Rev.Acad.Canar.Cienc., IV (núms. 1 y 2),31-43 (1992)

DETERMINACION DE SOLUCIONES EFICIENTES DE EQUILIBRIO. METODOS INTERACTIVOS.

C. González Martín (#), M. Sánchez García(@) y A. Pérez Prados(&).
(#) Universidad de La Laguna
(@) Universidad Complutense de Madrid
(&) Universidad Pública de Navarra

Abstract

In this paper, we introduce a procedure to determine equilibrium efficient solutions in Multiobjective Optimization. For that, we use lines which passes through the ideal point. Also, we obtain some results and use its to propose interactive algorithms.
Keywords: Multiobjective Optimization, equilibrium efficient solutions, interactive methods.

Resumen

Se propone en este trabajo la determinación de soluciones eficientes de equilibrio para problemas de Optimización Multiobjetivo usando haces de rectas que pasan por el punto ideal. Se obtienen resultados de interés que sirven como base a la propuesta de varios métodos interactivos.

Palabras Clave: Programación Multiobjetivo, soluciones eficientes de equilibrio, métodos interactivos.

1.- INTRODUCCION

Es frecuente que la toma de decisiones, asociada a la resolución de multitud de problemas del mundo real, precise de la consideración simultanea de más de un criterio. Estas situaciones, cuando se pueden modelizar como problemas de optimización matemática, se estudian en lo que se conoce como **Optimización Multicriterio**, correspondiendo a la **Programación Multiobjetivo** los casos en los que los criterios se identifican con funciones objetivo.

Se sabe que la no factibilidad del **punto ideal**, que se da con carácter general en estos problemas, impone la selección de la **solución preferida** del decisor entre los **puntos eficientes**. Sin embargo, la elección de uno de estos puntos se enfrenta con una serie de dificultades entre las que podríamos destacar la gran cantidad de soluciones de este tipo que se pueden presentar y, sobre todo, la dificultad que se origina al no poderse articular convenientemente la estructura de preferencias globales del decisor.

Estas dificultades tratan de ser soslayadas a través de procedimientos de resolución englobados en lo que se conoce como **Métodos Interactivos**. En estos métodos se alternan etapas de cálculo de soluciones eficientes con etapas de diálogo en las que el decisor emite sus preferencias en relación con las soluciones previamente calculadas, con el fin de que puedan ser incorporadas en la siguiente etapa de cálculo. El proceso concluye cuando el decisor se muestra satisfecho con una solución de las que le presenta el analista.

La generación de puntos eficientes en los procesos interactivos se puede realizar de diversas formas alternativas (ver Hwang et al.(1979), Yu(1985), González Martín (1986)...). Nuestra propuesta es que los cálculos que se realicen sean los apropiados para obtener **soluciones eficientes de equilibrio**, puesto que nos parece que es apetecible que las soluciones al problema planteado equilibren las desviaciones, convenientemente pesadas, entre sus componentes y las del punto ideal. Obsérvese que la idea de equilibrio expresa, al mismo tiempo, la idea, valiosa en un contexto multicriterio, de **solución de compromiso**.

La pretensión última de este trabajo es la generación de soluciones eficientes de equilibrio utilizando, adecuadamente, haces de rectas que pasan por el punto ideal. Realizaremos este estudio obteniendo resultados y desarrollando algoritmos para casos particulares, con la intención de usarlos posteriormente en casos más generales.

2.- PLANTEAMIENTO Y CONCEPTOS BASICOS

Dados $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i=1,...,q$, $q \geq 2$, el problema general de Programación Multiobjetivo se plantea de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\text{s. a: } x \in X \end{aligned} \qquad (1)$$

siendo $f=(f_1,..., f_q)^t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$. Supondremos que f es continua.

De manera equivalente, el problema (1) se puede plantear como:

$$\begin{aligned} &\max y \\ &\text{s. a: } y \in Y \end{aligned} \qquad (2)$$

siendo $Y=f(X)=\{(f_1(x),...,f_q(x))/x \in X\}$. Supondremos que Y es compacto.

Si para $i=1,...,q$, x_i^* es solución óptima del problema:

$$\begin{aligned} &\max f_i(x) \\ &\text{s. a: } x \in X \end{aligned} \qquad (3)$$

tenemos que, en general, el punto $f^{*}=(f_1(x_1^{*}),...,f_q(x_q^{*}))\notin Y$, es decir, es no factible. Si este punto, denominado **utopía** o **punto ideal** fuera factible, entonces, de forma obvia, sería la solución óptima de (2).

Esta particularidad impone una modificación de la idea tradicional de optimalidad. Dicha modificación contempla la consideración de puntos factibles de (2) que mantengan, en algún sentido, la tendencia impuesta por las componentes de f^{*}.

Diremos entonces que un punto $\bar{y}\in Y$ es **eficiente** sí, y sólo si, no existe $y\in Y$ tal que $y\neq\bar{y}$ e $y\geq\bar{y}$. Conteniendo al conjunto de puntos eficientes está el conjunto de los denominados **puntos débilmente eficientes**, los cuáles son soluciones factibles de (2) que no son superadas estrictamente por ninguna otra solución factible. Denotaremos por S al conjunto de puntos eficientes.

La anteriormente aludida nueva concepción de la optimalidad nos permite hablar de **solución preferida**, considerada ésta como una solución eficiente que satisfaga al decisor. Los puntos eficientes son, por tanto, **soluciones analíticas** (calculadas por el analista) entre las cuales el decisor podrá elegir su solución preferida.

Existen formas diversas de aproximarse al cálculo de la solución eficiente que se convierta en preferida para el decisor, dependiendo de la forma en que se pueda plasmar la estructura de preferencia de este. Cuando la información sobre dichas preferencias sea sólo local, lo común es utilizar un esquema de resolución interactivo.

Los Métodos Interactivos sintonizan, en mayor medida, con las formas habituales de toma de decisiones. La estructura en que se basan permite una gran diversificación que mantiene abierto un atractivo campo de investigación.

Existen en la bibliografía (ver, por ejemplo, Hwang et al. (1979), Zeleny (1982), Chankong et al. (1983), Steuer (1985), Yu (1985), González Martín (1986), Shin et al. (1991)), métodos interactivos en los que se introducen formas alternativas de emisión de la información del decisor y de plasmar ésta en el modelo. Nosotros nos detendremos en la consideración de esquemas interactivos en los que las soluciones eficientes que se vayan generando mantengan una condición de equilibrio entre los diferentes objetivos. Esta última característica aparece de forma patente sobre una recta.

3.- HACES DE RECTAS Y REGION EFICIENTE

Sea la recta:

$$\frac{f_1^*-y_1}{a_1}=\frac{f_2^*-y_2}{a_2}=........=\frac{f_q^*-y_q}{a_q} \qquad (4)$$

con $a_i\geq 0$, $i=1,...,q$.

Sabemos (González Martín, 1986) que cualquier recta corta a S a lo sumo en un punto. Por tanto, un primer problema que se nos plantea es el de determinar el subconjunto $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}^q$ que contenga los vectores $a^t=(a_1,...,a_q)$ para los cuales la recta anterior corta a la región eficiente S.

La solución a este problema la daremos, en principio, para casos particulares. Analicemos algunos de ellos.

Casos en que q=2.

La hipótesis que manejaremos en estos casos es la siguiente:

La región eficiente se encuentra en una curva continua que une los puntos $f(x_1^*)$ *y* $f(x_2^*)$.

Obviamente, en este caso el conjunto $\mathbb{A}$ viene dado por:

$$\{(a_1,a_2)/a_1,a_2\geq 0\}$$

Los casos en que la hipótesis anterior no sea cierta, $\mathbb{A}$ vendrá determinado por subconjuntos adecuados del anterior.

Casos en que q≥3.

Impondremos inicialmente la siguiente hipótesis:

La región eficiente viene dada por:

$$S_0=\{(\sum_{i=1}^{q}\lambda_i f_{1i},\ \sum_{i=1}^{q}\lambda_i f_{2i},......,\ \sum_{i=1}^{q}\lambda_i f_{qi})/\ \lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{q}\lambda_i=1\}$$

donde $f_{ji}=f_j(x_i^*)$, i, j=1,...,q. Evidentemente, $f_{ii}=f_i^*$.

Sean $\Lambda=\{\lambda^t=(\lambda_1,...,\lambda_q)/ \sum_{i=1}^{q}\lambda_i=1,\ \lambda_i\geq 0,\ i=1,...,q\}$ y F la matriz dada por:

$$F=(F_{ij}),\ F_{ij}=f_j^*-f_{ji},\forall\ i,\ j\in\{1,..q\}$$

Supondremos que la matriz F es no singular. Esta hipótesis no impone pérdida de generalidad, puesto que, en otro caso, el problema se podría restringir en una dimensión como mínimo.

Teorema 1

$\forall\lambda\in\Lambda$, $\exists a\in\mathbb{R}^q$, $a\geq 0$, tal que la semirrecta:

$$f^*-y=at,\ t\geq 0$$

pasa por el punto $\bar{y}=(\sum_{i=1}^{q}\lambda_i f_{1i},...,\sum_{i=1}^{q}\lambda_i f_{qi})$

Por las hipótesis anteriores, existe una correspondencia biunívoca entre $\lambda\in\Lambda$ y puntos de S_0. Por otro lado, el resultado anterior relaciona los elementos de Λ con ciertas rectas que pasan por el punto ideal. Por consiguiente, se establece una correspondencia biunívoca entre tales haces de rectas y los puntos eficientes.

Observamos que la determinación de los referidos haces de rectas se puede realizar a través del siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^q$:

$$\mathbb{A}=\{a\in\mathbb{R}^q/F^{-1}a\geq 0, F^{-1}a\neq 0,\ a\geq 0\}$$

Teorema 2

i) $\forall a\in\mathbb{A}$, la correspondiente recta (4) corta a la región eficiente en un punto.

ii) $\forall\bar{y}\in S_0$, $\exists a\in\mathbb{A}$ tal que la correspondiente recta (4) corta a S_0 en $\bar{y}$.

Demostración

i) Sea $\delta=F^{-1}a$. Definimos $\lambda=\delta/\sum_{i=1}^{q}\delta_i$ e $\bar{y}_j=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i f_{ji}$, j=1,...,q. Evidentemente, $\bar{y}\in S_0$. Además, haciendo $t_0=1/\sum_{i=1}^{q}\delta_i$, es evidente que:

$$f^{*}-\bar{y}=at_0$$

es decir, $\bar{y}$ se encuentra sobre la correspondiente recta (4).

ii) Sabemos que $\exists\lambda^t=(\lambda_1,\ldots,\lambda_q)\geq 0$, $\sum_{i=1}^{q}\lambda_i=1$, tal que $\sum_{i=1}^{q}\lambda_i f_{ji}=\bar{y}_j$, $j=1,\ldots,q$. Entonces, como $f_j^{*}-\sum_{i=1}^{q}\lambda_i f_{ji}=a_j\geq 0$, $j=1,\ldots,q$ y no todos iguales a cero, se tiene que:

$F\lambda=a$, $F^{-1}a\neq 0$, $F^{-1}a\geq 0$

Por tanto, $a\in\mathbb{A}$. ■

Los resultados anteriores ofrecen atractivas formas de proceder para determinar puntos eficientes. Desde el punto de vista del decisor, está claro que la identificación de estos es bastante cómoda si se trabaja sobre la recta (4) y se juega con los valores de a. Desde luego, en un proceso interactivo, es de mayor facilidad trabajar sobre la recta (4) con a que con λ. Describamos a continuación uno de estos procedimientos.

4.- ALGORITMO DE CAPTACION

Dado $a\in\mathbb{A}$, definamos sobre la recta (4) y a través del correspondiente λ el punto $y(a)\in S_0$.

Supongamos que la información que posée el decisor es suficiente para poder ordenar de peor a mejor los niveles alcanzados por los diferentes objetivos en y(a). Para $a\in\mathbb{A}$, denotamos por P(a) y M(a) los índices correspondientes a niveles peores y mejores, respectivamente.

Nuestra propuesta de actuación, impondrá la búsqueda de puntos $a'\in\mathbb{A}$, tales que los correspondientes niveles de y(a') puedan mejorar para $j\in P(a)$ y empeorar para $j\in M(a)$. Entenderemos que durante esta búsqueda, nos encontraremos con índices que han cambiado de peores a mejores y recíprocamente, imponiendo la congruencia del proceso que, a partir de una determinada iteración, los niveles asociados no deban ser ni mejorables ni empeorables. Por ello, supondremos que los índices que pertenecen a P(a) y a M(a) están etiquetados de forma permanente y que, durante nuestra actuación, los índices de P(a) y de M(a) pueden ir incrementando la intersección de ambos conjuntos (si un índice pertenece a la intersección, el correspondiente nivel estará equilibrado). La idea de equilibrio, desde la perspectiva del decisor, debería significar que ninguno de los niveles de y(a) debería ser mejorable ni empeorable. Por ello, damos la siguiente definición:

Definición 1

Diremos que un punto $a\in\mathbb{A}$ tendrá asociado un y(a) de equilibrio, cuando $P(a)=M(a)=\{1,\dots,q\}$. Entenderemos, en este caso, que a es un **vector de equilibrio** para el decisor.

Las siguientes definiciones preparan la aplicabilidad del esquema de trabajo referido con anterioridad.

Definición 2

Diremos que un problema del tipo (2) tiene la **propiedad evolutiva** sí, y sólo si, $\forall a\in\mathbb{A}$, tal que $P(a)\neq\{1,\dots,q\}$ o $M(a)\neq\{1,\dots,q\}$, $\exists a^1\in\mathbb{A}$, $a^1\neq a$, tal que $P(a)\cap M(a)\subset P(a^1)\cap M(a^1)$ (contenido estricto). En estas circunstancias, a^1 será **una captación de objetivos respecto de a**.

A partir de ahora, trabajaremos en la hipótesis de que el problema que pretendemos resolver tiene la propiedad evolutiva. Como es obvio suponer, se admitirá también que los puntos de equilibrio se encuentran en el conjunto de soluciones eficientes.

El siguiente resultado es trivial.

Teorema 3

Si el problema (2) tiene la propiedad evolutiva, entonces $\exists a^*\in A$ tal que $P(a^*)= M(a^*)= \{1,\dots,q\}$.

Probaremos a continuación que, bajo ciertas hipótesis generales sobre la racionalidad del decisor, basadas en una relación obvia entre los niveles de los diferentes criterios para un y(a), se pueden determinar vectores de equilibrio para éste.

Definición 3

Dados $a\in\mathbb{A}$, $i,j\in\{1,\dots,q\}$, diremos que $y_i(a) \succsim y_j(a)$ si, según apreciación del decisor, $y_i(a)$ es **mejor o equivalente** que $y_j(a)$. Si $y_i(a)$ es **equivalente** a $y_j(a)$, notaremos $y_i(a) \approx y_j(a)$.

Definición 4

Supongamos que $\mathbb{A}$ es un conjunto convexo y que $a^1,\ldots,a^q\in\mathbb{A}$. Diremos que el decisor es **racional** si, y sólo si, admite los siguientes axiomas:

i) Dado $j\in\{1,\ldots,q\}$, $\forall i\in J=\{1,\ldots,q\}-\{j\}$ se tiene que $y_j(a^j) \succsim y_i(a^j)$, entonces para cualesquiera $\lambda_s\geq 0$, $\sum_{s\in J}\lambda_s=1$, se verifica que:

$$y_j\Big(\sum_{s\in J}\lambda_s a^s\Big) \succsim y_i\Big(\sum_{s\in J}\lambda_s a^s\Big)$$

ii) Si, dados $i,j\in\{1,\ldots,q\}$, $i\neq j$, a^1, $a^2\in\mathbb{A}$ es $y_i(a^1) \succsim y_j(a^1)$ e $y_j(a^2) \succsim y_i(a^2)$, entonces $\exists\lambda\in]0,1[$ tal que $y_i(\lambda a^1+(1-\lambda)a^2) \approx y_j(\lambda a^1+(1-\lambda)a^2)$ (la componente i-ésima es igual de satisfactoria que la j-ésima, es decir, están equilibradas)

Teorema 4

Si el decisor es racional, $\mathbb{A}$ es convexo y $\exists a^1,\ldots,a^q\in\mathbb{A}$, tales que $\forall i,j\in\{1,\ldots,q\}$, $i\neq j$, $y_j(a^j) \succsim y_i(a^j)$, entonces $\exists a^*\in H(a^1,\ldots,a^q)$ (envoltura convexa), tal que $y_i(a^*) \approx y_j(a^*)$.

Demostración

Procedamos por inducción sobre el valor de q.

i) Aplicando ii) de la definición 4, el resultado es cierto de manera evidente para q=2.

ii) Supongamos que es cierto para q-1.

iii) Para demostrarlo para q, tengamos en cuenta que por el principio de inducción:

$$\exists\mu_s\geq 0,\quad s=1,\ldots,q-1,\quad \sum_{s=1}^{q-1}\mu_s=1,\quad y_i\Big(\sum_{s=1}^{q-1}\mu_s a^s\Big) \approx y_j\Big(\sum_{s=1}^{q-1}\mu_s a^s\Big),\quad \forall i,j\in\{1,\ldots,q-1\}.$$

Además:

a) Por la hipótesis del teorema y por el apartado i) de la definición 4 , $y_i\Big(\sum_{s=1}^{q-1}\mu_s a^s\Big) \succsim y_q\Big(\sum_{s=1}^{q-1}\mu_s a^s\Big)$, $\forall i\in\{1,\ldots,q-1\}$.

b) Por la hipótesis del teorema, $y_q(a^q) \succsim y_i(a^q)$, $\forall i\in\{1,\ldots,q-1\}$

Luego, aplicando ii) de la definición 4:

$$\exists\lambda\in[0,1] \text{ tal que } y_i\Big(\lambda\sum_{s=1}^{q-1}\mu_s a^s+(1-\lambda)a^q\Big) \approx y_q\Big(\lambda\sum_{s=1}^{q-1}\mu_s a^s+(1-\lambda)a^q\Big),\ \forall i\in\{1,\ldots,q-1\}.$$

Por tanto, haciendo $\lambda_i=\lambda\mu_i$, i=1,...,q, $\lambda_q=1-\lambda$, se demuestra que:

$\exists \lambda_1,\ldots,\lambda_q \geq 0,\ \sum_{s=1}^{q} \lambda_i = 1$, tal que $y_i(\sum_{s=1}^{q} \lambda_s a^s) \approx y_j(\sum_{s=1}^{q} \lambda_s a^s)$

Para concluir la demostración, bastará hacer $a^* = \sum_{s=1}^{q} \lambda_s a^s$. ■

En las hipótesis del teorema 4, denotaremos por $\mathbb{A}^*$ al conjunto $\{a^* \in \mathbb{A} / a^* \in H(a^1,\ldots,a^q),\ y_i(a^*) \approx y_j(a^*),\ \forall i,j \in \{1,\ldots,q\}\}$.

Corolario

En las condiciones del teorema 4:

i) $\mathbb{A}^*$ es convexo.

ii) Si $\mathbb{A}=H(a^1,\ldots,a^q)$, $\exists a \in \mathbb{A}^*$ tal que $P(a)=M(a)=\{1,\ldots,q\}$.

Teorema 5

i) Si la región eficiente de (2) coincide con S_0 y F es no singular, entonces $\mathbb{A}$ es convexo.

ii) En las condiciones especificadas en i, si $\forall i,j \in \{1,\ldots,q\}$, $i \neq j$, $f_i(x_i^*) \succsim f_j(x_i^*)$ y el decisor es racional, entonces $\exists a^* \in \mathbb{A}$, tal que $P(a^*)=M(a^*)=\{1,\ldots,q\}$.

Demostración

Evidente si se aplican resultados anteriores. ■

Nota

En las hipótesis en que trabajamos, si $a \in \mathbb{A}$ es tal que $P(a) \neq M(a)$, entonces $\exists a^1 = \phi(a, P(a), M(a))$ que es una captación de objetivos respecto de a. Por otro lado, los teoremas 4 y 5 nos suministran ideas interesantes para calcular puntos de $\mathbb{A}^*$ en los que se pueda encontrar la condición de equilibrio para el decisor.

Las ideas que hemos desarrollado previamente nos permiten realizar la propuesta de un esquema de resolución que podemos plasmar en el siguiente **algoritmo de captación**.

Algoritmo

Paso 0

Elegir $a^1 \in \mathbb{A}$, hacer k=1 e ir al paso 1.

Paso 1

Hallar y^k asociado a a^k sobre la recta (4); es decir, determinar una solución $(\lambda_1^k,\dots,\lambda_q^k)$ al siguiente problema de optimización lineal:

$$\min t$$

$$\text{s.a}: f_i^* - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j f_{ij} = a_i^k t, \quad i=1,\dots,q$$

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j=1,\dots,q.$$

$$t \geq 0$$

Sea $y^k = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^k f_{ij}$. Ir al paso 2.

Paso 2

El decisor debe hallar $P(a^k)$ y $M(a^k)$. Si $y_i^k \approx y_j^k$, $\forall i,j \in \{1,\dots,q\}$, ir al paso 3. En otro caso, ir al paso 4.

Paso 3

Si $P(a^k) \cap M(a^k) = \{1,\dots,q\}$, parar. En otro caso, ir al paso 4.

Paso 4

Determinar, de forma interactiva $a^{k+1} = \phi(a^k, P(a^k), M(a^k))$, vector de captación de objetivos respecto de a^k. Ir al paso 5.

Paso 5

Hacer k=k+1 e ir al paso 1.

Nota

Una posibilidad de determinar a^{k+1} en el paso 4 puede ser la siguiente: $a_i^{k+1} = a_i^k + \varepsilon_i$, $\forall i \in M(a^k)-P(a^k)$, $a_i^{k+1} = a_i^k$, $\forall i \in M(a^k) \cap P(a^k)$, $a_i^{k+1} = a_i^k - \varepsilon_i$, $\forall i \in P(a^k)-M(a^k)$. De esta manera, eligiendo los $\varepsilon_i > 0$ y suficientemente pequeños, en una nueva iteración se incrementarían, respecto de y_i^k, los niveles de y_i para $i \in P(a^k)-M(a^k)$, disminuirían los niveles de y_i para $i \in M(a^k)-P(a^k)$. De esta manera, estaríamos en buena disposición para que $M(a^k) \cap P(a^k)$ esté contenido estrictamente en $M(a^{k+1}) \cap P(a^{k+1})$. Obsérvese, por último, que si esto es cierto, el algoritmo descrito acaba en un número finito de pasos.

5.- CASOS GENERALES

Supongamos que no se imponen hipótesis sobre la forma de la región eficiente. Pretendemos, en estos casos generales, aprovechar el trabajo previo para proponer algoritmos interactivos adecuados.

Dado $\lambda\in\Lambda$, definamos el punto:

$$\bar{y}=\left(\sum_{i=1}^{q}\lambda_i f_{1i},\ \sum_{i=1}^{q}\lambda_i f_{2i},\ldots\ldots,\ \sum_{i=1}^{q}\lambda_i f_{qi}\right)$$

Definamos $a=\lambda F$ y planteemos el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Min } t & \\ \text{s. a: } f_i^* - y_i \le a_i t,\ i=1,\ldots,q & (5) \\ y\in Y & \end{array}$$

Sea $S(a)=\{y\in Y/\ y$ es solución óptima de $(5)\}$

Teorema

i) Si $y'\in S(a)$, entonces y' es débilmente eficiente.

ii) $S(a)\cap S\neq\phi$, es decir entre las soluciones de (5) existe al menos una que es eficiente.

Demostración

i) Si y' no es débilmente eficiente, entonces, $\exists y\in Y$ tal que $y>y'$. Esto implica que $y'\notin S(a)$.

ii) Sea $y'\in S(a)$ y supongamos que $y'\notin S$. Planteamos entonces el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \min \ \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{q}\,(f_i^* - y_i) & \\ \text{s. a: } y_i \ge y'_i\ ,\ i=1,\ldots,q & (6) \\ y\in Y & \end{array}$$

Sea $\ddot{y}$ solución óptima de (6). Trivialmente $\ddot{y}\in S\cap S(a)$. ■

Notemos que si la recta:

$f_i^* - y_i = a_i t,\ i=1,\ldots,q,\ t\in\mathbb{R}$

corta a S en un punto, dicho punto es la única solución de (5)

Basándonos en estos resultados y en los procedimientos desarrollados con anterioridad, hagamos la siguiente propuesta de esquema de resolución para este caso general:

Algoritmo

Paso 0

Aplicar el algoritmo introducido anteriormente para calcular $a^1 \in A$ (solución final). Elegir $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño, hacer $k=1$ e ir al paso 1.

Paso 1

Sea y^k solución del siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\min\ t \\ &\text{s. a: } f_i^* - y_i \le a_i^k t,\ i=1,\dots,q \\ &\qquad\quad y \in Y \end{aligned}$$

Paso 2

Si el decisor está de acuerdo con y^k, parar; en otro caso, ir al paso 3.

Paso 3

Si y^k está sobre la recta que une a^k con f^*, hacer $b^k=a^k$ e ir al paso 4. En otro caso, calcular un b^k adecuado para que y^k esté sobre la recta que une b^k y f^*. Ir al paso 4.

Paso 4

El decisor debe clasificar los niveles de y^k en supersatisfactorios, satisfactorios e infrasatisfactorios. Sean SS_k, S_k e I_k los respectivos conjuntos de índices. Ir al paso 5.

Paso 5

$\forall i \in SS_k$, elegir $a_i^{k+1} \in]b_i^k,\ b_i^k+\varepsilon[$. $\forall i \in S_k$, elegir $a_i^{k+1} \in]b_i^k - \frac{\varepsilon}{2},\ b_i^k+\frac{\varepsilon}{2}[$. $\forall i \in I_k$, elegir $a_i^{k+1} \in]b_i^k-\varepsilon,\ b_i^k[$. Ir al paso 6.

Paso 6

Hacer $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$, k=k+1 e ir al paso 1.

BIBLIOGRAFIA

- **Chankong, V. y Haimes, Y. Y. (1983).** *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology.* North Holland.

- **González Martín, C. (1986).** *Métodos Interactivos en Programación Multiobjetivo.* Serie monografías, n. 24. Universidad de La Laguna.

- **González Martín, C. (1987).** "Un algoritmo interactivo basado en la distancia del máximo Ponderado". Trabajos de Investigación Operativa, Vol.2, nº 1, 81-92.

- **González Martín, C. y Sánchez García, M. (1990).** "Distancias Invariantes y Métodos Interactivos". Revista de la Academia de Ciencias de Canarias, vol 1, 185-191.

- **Hwang, Ch. L. y Masud, A. J. M. (1979).** *Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, n. 164. Springer Verlag.

- **Ramos Domínguez, M. T.; Sánchez García, M. y González Martín, C.(1988).** "Distancias Elipsoidades y puntos eficientes. Un método interactivo". Trabajos de Investigación Operativa, Vol.3, nº 1, 3-12.

- **Sawaragi, Y.; Hirorata, H. y Tanino, T. (1985).** *Theory of Multiobjective Optimization.* Academic Press.

- **Sawaragi, Y.; Inoue, K. y Nakayama, H. (eds.) (1987).** *Toward Interactive and Intelligent Decision Support Systems. Vols. 1 y 2.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, ns. 285 y 286. Springer Verlag.

- **Shin, W. S. y Ravindran, A. (1991).** *Interactive Multiple Objective Optimization: Survey I - Continuous case.* Computers and Operations Research, vol. 18, 97-114.

- **Steuer, R. (1985).** *Multiple Criteria Optimization.* John Wiley.

- **Yu, P. L. (1985).** *Multiple-Criteria Decision Making. Concepts, Techniques and Extensions.* Plenum Press.

-**Zeleny, M. (1982).** *Multiple Criteria Decision Making.* McGraw Hill.

Recibido: 21 de Mayo de 1992