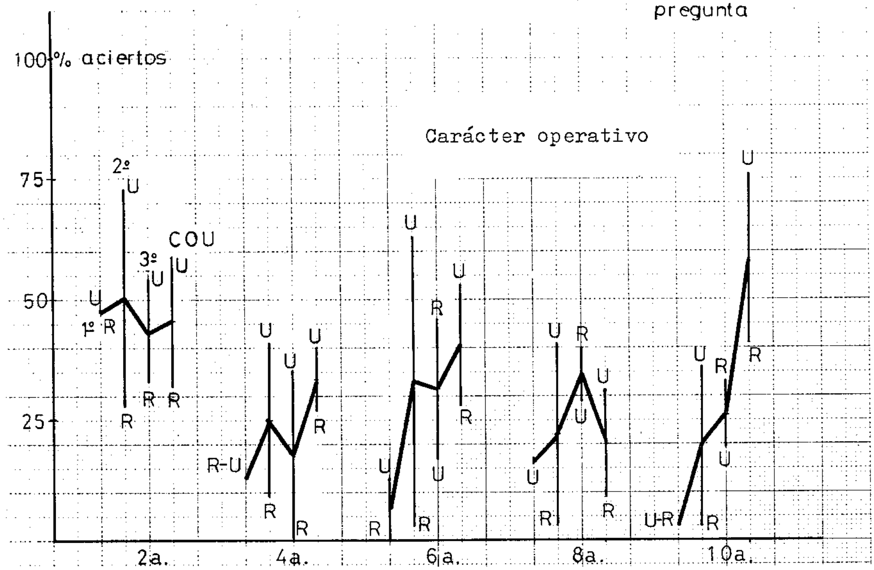
En general, como puede observarse en los gráficos y tablas que se acompañan, los porcentajes en el centro urbano suelen ser más altos que en el rural, posiblemente debido a razones de carácter socio-económico. Los resultados, tanto en las cuestiones pares (operativas) como en las impares (conceptuales), son en ambos casos muy bajos.

En las gráficas que vienen a continuación, se han dibujado los polígonos de frecuencias porcentuales de las medias de aciertos entre ambos centros (rural-urbano), con un segmento vertical marcando la oscilación respectiva en cada curso. Referida a esta representación media podemos notar lo siguiente:

i) En cuanto a las preguntas de TIPO CONCEPTUAL, sobre los enteros negativos, el porcentaje en la primera pregunta es muy inferior al deseable en cada curso. Proporcionalmente, el mejor es 2° de BUP, a cuyos alumnos se dio, el curso pasado, un repaso a los sistemas numéricos en consonancia con las ideas aquí expuestas. En cuanto a las otras dos preguntas, referidas a los conceptos de división y de fracción, el porcentaje no supera el 50%, estando en general bastante por debajo del mismo.

ii) Respecto a las preguntas de TIPO OPERATIVO, la segunda y la cuarta se referían sólo a los enteros, no superando la media el 50% en ningún curso; la cota es aún más baja para las preguntas sexta y octava, un 40%. La última pregunta, la décima, es una simple operación de cálculo literal; hay una evolución creciente desde 1° de BUP hasta COU, como cabía esperar, pero con resultados muy bajos en el primero de ellos.





(Nota: En las preguntas segunda, sexta y séptima figura el % de "al menos tres aciertos", "cálculo o gráfica bien" y "al menos dos aciertos", respectivamente).

Cuantitativamente los resultados de la encuesta fueron los siguientes, donde las cantidades expresadas X(Y) corresponden a X% de aciertos en el centro rural e Y% de aciertos en el centro urbano.

	1° BUP	2° BUP	3° BUP	COU
1 pregunta	37(58)	78(91)	47(79)	73(84)
2 pregunta				
4 aciertos	7(6)	0(18)	13(12)	0(20)
3 "	40(42)	28(55)	20(42)	32(44)
2 "	40(39)	59(23)	20(25)	36(22)
1 "	10(10)	9(4)	40(17)	32(11)
0 "	3(3)	3(0)	7(4)	0(2)
3 pregunta	93(74)	78(91)	87(92)	95(98)
4 pregunta	13(13)	9(41)	0(35)	27(40)
5 pregunta	23(45)	22(32)	40(25)	18(22)
6 pregunta				
Cálculo bien	0(10)	0(27)	13(15)	23(33)
Gráfica bien	0(3)	3(36)	33(2)	5(20)
7 pregunta				
4 aciertos	3(6)	0(18)	33(17)	27(16)
3 "	0(16)	13(23)	0(10)	14(18)
2 "	10(7)	25(14)	13(2)	5(18)
1 "	23(23)	9(9)	27(19)	18(18)
0 "	63(48)	53(36)	27(52)	36(31)
8 pregunta	17(16)	3(41)	40(29)	9(31)
9 pregunta	0(0)	9(14)	13(4)	5(11)
10 pregunta	3(3)	3(36)	33(19)	41(76)

Las conclusiones son claras; las preguntas eran lo bastante sencillas para esperar resultados mucho mejores. Desde luego, a la vista de esto, los alumnos que no continúen sus estudios habrán pasado por una EGB y un BUP, pero en cuanto a las matemáticas, poca ayuda le han de prestar para su fututo desenvolvimiento en la vida. ¿Qué concepto tendrá el alumno de esta asignatura?

3. LA BASE EXPERIMENTAL DE LOS CONCEPTOS NUMERICOS

En la enseñanza de los conceptos numéricos hay que tener en cuenta dos factores esenciales y, en cierto modo, complementarios:

a) la génesis y aplicabilidad de los conceptos numéricos

b) el cálculo aritmético formal.

El conocimiento de los números se ha de basar en un adecuado equilibrio entre ambos.

Desde un principio, el niño ha de tener claro el significado de los números y el de las operaciones que realiza con ellos; porteriormente irá adquiriendo destreza en el cálculo operativo mecánico y, por medio de las aplicaciones, refrescará la relación del concepto abstracto con sus imágenes concretas. Si nos saltamos el primer escalón, en que el niño manipula con números concretos (2 lápices + 3 lápices = 5 lápices), que constituye lo que H. FREUDENTHAL (6) llama el "nivel cero" de la Aritmética, difícilmente podrá aplicar sus conocimientos aritméticos a problemas de índole práctica.

Una cosa se maneja tanto mejor y con tanta más soltura (seguridad) cuanto mejor se entiende. El mismo desarrollo de la habilidad para el cálculo aritmético se verá entorpecido o retrasado si, por prisas en el aprendizaje, el alumno no ha comprendido bien el significado de una operación.

Sería muy interesante, especialmente en los primeros cursos de la EGB, que el alumno EXPERIMENTARA: con conjuntos concretos de objetos para introducirse al número natural; con objetos susceptibles de ser subdivididos en porciones, para introducirse a las fracciones; con termómetros, balanzas, etc., para llegar a captar la noción de número negativo. Los experimentos no tienen por qué ser todos físicos, pueden tener otro carácter, por ejemplo, económico. También convendría que el alumno pesase, cronometrase, midiese longitudes, áreas y volúmenes, etc., para acostumbrarse a ver el número en la realidad, para conocer aproximadamente el tamaño de las unidades de medida, ...

Todo centro debería disponer de un laboratorio de matemáticas con instrumentos adecuados, donde no faltasen los de medición, modelos geométricos, juegos aleatorios para el estudio de la probabilidad, instrumentos de cálculo desde el ábaco hasta un micro-ordenador, y cuantos útiles didácticos la imaginación de los profesores de la asignatura y de los alumnos vaya aportando al seminario o al laboratorio del Centro.

La aplicabilidad de las matemáticas juega un papel muy importante, por otra parte, para la motivación del alumno. Una de las preguntas que suelen hacer es "¿para qué sirve todo esto?". La sensación de que están perdiendo el tiempo, de que las Matemáticas, como otras asignaturas (que les son difíciles), sólo sirven para seleccionar a la gente, es compartida por muchos alumnos. Con palabras de J. FRENKEL (6): "... lo que desanima a los no intelectuales son las especulaciones gratuitas".

4. LA IMPORTANCIA DE LA HISTORIA EN LA DIDACTICA DEL CONCEPTO DE NUMERO

No se debe hablar del concepto de número si no es a través de un enfoque histórico, ya que este concepto ha ido evolucionando en el transcurso del tiempo. A medida que evolucionó la vida social y se complejizaron los problemas del hombre, surgieron nuevos conceptos numéricos que necesitaron, muchas veces, de varios siglos para ser aceptados y comprendidos por los matemáticos. Otros conceptos numéricos, como los números complejos, nacieron en el seno mismo de las matemáticas, sin aparente conexión con la realidad e incluso pareciendo contradecirla, y, sin embargo, hoy día tienen numerosas aplicaciones en la Física.

Aunque los números son conocidos y manejados desde hace cuarenta siglos, al menos los racionales positivos, no se tuvo hasta muchos siglos después una verdadera comprensión de ellos. Los números negativos no fueron plenamente admitidos y comprendidos hasta el siglo XVII y ello gracias al soporte intuitivo que les proporcionó la geometría analítica. Este retraso se debió, tal vez, dice RICHARD COURANT (1), a "la natural tendencia humana a apoyarse en lo concreto". Los números complejos tardaron aún un poco más, nada menos que hasta el siglo XIX.

A través de la historia de la génesis de un concepto, el alumno puede apreciar las dificultades que surgieron para su aceptación y comprensión. Al niño se le engaña si se le presenta una matemática formalizada, si no se le hace partícipe de las antedichas dificultades por las que se hubo de pasar para lograr los actuales conocimientos. No pueden ser (en cuanto a estilo) las mismas matemáticas las que usen para intercomunicarse los propios matemáticos (que como decía GAUSS, se deben parecer a un edificio perfectamente terminado, sin rastros de los andamios empleados para edificarlo), que las matemáticas para la formación.

Aunque de todos conocida, conviene refrescar la cita que M. KLINE (2) hace de H. POINCARE:

> Los zoólogos mantienen que el desarrollo del embrión de un animal reproduce en un breve período la historia de sus antepasados a lo largo de las épocas geológicas. Parece que sucede así en el desarrollo de la mente. La tarea del educador es hacer que la mente de un niño pase por las experiencias que han tenido sus padres, pasando rápidamente por ciertas etapas, pero sin omitir ninguna. La historia de la ciencia debe guiar-

nos en este propósito.

La historia es muy importante para que el niño tenga una visión clara de lo que son las matemáticas, pero además es un instrumento pedagógico de gran valor por ese paralelismo entre la historia de la humanidad y la historia del mundo conceptual del individuo.

5. LAS ESTRUCTURAS DE LOS SISTEMAS NUMERICOS

A pesar de los trabajos sobre grupos, anillos Z/nZ, enteros gaussianos, etc., llevados a cabo por GAUSS, LAGRANGE, LEGENDRE, GALOIS y otros, en la primera mitad del siglo XIX, no es hasta el último cuarto de ese siglo cuando se empieza a hablar de una axiomatización del álgebra y se llevan a cabo los primeros intentos en ese sentido. Incluso términos tan usuales hoy día como "conmutatividad, asociatividad, distributividad", surgen por primera vez durante el siglo XIX.

Ahora bien, si los matemáticos necesitaron de casi cuarenta siglos para llegar al estadio actual de una aritmética formalizada (como dice H. WEYL, "cristalina"), no parece oportuno dar a los niños, ni siquiera a escala reducida, una tal aritmética. El propio J. DIEUDONNE (6), uno de los más famosos bourbakistas, llega a afirmar que: "Mi opinión es que no se debe introducir ningún sistema axiomático antes de los 15 años... La enseñanza media no es el lugar adecuado para la teoría abstracta de grupos o anillos".

No cabe duda de que si a un niño se le enseñan unos axiomas y se le dan unas reglas de juego, jugará con mayor o menor habilidad, pero sin comprender lo que hace. Volviendo de nuevo a R. COURANT (1), éste afirma: "Unicamente en etapas avanzadas del desarrollo intelectual llega a percibirse con toda claridad el carácter abstracto de la idea de número. Para los niños, los números están ligados siempre a cosas tangibles".

Aunque las estructuras forman un marco ordenado, muy cómodo para el que enseña, ese orden no es captado por el alumno y no será aprehendido hasta que haya visto muchos ejemplos. Es tal vez COU el único curso de la enseñanza media donde, quizá, se puedan introducir las estructuras de anillo, cuerpo y espacio vectorial como una conclusión de un repaso, a vista de pájaro, de los múltiples casos particulares que de las mismas el alumno se ha tropezado en el bachillerato.

El rigor exigido por los alumnos tampoco justifica el afán de dar una construcción formal de enteros y racionales como clases de equivalencia, como muy bien hace notar B. MALGRANGE (6):

> Creo que saber calcular con las fracciones es una actividad

matemática importante, y que, a ese nivel, cuando se sabe hacer esos cálculos y aplicarlos a problemas concretos, ya se sabe muy bien de que se habla. La exigencia de dar una definición "como es debido", cuyo interés no voy a negar, es posterior.

En la pedagogía no se trata de cuestión de estilos o de gustos; nuestra labor está condicionada imperiosamente por el estado evolutivo de la mente de los niños.

6. LOS NUMEROS NATURALES

En cualquier civilización de la que se tiene noticia aparecen los números naturales 1, 2, 3, ..., si bien con un grado desigual de desarrollo para satisfacer la necesidad de contar. Desde la infancia, el niño se habitúa al uso de tales números y al llegar a los primeros niveles de la educación posee ya una cierta familiaridad con ellos. En los comienzos del aprendizaje la noción de NUMERO está íntimamente asociada a la de "contar": los números sirven para contar.

Las operaciones con los números naturales están asociadas a manipulaciones en colecciones de objetos. Sumar resulta sinónimo de "añadir", restar de "quitar", multiplicar de "suma repetida" y dividir de "repartir".

La utilización constante de los números naturales y de las operaciones con ellos en la vida ordinaria, justifica plenamente la importancia que a su aprendizaje se concede en los programas de estudios de la enseñanza primaria. Hasta hace poco el estudio y la agilidad en el cálculo algorítmico correspondientes a las operaciones era el tema central de la enseñanza, en lo que a las matemáticas se refiere. La situación actual resulta diferente, como se muestra en la encuesta anterior que no viene sino a cuantificar la observación diaria de los profesores. La anterior machaconería en la realización de "cuentas" largas y complicadas ha dado paso a una insuficiente realización de ejercicios de cálculo, que no permite a los alumnos llegar a dominar la práctica de las operaciones. Parece que hemos pasado de la obsesión por el cálculo al desprecio del mismo.

7. LOS NUMEROS RACIONALES POSITIVOS

Los números racionales positivos aparecen para resolver el problema de los "repartos no exactos" y fueron utilizados por los pueblos antiguos egipcio-babilónicos. El número racional, la fracción m/n, aparece como el "cociente exacto" de m por n.

La insuficiencia de los naturales para expresar ciertas medidas hace que aparezcan los racionales, que permiten "medir contando". Hablar de 3/5 de un pan es lo mismo que decir que se ha "contado" 3 veces 1/5 de pan; ha habido un cambio de unidad al sustituir la unidad "pan" por "1/5 de pan".

Las operaciones con los números racionales positivos encuentran ciertamente dificultades de comprensión y cálculo en los alumnos, especialmente cuando se utilizan en forma de fracción. Sin embargo, tales dificultades resultan perfectamente superables con la realización de variados ejercicios y apoyando las explicaciones, especialmente en los primeros niveles, en objetos materiales. Las dos formas de expresar un número racional (fracción o desarrollo decimal) deben ser manejadas ágilmente por los alumnos.

8. LOS NUMEROS NEGATIVOS

Los números negativos presentan grandes dificultades para los alumnos, como ocurrió a su vez con los matemáticos. La mayor dificultad radica en la "regla de los signos" para el producto, como sucedió históricamente. Como se sabe, dicha regla se adopta como una definición, pero ciertamente se hace necesaria una justificación. Puede ser útil la interpretación siguiente dada por M. KLINE (2):

> Aceptamos que en cuestiones de dinero una ganancia se representa mediante un número positivo y una pérdida mediante un número negativo. También representaremos el tiempo futuro con un número positivo y el pasado con uno negativo. Ahora podemos usar los números negativos para calcular el aumento o disminución de la riqueza de un hombre. Así, si gana 5$ al día, tres días después será 15$ más rico; en símbolos: (+5).(+3) = +15. Si pierde 5$ al día, entonces tres días más tarde será 15$ más pobre; en símbolos: (-5).(+3) = -15. Si gana 5$, entonces tres días antes era 15$ más pobre; en símbolos: (+5).(-3) = -15. Si pierde 5$ al día, entonces hace tres días era 15$ más rico; en símbolos: (-5).(-3) = +15.

Otros ejemplos útiles para la comprensión del número negativo que pueden ser manejados por el profesor los da M. GARDNER (4). Por su parte, el llamado GRUP ZERO de Barcelona (5) señala que las dificultades para la comprensión de ambos, los números positivos y los negativos, estriba en que los signos "+" y "-" expresan un estado, una variación de estados y una operación; a lo que hay que añadir que los negativos se ordenan contrariamente a sus valores absolutos.

Es frecuente encontrar en los textos de 7° de EGB la construcción de los enteros a partir de los naturales, definiendo Z como el conjunto cociente NxN/R, siendo R la relación de equivalencia que viene definida por (m,n)R(m´,n´) si y sólo si m+n´ = m´+n. No parece necesario insistir demasiado en que esa definición de número entero es incomprensible para el alumno y carece por completo de fundamento pedagógico. Resultaría más útil y conveniente dedicar los esfuerzos y el escaso tiempo disponible a que los alumnos comprendan el concepto de número entero y sepan utilizarlo correctamente, que no hacer esa construcción formal alejada de la historia y de la comprensión del alumno.

9. LOS NUMEROS RACIONALES

La introducción de los enteros negativos permite, sin dificultades para el alumno, el inicio del estudio de los números racionales, positivos y negativos, ampliándose así el concepto de número.

Las dificultades mayores en el estudio de Q se presentan con el orden, especialmente con la propiedad del orden denso, que asegura que entre dos racionales hay infinitos y del que resulta como corolario que no existe el siguiente (ni el anterior) de un número racional. La escritura decimal ayuda a la comprensión de este hecho.

Ligado con lo anterior está el tema de la representación de los números racionales en una recta, una vez elegido el sistema de referencia. El alumno no encuentra dificultad en la representación de los enteros, pero los racionales, por su orden denso, le causan más problema; ello, en absoluto debe motivar el descuido de su estudio. La representación geométrica de los racionales es la puerta para la introducción de los números reales y a ello es preciso dedicar suficientes esfuerzos.

Respecto a la usual construcción de Q a partir de Z, de los libros de texto de la EGB, valen las mismas consideraciones hechas antes para los enteros. No somos partidarios de tal construcción ni siquiera en BUP.

10. LOS NUMEROS REALES

Los números surgen, como ya hemos indicado, para satisfacer la necesidad de contar y, algo más tarde, la de medir. Los racionales nos permiten "medir contando", pero los griegos descubrieron que no siempre es posible hacerlo así; que, por ejemplo, la diagonal del cuadrado no puede medirse "contando" a partir de una unidad de medida que subdivida el lado (inconmensurabilidad de diagonal y lado).

La introducción a los reales, dada en 1° de BUP, es la más difícil de las ampliaciones del campo de los números. La teoría de las magnitudes de Eudoxio, recogida en <u>Los elementos</u> de EUCLIDES, donde se trabaja con "razones de magnitudes", contiene todas las características básicas de los números reales. Sin embargo, hasta el siglo XIX no se logra una construcción formal de los reales a partir de los racionales. Una vez más observamos cómo las dificultades en el aprendizaje están relacionadas con las que han surgido en la evolución histórica del concepto numérico.

Introducidos los números reales (a través de la medida de segmentos y/o definiendo como irracionales los números con desarrollo decimal infinito no periódico), resulta conveniente poner de manifiesto los siguientes aspectos de los números reales:

a) Igual que en Q, pueden realizarse las "cuatro reglas" (excepto división por 0); pero además existen las raíces de números no negativos.
b) Igual que en Q, el orden es denso; pero ahora es, además, completo (que geométricamente se enuncia diciendo que R sí "llena" la recta).
c) Elegida una unidad de medida, cualquier segmento puede ser medido con los números reales (esto es otra forma de la completitud).
d) Todo número real tiene un desarrollo decimal finito o periódico si es racional e infinito no periódico si es irracional.
e) Las raíces de los enteros positivos que no son cuadrados perfectos son números irracionales.

11. <u>LOS NUMEROS COMPLEJOS</u>

Los números complejos surgieron por primera vez en el mundo matemático en el siglo XVI, durante el Renacimientto, y fueron usados por los algebristas italianos como artificios teóricos mediante los cuales obtenían soluciones reales de ecuaciones, pero sin comprender en absoluto su significado. No obstante, eran artificios que funcionaban a pesar de no tener una imagen física concreta. La representación geométrica de los complejos mediante puntos del plano llegó en el siglo XIX y contribuyó fundamentalmente a su aceptación por parte de todos los matemáticos. Otro motivo para ello fue la belleza del teorema fundamental del álgebra: todo polinomio tiene tantas raíces (contadas según su multiplicidad) como indica su grado y, por tanto, todos sus factores simples son de grado 1.

Los complejos se deben introducir en 1° de BUP, tras el estudio de las ecuaciones algebraicas, contando un poco de su historia, pero sin ningún formalismo innecesario. Las introducciones que suelen aparecer en los textos basadas en la construcción de un supercuerpo de R conteniendo una solución de x^2+1, ya sea a través de clases de polinomios módulo x^2+1 o, a partir de la hipótesis de su existencia, llegar a definir biyectivamente en R^2 las dos operaciones que lo hacen un cuerpo, todas ellas en aras de un pretendido rigor, nos parecen contraproducentes. Tengamos en cuenta las palabras de R. THOM (6) cuando afirma: "El verdadero problema que se plantea en la enseñanza de las Matemáticas, no es el del rigor, sino el de la construcción del SENTIDO, el de la JUSTIFICACION ONTOLOGICA de los objetos matemáticos". No por darle una descripción formal de los complejos le vamos a aclarar a ningún alumno la cuestión metafísica de las raíces de números negativos.

A través de una introducción histórica se introduce i como la raíz de -1, y los números complejos se introducen como las expresiones polinómicas en i: a+bi. Se opera con ellos como con los polinomios usuales, con la única salvedad que $i^2 = -1$. Su interpretación geométrica y el hecho de que permiten eliminar las excepciones en las descomposiciones factoriales de polinomios, pudiéndose descomponer todo polinomio en producto de factores de la forma X-c, harán que sean fácilmente aceptados los complejos por los alumnos, ya que su manejo no parece tener ningún problema especial.

12. CALIGRAFIA Y ORTOGRAFIA NUMERICAS. EJECUCION DE LOS CALCULOS

Una gran parte de los errores que cometen los alumnos en sus cálculos se debe a la falta de cuidado por su natural pereza. Los números y los símbolos operatorios, aun de puntuación, los lanzan contra pizarra o papel como sin importarles lo que pudiese salir de ese gesto. Símbolos confusos que no permiten distinguir si es un 4, un 7, un 9 o una y, lo que han escrito; el signo "=" en un cociente de fracciones puede aparecer a la altura que sea; los paréntesis les son un estorbo ponerlos y cuando lo hacen rara vez aciertan dónde deben ir; entre un "-" y un "." la diferencia no se aprecia sino que hay que intuirla; las potencias se escriben con símbolos de igual tamaño para base que para exponente, y casi a la misma altura, etc.

La tarea de una CORRECTA ESCRITURA de los números y de las expresiones numéricas es algo en lo que se debe ser exigente desde el principio, e insistir bastante en ello. Si no se le presta la atención debida desde un comienzo se crean malos hábitos que llevan al alumno a continuos fracasos y que son luego difíciles de corregir.

Otro punto importante es el relativo a lo que J. KUNTZMANN (3) llama "cuidado y orden en la ejecución de los cálculos". Se deben dar al alumno normas, que ha de memorizar si es preciso, para la ejecución de los cálculos numéricos. Por ejemplo:

a) SIMPLIFICAR antes, durante y al acabar el cálculo;
b) efectuar antes que nada los paréntesis;
c) si no hay paréntesis, efectuar antes las operaciones más "fuertes" (producto y cociente, antes que suma y resta);
d) usar la propiedad distributiva para sacar factores comunes, siempre que convenga;
e) tener en cuenta que una igualdad deja de serlo si se altera uno de los miembros manteniendo fijo el otro;
f) los cálculos largos se pueden efectuar por etapas, ejecutando aparte cálculos parciales;
g) no olvidarse de los signos;
h) cuidar la presentación; enmarcar los resultados parciales y el final; e indicar los pasos esenciales de la estrategia resolutiva.

Una lista de estos y otros consejos útiles podría tenerla el alumno a su lado y confrontar, punto por punto, si va cumpliendo las normas mencionadas. Por último, siempre que sea posible, se ha de comprobar el resultado del problema. Si se trata de un problema de aplicaciones, se ha de comprobar la verosimilitud del resultado en el doble aspecto de que:

i) el resultado tenga un valor numérico cuyo orden de magnitud sea el estimado inicialmente antes de ejecutar los cálculos;
ii) el resultado se ajuste a la significación real de las soluciones: no se pueden dar soluciones como 2´5 personas, -4 objetos, etc.

13. EL CALCULO LITERAL

Es frecuente, casi diríamos que lo contrario es excepcional, que las primeras demostraciones que se dan en 1° de BUP, se vean interrumpidas, a pesar de su sencillez, por un coro casi unánime de los alumnos: "¡Profesor, no! ¡Hágalo con números!". Esto no es de extrañar, ya que los mismos matemáticos tardaron muchos siglos en usar habitualmente letras en sus cálculos; es a VIETE (s. XVI) a quien se atribuye ser el precursor en el uso de las letras, usándolas tanto para representar una incógnita como para representar números genéricos. M. KLINE (2) se pregunta el porqué de este retraso, aparentemente incomprensible, por lo simple que nos parece su uso actualmente, y escribe:

> ¿Por qué se retrasó el uso de las letras, como coeficientes en general, durante tanto tiempo? La respuesta podría ser que este recurso es parte de un nivel más alto de abstracción en

Matemáticas, un nivel mayor que suprime la intuición. Es más difícil pensar acerca de $ax^2+bx+c = 0$ que acerca de $3x^2+5x+6= = 0$.

Una ley general, por ejemplo, referente a los enteros, hay que representarla mediante símbolos que representen dos enteros cualesquiera; como tales símbolos, se conviene en usar letras. Si queremos enunciar la ley conmutativa para el producto, no se dice $2x3 = 3x2$, $(-15)x7 = = 7x(-15)$, $(-4)x(-5) = (-5)x(-4)$, y análogamente en los demás casos; sino que se debe formular como: $m.n = n.m$, para cualesquiera enteros m y n.

Una cosa que cuesta mucho trabajo a los alumnos es el de que una letra puede representar un número negativo y que una expresión como -a puede ser en cambio positiva. El origen de esto se deba tal vez a que al pasar a los enteros negativos, y formular la regla de los signos, se acostumbra a usar la letra para representar sólo las unidades del número y no su signo, para así poder explicitarlo. Esta práctica se suele conservar en lo sucesivo, incluso cuando ya no es necesaria, creando una imagen en el alumno que luego es difícil desterrar. A veces cuesta todo un bachillerato borrar ese hábito mental y hasta en COU, cada vez que escribimos cosas como: $|x| = -x$ si x es negativo, hemos de interrumpir la demostración para aclarar el asunto.

Otra cosa que conviene inculcar en el alumno es la diferente notación para las operaciones, según se escriban en forma numérica o literal las expresiones. Así, la multiplicación escrita como un "aspa" entre los números, se ha de escribir como "." entre símbolos literales, o incluso sin ningún símbolo: $2x7$, $(-3/4)x(3/5)$, $a.b$, ab. Las expresiones mixtas se escriben con "." o sin nada: $0'8.x$, $0'8x$. Estas aparentes nimiedades no lo son tanto y en una correcta escritura está gran parte del éxito en la ejecución de un cálculo.

El alumno ha de ver claro la diferencia entre una ILUSTRACION ejemplificadora y una DEMOSTRACION. Si a partir de ejemplos tales como $8! = = 8x7x6! = 8x7! = \ldots$ concluimos que $n! = V_{n,k}.(n-k)!$, estamos conjeturando una propiedad, pero en modo alguno hemos dado una demostración. La única forma en que el análisis de casos particulares se convirtiese en una demostración es que fuese exhaustivo y eso, en general, es impracticable o imposible.

El empleo de las letras como símbolos para números genéricos, ha de ser gradual; no debemos abusar al principio de ellas, pero tampoco podemos pasarnos al extremo de no usarlas. Los cálculos literales, por otra parte, obligan al alumno a tener un poco más de conciencia de las en un máximo de tres regiones, de las cuales se sombrean una o dos. Estos hexagramas sombreados dan lugar a piezas positivas y piezas negativas (antihexagramas), según el orden en que se sombrean (fig. 1).

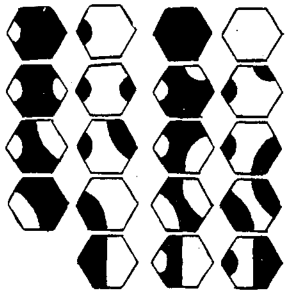


FIG. 1

Con estos diecinueve hexagramas se componen figuras sobre un tablero "hexagonal" tal como el que se muestra en la figura 2.

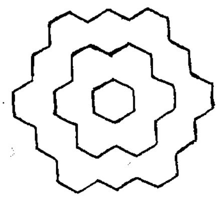


FIG. 2

Componiendo los hexagramas de tal manera que se unan lados congruentes, se logran conjuntos de tipo abstracto, o de tipo figurativo, como el titulado "Bambi" de la figura 3.

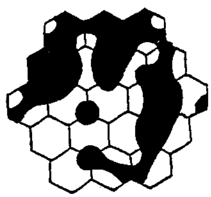


FIG. 3

Para interpretar algunas de las figuras que se logran es necesario un poco de imaginación, aunque coloreando las piezas se obtienen diseños más fácilmente visibles.

En la figura 4 vemos el titulado "Napoleón en Waterloo". En la figura 5 el que, según citaban CAPS I MANS, ganó el primer premio de un concurso de diseños celebrado en Londres el pasado año; se titula "Noche Arábiga".

FIG. 4

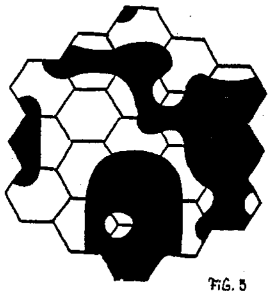


FIG. 5

Entre los diseños no figurativos hay una clase particularmenete interesante que presenta simetría central; la simétrica de cada pieza positiva es su antihexagrama o negativo (fig. 6).

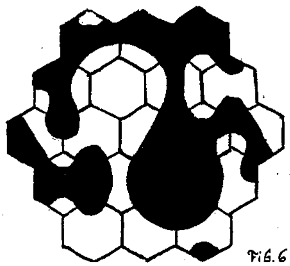


FIG. 6

Me fabriqué las piezas en cartón para jugar con ellas. Evidentemente no están en esas diecinueve piezas representadas todas las maneras de unir los puntos medios de los lados de un hexágono, para sombrear luego dos o una, de las tres o menos regiones que se forman. Ni siquiera usando solamente los arcos ya vistos (siempre que consideremos que un punto no es frontera, y se pueda, por tanto, sombrear dos regiones con un punto común en el punto medio de un lado). Surgieron entonces dos preguntas: ¿Cuántas formas hay de unir los puntos medios de los lados de un hexágono? ¿Por qué fueron escogidas estas diecinueve piezas?

Empezaré por dar una denominación a las piezas que voy a desarrollar a partir de estos hexagramas: las llamaré SESANGULOS.

CONJUNTO COMPLETO DE SESANGULOS. NOMENCLATURA

Empecé por estudiar cuáles podrían ser los tipos de uniones posibles. Para lados contiguos o alternos es posible la unión mediante segmentos o mediante arcos. Para lados opuestos considero que el arco es de una circunferencia de radio infinito que ha degenerado en una recta, por lo que sólo habrá un tipo de unión: mediante un segmento. Los tipos de unión pueden verse en la siguiente figura que les mostramos.

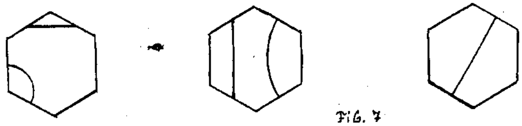


Fig. 7

Aparecen entonces seis sesángulos elementales, contando el sesángulo totalmente en blanco, sin ningún tipo de unión. Estos sesángulos elementales en los que sombreo la menor de las dos superficies logradas en la división del hexágono, los considero positivos. También considero positivo el sesángulo totalmente en blanco. Para simplificar mi exposición me referiré, salvo mención expresa, a piezas positivas.

A las superficies sombreadas en estos sesángulos elementales las bautizo con las consonantes p, k, s, t y r; y establezco un orden en ellos, de menor a mayor superficie sombreada: p < k < s < t < r.

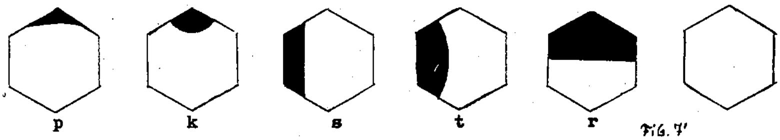


Fig. 7'

Dibujando dos de ellas en un solo hexágono obtengo sesángulos compuestos. Tienen tres regiones, y diferirán entre sí por los elementales usados y por las posiciones relativas que ocupen esos elementales. Al estar permitido sombrear sólo una o dos de las regiones que se logran, el máximo de elementales a usar es dos. Así pues, sólo pueden intervenir en un sesángulo una o dos consonantes. El sesángulo en blanco es el único que no llevará en su nombre consonantes, como veremos enseguida.

Quedan entonces "picos" sin sombrear a los que llamo "huecos"; es posible que existan 1, 2, 3, 4 ó 5 "picos" contiguos sin sombrear después de haber dibujado los elementales consonantes. A estos huecos los nombro mediante vocales: "e" si es un hueco de un vértice; "i" si es de dos vértices; "o" si es de tres picos; "u" si lo es de cuatro; y "a" para cinco (fig. 8).

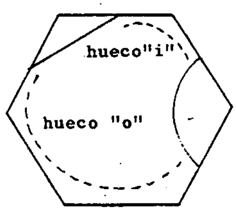


Fig. 8

Se hace necesario establecer un sistema referencial, un origen a partir del cual se puedan enumerar las consonantes y vocales que intervienen en la formación de cada sesángulo, y también un orden en cuanto al sentido a seguir; de esta manera cada pieza va a tener un nombre propio.

Colocando el hexágono con un lado como base, numero las caras, empezando por la superior, desde 1 hasta 6. Y lo hago en sentido horario (fig. 9).

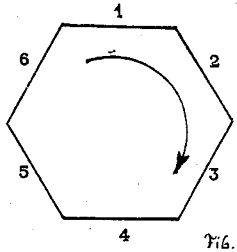


Fig. 9

Para dar nombre -bautizar- cada sesángulo, se gira éste hasta que el borde izquierdo del consonante de menor orden que los forme, quede en el centro de la cara 1; y a partir de este elemental, en sentido horario, se van identificando los otros consonantes y vocales que lo forman. En caso de tener dos consonantes del mismo orden, se coloca en la cara 1 aquél de los elementales que dé lugar a que la primera vocal en sentido horario, corresponda al hueco de menor número de picos. Veámoslo con dos ejemplos concretos (fig. 10):

A) 

Sesángulo a bautizar.

Lo giramos para que el elemental consonante de primer orden quede con su borde izquierdo en la cara 1 del sistema de referencia: 

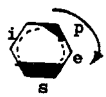
A partir de la cara 1 voy identificando consonantes y vocales en sentido horario: 

Fig. 10

Su nombre es "pesi".

B) 

Cuando consta de dos elementales del mismo nivel, se gira de tal manera que el hueco con menos vértices se nombre en primer lugar. Se colocaría así  y no así 

con lo que se bautizaría como "keko".

Cada sesángulo va a tener de esta manera su nombre propio. En la figura 11 se muestran algunas de las combinaciones posibles acompañadas de sus respectivos nombres.

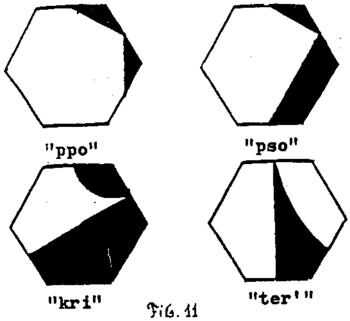


Fig. 11

Los negativos, antisesángulos, los indico con el nombre de su correspondiente positivo y una ' al final. Considerado el sesángulo en blanco como compuesto de los huecos elementales "e" y "a", su nombre será "ea".

Para construir exhaustivamente el conjunto de todos los sesángulos posibles hay que tener en cuenta que se van a combinar, a lo más, cuatro elementales a los que voy a considerar en los siguientes niveles:

Nivel 1: p; k; e.

Nivel 2: s; t; i.

Nivel 3: r; o.

Nivel 4: u.

Nivel 5: a.

donde el número de cada nivel representa la cantidad de vértices implicados. La suma de los niveles de las letras que representan los elementales que forman cada uno de los sesángulos compuestos debe ser siempre seis. Esta condición hace que sean posibles las siguientes variaciones:

Binarias: ③③   ⓝ : **elemento de nivel "n"**

②④ ④②

①⑤ ⑤①

Terciarias:

①①④ ①④① ④①①

①②③ ①③② ②①③ . . .

. . . . **etc.**

Cuaternarias:

①①①③ ①①③① ①③①① ③①①①

①①②② . . . .

. . . . **etc.**

Y considerando que dos regiones con frontera común (un punto no se considera como frontera común, recuérdese) no deben sombrearse al mismo tiempo, son posibles los 50 sesángulos que, junto con sus correspondientes antisesángulos o negativos, aparecen a continuación (fig. 12).

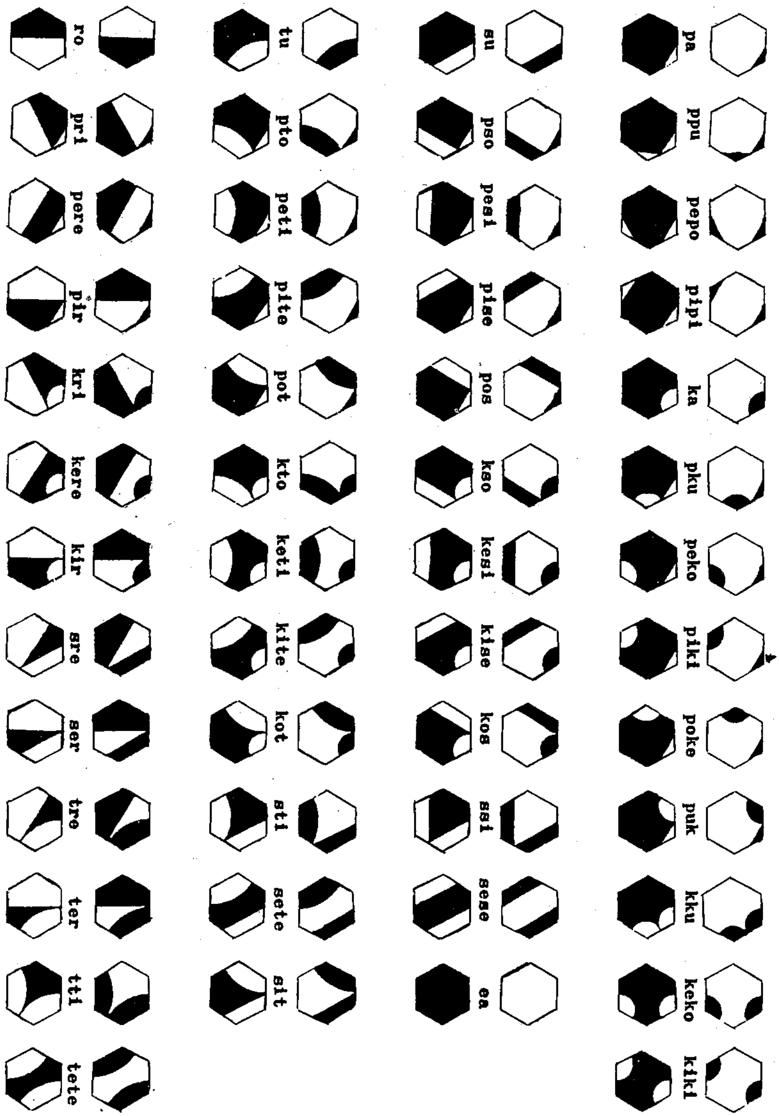


Fig. 12

Hay, por tanto, 100 seséngulos, o 99 si consideramos no diferenciables los ro y ro'.

¿Por qué escogió Salomon los 19 seséngulos mostrados al principio para sus hexagramas? Básicamente porque cumplían las restricciones que se había impuesto: unir mediante arcos; no más de tres regiones; no considerar aquellas figuras cuyas regiones tienen un punto común en un mismo lado; no considerar ro y ro' como diferentes. Pero además porque la superficie negra es igual a la blanca. También con el tipo de regiones que se sombrea se logra una mejor estética que con otros grupos de 19 piezas.

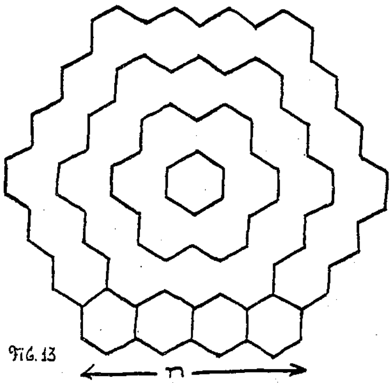


Fig. 13

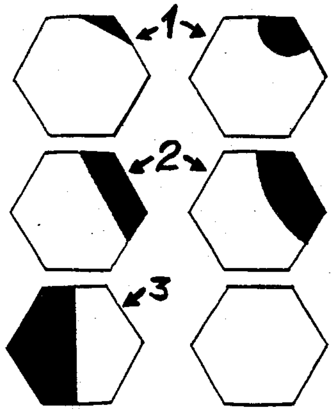


Fig. 13'

¿Cuántos seséngulos se necesitan para llenar un tablero? Salomon escogió diecinueve piezas para sus hexagramas; podían haber sido 15 ó 23. Pero es que con 15 ó 23 seséngulos no es posible recubrir completamente un tablero "hexagonal" del tipo que se mostraba en la figura 2. Para un tablero de un solo seséngulo de base es evidente que se necesita una sola pieza. Para dos seséngulos de base es necesario usar 7 elementos; para el tablero usado en el juego del Doctor Salomon, con tres seséngulos de base, son necesarios 19.

La función en N(x) que nos proporciona el número de seséngulos necesarios para llenar un tablero que tenga n piezas de lado, viene expresada por: $N = 3n^2 - 3n + 1$ (fig. 13).

Otros valores de N en función de n son:

$n = 4$	$N = 37$
$n = 5$	$N = 61$
$n = 6$	$N = 91$

con lo cual se ve que con $N = 19$ se obtiene un número de piezas adecuado, ni muy amplio ni muy reducido, y que contiene las piezas con las características anteriormente expuestas.

Es interesante, también, el estudio de las áreas sombreadas en cada uno de los elementales, tomando como unidad el lado del hexágono, y las razones entre ellas.

Ambas cuestiones quedan como posibles ejercicios a realizar por los alumnos.

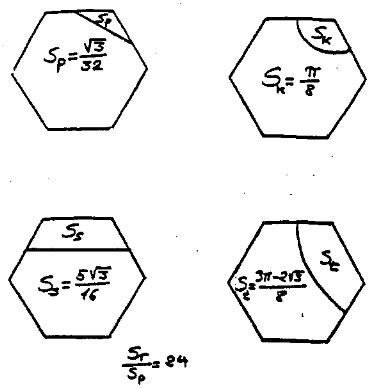


Fig. 14

ESTRUCTURACION

Durante el desarrollo de lo expuesto anteriormente surgieron algunas ideas y nuevas preguntas. Algunas de estas últimas con respuesta y otras abiertas. Bibliografía sobre los hexagramas del Dr. Salomon no me ha sido posible encontrar a pesar de algunas consultas realizadas a colegas de otros países, sobre todo pensando en una posible aplicación didáctica, y con los cuales la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas mantiene contactos periódicos. Porque ¿es posible utilizar los sesángulos, con su estética geométrica, para practicar e introducir conceptos matemáticos?; ¿cuáles?; ¿cómo?; ¿a qué niveles?; ¿existen otros materiales semejantes?

La consulta realizada a CAPS I MANS sobre bibliografía al respecto no ha obtenido respuesta hasta el presente. ¿Existen otros materiales semejantes? Lo más cercano pienso que pueden ser el Trimat, el Cuadrimat o el Trioker, existentes los tres en el mercado español.

Estamos entonces ante el inmenso campo abierto de qué actividades, juegos o ejercicios se pueden hacer, y qué objetivos se lograrían con ellos. Pero antes voy a exponer cómo están estructurados los 99 ó 100 sesángulos; en forma esquemática y sin pretender en absoluto ser exhaustivo, resulta el cuadro que pueden ver en la página siguiente:

Por contener los elementales consonantes
- p
- k
- s
- t
- r

Por contener los huecos elementales
- e
- i
- o
- u
- a

Porque las líneas que forman las regiones sean
- arcos
- segmentos

Por el sombreado
- positivos
- negativos

Por el número de ejes de simetría
- no tiene
- tiene uno
- tiene dos
- tiene seis

Por giro en el espacio alrededor de un diámetro
- se transforma en sí mismo,
- se transforma en otro sesángulo.

Los sesángulos admiten, por supuesto, toda otra estructuración realizable con hexágonos. Y otras manipulaciones un tanto marginales, porque ¿qué aspecto tendría esta frase si pi tuviera el valor 3? Pues si pi fuese igual a 3, ESTA ORACIÓN TENDRIA ESTE ASPECTO (Douglas R Hofstadter, "Investigación y Ciencia", 82, 112), recordatorio de que la razón entre el perímetro del hexágono y su radio es 3. Admiten descomposición en triángulos o cometas, encaje en círculos, etc.

El total de los sesángulos no parece aconsejable para alumnos de los primeros niveles, por ser demasiadas piezas y por tener algunas de ellas características muy parecidas. Es mejor escoger subconjuntos del total de sesángulos donde estén las características que se quieran manejar e, incluso, para preescolar y primero se facilita su manipulación si hay piezas repetidas. Es posible escoger, por ejemplo, el conjunto de piezas positivas y negativas que no presentan regiones con un punto común sobre un lado (52 en total), o bien las piezas que constituían los 19 hexagramas del Dr. Salomon y sus equivalentes al sustituir p por k, y s por t (37 piezas). También, para simplificar el número de características que intervienen, podemos escoger únicamente piezas con dos de los elementales consonantes, como p y k. Teniendo en cuenta sus características geométricas, se pueden eliminar las piezas con ejes de simetría y quedarnos con las quince parejas de positivos que se muestran a continuación (fig. 15), ordenados en una matriz cuya diagonal principal la ocupan los seis sesángulos elementales. (Ver figura 15 en la página siguiente).

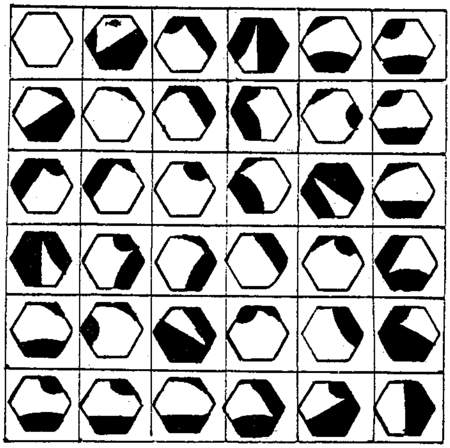


Fig. 15

JUEGOS

Paso ahora a relatar de una forma breve y esquemática, algunos juegos realizables con los sesángulos.

Puzzles

Al entregar a los chicos los sesángulos y un tablero (como el mostrado en la fig. 2), sin ninguna otra indicación, como para un juego libre, su reacción inmediata es la de ir uniendo piezas, unas con otras, alicatando la superficie de la mesa; a nivel de 6º de EGB unen las piezas teniendo en cuenta que los lados sean congruentes, en los primeros cursos simplemente adosan los sesángulos. Luego, se dan cuenta de que el centro del tablero es un hexágono donde cabe justamente una de las piezas, y tratan, entonces, de formar "la figura". Para ellos los sesángulos son piezas de un puzzle, y sólo en los cursos últimos, 8º de EGB y 1º de BUP, se percatan de que no existe una forma única de adosarlos desde un primer momento. Algunos que han pasado la experiencia, se les parecen a piezas de tests que les han puesto los psicólogos.

Con los subconjuntos de sesángulos adecuadamente escogidos para cada edad, se les puede pedir que formen determinadas figuras sobre el tablero, dándoles los modelos adecuados, o dejando que los unan libremente y luego interpreten las figuras obtenidas. Se dan cuenta de que no es posible encajarlos siempre.

Es posible realizar el puzzle, en forma competitiva, repartiendo un número fijado de antemano, de sesángulos, a cada uno de los alumnos de un grupo de cuatro o cinco; luego los colocarán por turno en el tablero, partiendo de la posición central. Rodeando este primer sesángulo se deben colocar ahora por turno las demás piezas; y a partir de la segunda, haciendo que coincidan dos lados en cada nueva colocación. Con estas u otras reglas iguales de simples, se puede realizar el juego. Con un número mayor de piezas y un tablero apropiado, el juego tiene un nivel adecuado para adultos.

Dominós

Juegos semejantes a los anteriores, pero con un adosamiento lineal, resultan más apropiados para los alumnos de menor edad. Como variante, es posible realizar una complicación reglamentando que se pueden colocar ramificaciones al colocar ciertas piezas en la cadena principal.

Para el nivel preescolar se pueden agrupar sesángulos de dos en dos en rectángulos, de tal forma que en cada una de sus mitades esté dibujada una pieza, y que éstas se encuentren repetidas en otros rectángulos, permitiendo así jugar al dominó con las reglas habituales. Planteado de esta última manera, su aspecto e intenciones se parecen al juego Stop (Interduc), pero más realizable y gratificante para los pequeños.

Con estos juegos se consigue un reconocimiento de formas y estructuras en un ejercicio de identificación, pues muchos sesángulos se parecen, pero sólo algunos estarían repetidos. La similitud se complica por los sesángulos simétricos mediante giro, y por el parecido entre los elementales p y k, y entre s y t. Se logra un fortalecimiento de la capacidad visual de diferenciación, de la orientación espacial; la creación de criterios de comparación. En los puzzles con láminas se estimula el desarrollo de la visión lógica del plano, el paso del análisis a la síntesis; y en todos, la capacidad de concentración.

Juegos de conceptos

Clasificar mediante una sola característica, por dos características, o por negación de alguna, puede ser una de las orientaciones para estos juegos. Un ejemplo de estas actividades lúdicas, donde se manejen criterios de clasificación, pero con un sentido inductivo y competitivo, es el siguiente. Lo llamamos "del mensaje secreto". En el grupo de juego (cuatro o cinco alumnos), uno de ellos escribe en un papel la característica secreta -por ejemplo, que contenga p- y los otros alumnos van mostrando sesángulos; el "mensajero" dice sí o no según tengan o no la característica que él apuntó. El primero del grupo que descubra "el secreto" pasa a ser el nuevo mensajero. Es uno de los juegos con mayor aceptación a todos los niveles.

Además se pueden realizar todos los juegos que con conectores lógicos, o mediante la unión, intersección y complementariedad, se hacen con otros materiales. Y por ellos llegar a la estructura de grupo, como muestra Dienes y Golding en "La Geometría a través de las transformaciones, 3. Grupos y Coordenadas", de editorial Teide.

Otros juegos esbozados en forma esquemática, son:

Juego libre: Se les entregan los sesángulos a los alumnos, y se les pide que los clasifiquen, con sus propios criterios que han de descubrir.

Utilización de los Diagramas de Venn y de Carroll.

Clasificación múltiple en matrices: como la mostrada en la figura 15.

Clasificación por el número de ejes de simetría.

Entre los juegos de correspondencias podemos citar los siguientes:

Hacer corresponder a cada sesángulo positivo su antisesángulo. Cuando intervienen piezas carentes de ejes de simetría, el juego tiene la suficiente complejidad como para ser realizado por alumnos de los cursos superiores.

A cada pieza sin ejes de simetría hacerle corresponder la que se obtiene mediante un giro espacial de la misma. Es posible introducir aquí un objeto motivante: un espejo.

A sesángulos elementales asociar sus composiciones, o según las posiciones relativas que ocupen.

Sesángulos elementales y ejes de simetría.

Entre los juegos de identificación, y antes de haberles enseñado a los alumnos la nomenclatura, se puede practicar el siguiente juego: intervienen dos alumnos (o grupos de alumnos); uno de los alumnos (A) examina un grupo de sesángulos y los pasa luego al otro jugador (B). Entonces, el director del juego -el maestro u otro alumno- elige una de las piezas y le dice al jugador A que le explique al B de cuál se trata. Una vez comprobada la dificultad en explicar de forma clara la pieza, de haber experimentado que la eficacia del mensaje que han de transmitir, sobre todo si se limita el número de palabras que pueden emplear, se pierde al utilizar información redundante, se les enseña la nomenclatura y se prosigue el juego. Comprueban así la importancia de un sistema de comunicación, un lenguaje, exacto y común.

Los objetivos a lograr con estos juegos se encuentran suficientemente estudiados en la abundante bibliografía que sobre ellos existe, por lo que renunciamos a relacionarlos aquí.

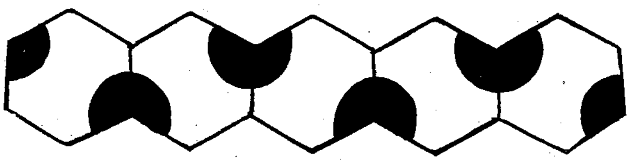


Fig. 16 **Ejemplo de greca con piezas repetidas**

A MODO DE CONCLUSION

Extenderme más en la explicación de juegos y actividades, cuando éstas están en un período de trabajo, recopilación de datos e investigación, es contar demasiado con la paciencia de Vds. Pensamos que casi todos los juegos realizables con otros materiales (no numéricos) son posibles con los sesángulos. Está también la realización material de las piezas en un material adecuado, como plástico, cartón grueso plastificado o madera, y su industrialización.

Claro está que ésta es una exposición llevada por el entusiasmo de la propia obra. En exceso optimista y con opiniones subjetivas contrastables ahora, a partir de esta y sucesivas exposiciones, pero espero que sepan disculpar y comprender tal optimismo. La posibilidad de practicar otros múltiples juegos con este material está por ahora en el campo de lo posible; el interés demostrado por Vds. al tolerar esta comunicación nos anima a seguir trabajando sobre el tema. Al mismo tiempo, quienes se muestren interesados por lo dicho, por este material y sus aplicaciones, si desean llevar a cabo algunas de las experiencias relatadas u otras, pueden ponerse en contacto con la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, desde la que atenderemos, gustosamente, tales solicitudes.

Con el agradecimiento a los compañeros de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas y, en especial, a aquéllos que, como Mercedes Palarea, apoyaron y colaboraron en la realización de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

Dienes, Z.P.: Las seis etapas del aprendizaje en Matemáticas. 3ª ed., ed. Teide, Barcelona, 1977.

Dienes, Z.P.; Golding, E.W.: La Geometría a través de las transformaciones. 1. Lógica y juegos lógicos. 8ª ed., ed. Teide, Barcelona, 1976.

Dienes, Z.P.; Golding, E.W.: La Geometría a través de las transformaciones. 2. Geometría euclidiana. 3ª ed., ed. Teide, Barcelona, 1976.

Dienes, Z.P.; Golding, E.W.: La Geometría a través de las transformaciones. 3. Grupos y transformaciones. 3ª ed., ed. Teide, Barcelona, 1978.

Furth, H.G.: Las ideas de Piaget. Su aplicación en el aula. Ed. Kapelusz, Buenos Aires, 1974.

Marastoni, G.: Hagamos geometría. Ed. Fontanella, Barcelona, 1980.

Parot, J.J.: Actualización matemática. I. Didáctica de la matemática en los primeros niveles. Ed. Teide, Barcelona, 1974.

Ziegles, Th.; Schumacher, B.; Zerolo, T.: Juegos de discurrir. Interduc/ Schroeder, Madrid, 1977.