Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 355-377 (1990)

¿MATEMATICA PURA? ¿MATEMATICA APLICADA?

NACERE HAYEK

Departamento de Análisis Matemático, Univ. de La Laguna

38271. La Laguna, Canary Islands, Spain.

ABSTRACT

Some considerations are made on the ever discussed finality of the Mathematics and its problematic division as a pure and applied science.

RESUMEN

Se hacen algunas reflexiones sobre la siempre discutida finalidad de las Matemáticas y su problemática división en pura y aplicada.

La matemática en sí misma es un esqueleto. La carne y sangre de la matemática consiste en lo que se hace con ella.

Morris Kline

La constitución de las matemáticas es un problema histórico, totalmente ajeno a las demás ciencias. Fué la primera ciencia en aparecer, pero difiere notablemente de las otras por una serie de características que brotan de su singular naturaleza abstracta: por ejemplo, ¿ seríamos capaces de dar una definición clara y convincente de la matemática ? ¿ cuáles son exactamente sus límites ? ¿ cómo hay que concebirla, de una vez por todas ?

Además, si la matemática fuera una mera ciencia, como la astronomía ó la mineralogía, podríamos definir bien su objeto. Pero no sólo hasta ahora nadie ha podido ni puede dar esa definición, sino que es harto sabido que la misma ha sumido durante siglos a pensadores y filósofos en incesantes elucubraciones que no han encontrado aún una feliz formulación que sea unánimente aceptada.

Una de las dificultades esenciales deriva principalmente del planteamiento siguiente: sus conceptos son tan generales como los de las demás ciencias, pero ¿ a qué objetos hay que referirlos ? Sigue siendo tema de frecuente discusión la medida en la cual los conceptos matemáticos abstractos están sugeridos por la experiencia. Una breve reflexión al respecto va a conducirnos de modo natural, al fondo de la problemática que queremos tratar.

Antetodo, no debe confundirse el calificativo de concepto con su dominio real, ya que si bien el círculo o el infinito son nombres de unidades de enunciados, de problemas, no lo son de objetos o realidades conocidos gracias a ellos. Consecuentemente, tenemos que *saber* qué tipo de realidad - objetos o nó - permite conocer dichos conceptos, de donde surgen y a qué experiencia pueden referirse.

Si se sopesa el término " objeto matemático ", observamos que aisladamente considerado, no tiene significado, si bien involucra que el mismo posee alguna clase de existencia. Se podría creer que la noción de existencia se encuentra así nítidamente delimitada, pero lo cierto es que conlleva diversas dificultades lógicas y psicológicas.

Las notables corrientes filosóficas del idealismo y el materialismo, no reaccionan de la misma manera ante tales dudas.

Para los idealistas, que a priori estimamos confunden el nombre y el objeto del concepto, los objetos son ideales y esencialmente " generales ", y el concepto principal de la matemática, el *infinito*, no constituye un concepto verdadero puesto que no representa ningún objeto.

Téngase presente que la filosofía idealista elaboró, especialmente entre los siglos XVII y XIX, una doctrina del concepto que, mezclada con su teoría del infinito, tuvo efectos muy precisos en la interpretación de la historia del cálculo infinitesimal; y es conocido que una de sus cruciales premisas expresaba que en la medida en que todo concepto venía dado como representación de un objeto, aún cuando éste fuese de naturaleza espiritual, el infinito suponía una contradicción: ¿ cómo podía hablarse de concepto de infinito en matemáticas si el infinito no puede ser un objeto, con sus limitaciones como todo objeto ? (*)

Para el materialismo, en cambio, el dominio real que estudian las matemáticas es un conjunto de datos simbólicos escritos, delimitado de modo distinto según las épocas. Tales datos, sensibles, no son objetos, sino realidades, lo que impulsa a los materialistas a afirmar que la propia materia científica no acaba de ser una aplicación, para luego concluir que las matemáticas no son aplicadas nunca sin haber sido previamente utilizadas y sin que su utilización haya sido referida (**).

(*) Hegel (1770-1831), aferrado a la doctrina del idealismo absoluto, al referirse en " La ciencia y la lógica " a la polémica suscitada en el siglo XVIII alrededor de las novedades infinitesimales de Newton y Leibniz, subraya que la conceptualización definitiva del infinito (como la de cualquier otro concepto) no pertenece a las matemáticas que lo presienten, sino a la filosofía que lo desarrolla.
(**)Ello hace presumir, en gradaciones sucesivas, que el beneficio que las matemáticas proporcionan a la sociedad no proviene sino de las utilizaciones que de sus conceptos hagan otras disciplinas. No obstante, ¿ cabe esperar para cada uno de sus elementos la utilización notable que la teoría de la relatividad ha proporcionado, por ejemplo, a la geometría de Riemann ? Esto sería igual a restringir sobremanera el significado y el interés social de las matemáticas.

Es claro que una visión subjetiva de " lo real ", un discernimiento acusadamente diferente sobre la noción de realidad, gravita de modo fundamental en el seno de cada una de las doctrinas filosóficas anteriores.

El matemático se esfuerza por aislarse de estos y otros posicionamientos, optando generalmente por encarar sus a veces espinosos asuntos o aparentes contradicciones, refugiándose en su propio campo. Plenamente consciente de que no es nada fácil dilucidar la naturaleza de lo que va añadiendo la matemática día a día a sus estructuras, el matemático aventura su propia concepción. Para la mayor parte de los cultivadores de esa ciencia, existe en efecto una realidad a la que puede darse el nombre de *realidad matemática*, distinta de la realidad *física*, esto es, la del mundo material, la del universo que las ciencias físicas intentan describir.

Mas ocurre que no parece existir acuerdo entre filósofos y matemáticos acerca de cuál es la naturaleza de dicha *realidad matemática*, dándose lugar a una de las disquisiciones más arduas que tiene la metafísica. El matemático G. H. Hardy (1877-1947) condensa así esta situación |4|: " Algunos sostienen la postura de que la realidad matemática es *mental* y que de alguna forma somos nosotros quienes la construimos. Otros, por el contrario, son de la opinión de que aquella realidad tiene una existencia independiente de nosotros mismos ".

En términos más explícitos, Hardy plasma la disyuntiva siguiente: Los conceptos, axiomas y teoremas de la matemática, ¿ existen en algún mundo objetivo y son meramente descubiertos por el hombre o son todos ellos enteramente invenciones humanas ?

En la época griega, los conceptos de la matemática estaban extrañamente dotados de alguna esencia divina (*), y los axiomas fueron considerados como verdades necesarias (**). Ello entrañaba que los teoremas matemáticos terminaran por identificarse, ni más ni menos, que con verdades acerca del universo, ya incorporadas al diseño del mundo. Cada nuevo teorema venía a representar propiamente un descubrimiento, una revelación de lo que ya existía; y la existencia de estos bienes o tesoros era ajeno al hombre, como parecían serlo las estrellas y los planetas. Fué lo que luego se denominó " platonismo ", heredado del ciego convencimiento del gran filósofo ateniense de que las verdades matemáticas pertenecían a un mundo independiente de los seres humanos, y de que la mente se limitaba a reconocer estas verdades por medio de la contemplación. Esta visión de la matemática fué indudablemente la dominante hasta bien entrado el siglo XVIII e incluso para algunos sigue siendo válida hoy en día (***).

(*) A duras penas es concebible un estado mental en el cual muchos objetos matemáticos fueran considerados símbolos de verdades espirituales o episodios de la historia sagrada. Sin embargo, a menos que hagamos este esfuerzo de imaginación, una fracción de la historia de las matemáticas sería realmente incomprensible.

(**) Insistimos en que, tras el fracaso de los absurdos intentos de demostración de conceptos primitivos y axiomas, reinó tal estupor, que durante largo tiempo se creyó que las verdades primeras tenían su evidencia en los terrenos de la metafísica. Para Platón, había que extraerlas de una especie de paraíso en el que eran salvaguardadas las ideas matemáticas; para Kant, esas verdades primeras pertenecían a las propias estructuras de nuestro espíritu |5|.

(***) El citado Hardy, en línea con la de los numerosos filósofos de elevada reputación desde los tiempos de Platón, no duda en este siglo en afirmar también que " los teoremas que demostramos y que grandilocuentemente calificamos como nuestras "creaciones", son tan sólo productos de nuestras observaciones ".

La filosofía matemática antitética al platonismo es la del " formalismo ", aliada al positivismo. Sus adeptos abrazan la doctrina que centra en el individuo la creación matemática, sosteniendo que sus conceptos, axiomas y teoremas son elaborados por el hombre. Para ellos, el ser humano distingue objetos en el mundo físico e inventa números por ejemplo, como una manera de representar un aspecto que él ha extraído de la experiencia. Los axiomas son, así mismo, una generalización del hombre de la forma en que parecen comportarse las líneas y figuras físicas; y los teoremas pueden lógicamente inferirse de los axiomas. La matemática, de acuerdo con esta visión, no es otra cosa que una creación humana.

Desde una plataforma histórica más amplia, la matemática no ha tenido nunca un carácter invariable. Su naturaleza ha sido siempre fuente de diversas interpretaciones. Para los pre-griegos fué más bien un instrumento práctico. Para los griegos, un cuerpo de verdades preexistentes. Los siglos XVII y XVIII la identificaron en materia y método con la ciencia. Ya en el siglo XIX, una de sus ramas, la geometría no euclídea, no sólo logró una separación (que en realidad supuso una conmoción en todo el ámbito científico), sino que revelaba una insólita arbitrariedad inmersa en los axiomas. Pareció entonces quedar establecido que la matemática no representa propiamente una idealización del mundo físico, sino que muestra sólo una correspondencia con dicho mundo.

Hoy en día ha aparecido, sin embargo, alguna inesperada corriente que llega sorprendentemente a cuestionar a la matemática como ciencia, afirmando algunos |12| que la única manera de atribuirle tal carácter, sería la de desglosar el texto matemático, sea cual fuere, en dos niveles, uno de los cuales haría el papel de teoría y el otro el de realidad; expresado en un sentido más gráfico, *lo matemático y lo matematizado*.

Curiosamente, y sin entrar en el para nosotros absurdo planteo de aquel cuestionamiento, la consciencia de esta dualidad, el hecho mismo de su existencia, ha venido prevaleciendo desde hace siglos (*) en las mentes de la mayoría de los científicos, si bien en algunos períodos pasados, al ser enfocada por diversos pensadores desde perspectivas abiertamente dispares, se pudo reflejar una imagen poco clarificadora del papel de la verdadera matemática.

Ante éstas y otras actitudes, susceptibles de generar falaces incertidumbres en torno al quehacer y naturaleza de su ciencia, han salido al paso en determinadas épocas grandes matemáticos, entre ellos Hilbert y un grupo de ilustres componentes de la renovadora y ya famosa escuela Bourbaki, para asegurar vigorosamente que la matemática es en último extremo, sólo un asunto entre matemáticos y que éstos no son responsables de su trabajo ante autoridades intelectuales desvinculadas del desarrollo de su materia y mucho menos si sus juicios pretenden atentar a la naturaleza y/o a la forma en que debe ser estructurada o dividida.

Aún siendo cierto que en los últimos cuarenta años, el universo matemático ha evolucionado desde una disciplina única a un montón de disciplinas autónomas, al parecer aisladas unas de otras tanto en sus fines como en sus métodos, y hasta en su lenguaje, lo que quizás incline engañosamente al profano a preguntarse si es que hay *una* o *varias* matemáticas, la matemática constituye senci-

(*) En el siglo I a. C., el astrónomo y matemático griego Gemino hizo una clasificación de las matemáticas que dá primacía al estudio abstracto, separándolo de sus posibles aplicaciones. A un lado, coloca lo que se refiere solamente a las cosas inteligibles (objetos que el alma elabora en sí misma): al otro, lo que concierne a las cosas sensibles. Las partes primordiales, aritmética y geometría, tratan de las cosas inteligibles, y en las que abordan las cosas sensibles incluye la mecánica, la astronomía, la óptica, la geodesia, la canónica y la logística.

llamente un modo independiente de actividad racional, que durante siglos ha venido produciendo su propia materia, sus propios métodos, sus propios criterios correctivos; y las diferencias de opinión que se germinen en cuanto a sus principios básicos, su significación, su aplicabilidad y su contenido, toca resolverlos a los mismos matemáticos.

Ateniéndonos a su forma actual, la matemática es ahora concebida como una teoría de estructuras abstractas (*), múltiples y variadas, pero todas ellas analizadas bajo el imperio de un mismo método axiomático universal.

Lo que hoy es tenido por mero objeto matemático como una circunferencia, un triángulo equilátero, un poliedro regular (y que posiblemente causara antaño tanto impacto como el logrado por una estructura entera en nuestros días), extrae su significado de una estructura, en cuyo seno desempeña actualmente su papel (**).

(*) Según la acepción contemporánea, una estructura matemática consiste en un conjunto de objetos (soporte de la estructura), una serie de operaciones o relaciones definidas sobre el conjunto soporte, más una colección de elementos distinguidos del conjunto soporte, como pueden ser 0, 1, ... Estos ingredientes básicos constituyen la "signatura" de la estructura. Cuando una signatura ha sido sometida a un conjunto de axiomas que imponen condiciones a los ingredientes que la componen, aparece una estructura matemática |2|.

(**) El pluralismo inicial de los "entes" u "objetos matemáticos", fué sustituído a raíz de las investigaciones axiomáticas de los siglos XIX y XX por una concepción unitaria, que redujo progresivamente todas las nociones matemáticas, primero a la del número entero, y luego en una segunda etapa, a la noción de "conjunto". Mas, esta última, considerada durante mucho tiempo "primitiva" e "indefinible", suscitó polémicas interminables que sólo se apaciguaron cuando, con las investigaciones recientes sobre el formalismo lógico, se disipó esa noción de conjunto (y con ella, todos los seudoproblemas metafísicos sobre los entes matemáticos). Según esta nueva concepción, las estructuras matemáticas se convierten, propiamente hablando, en los únicos objetos de las matemáticas |10|.

Ahora bien, en la matemática moderna reina una alianza e interacción de teoría y práctica que, amén de haber sido uno de los factores decisivos de su desarrollo actual, afecta más que nunca a su forma de concebirla. Para los matemáticos de este último medio siglo, su ciencia debe ser descrita del modo siguiente: existe una matemática *pura* que se ocupa simplemente del análisis de estructuras abstractas; junto a ella se distingue (*) una matemática *aplicada*, la cual se interpreta hoy como un estudio de estructuras, mas sin poseer la libertad plena de la matemática pura, tratándose esencialmente de un examen teórico de varios dominios de la experiencia actual con el fin de que aflore su articulación estructural.

La matemática pura ofrece de este modo, un cúmulo ciertamente rico de modelos estructurales que vienen siendo sistemáticamente investigados, y el conocimiento matemático que de ello resulta, puede ser ahora aplicado en otras esferas. Por aplicación de una teoría matemática se entiende el reconocimiento de que la estructura con la que la teoría trata, se hace presente en un cierto cuerpo de experiencia, al que transmite nuestro conocimiento sobre la estructura, el cual está abstractamente inmerso en los teoremas que conforman aquella teoría. La matemática aplicada no representa, por ende, un estudio empírico, por cuanto el matemático aplicado asume la delicada tarea de crear una imagen matemática - o *modelo* - del proceso físico, esto es, la de idealizar la experiencia hasta responsabilizarla de un trato matemático, aún cuando corra el riesgo de perder contacto con el mundo al cual intenta aplicar sus conclusiones.

(*) La distinción entre matemática pura y aplicada se remonta al siglo pasado, cuando se habló por primera vez de la utilidad de las matemáticas. La primera comprendía entonces el tratamiento del álgebra, geometría y análisis; la segunda abarcaba el área en que aquella se aplicaba a los fenómenos del mundo externo.

Es de interés constatar que, en su excelente análisis entre lo abstracto y lo concreto, y al tratar de la relación de la matemática con la realidad, Ferdinand Gonseth |3| expresa que, en general, " la ciencia parece estar animada hoy en día de dos espíritus enemigos: uno de ellos persigue en lo racional (y especialmente en la " matemática pura "), el ideal de la *Verdad en sí*; el otro investiga en lo natural y especialmente en el dato experimental, el ideal complementario de la *Realidad en sí* ".

La matemática, en su nueva andadura, con el doble bagaje de sus corrientes pura y aplicada ha experimentado en las recientes décadas un portentoso avance, significación y desarrollo sin precedentes en la historia. La fértil interconexión entre ciencia y matemática en problemas, teoría, conceptos y paradigmas no ha sido nunca tan grande como en este último cuarto del siglo XX. Conviene mencionar además, que las matemáticas pura y aplicada se han acoplado bien a las tres fases del esqueleto metodológico preestablecido por Newton en sus *Principia*: *datos*, *deducción* y *observación*.

Son instrumentos de la matemática pura la abstracción y la deducción, y sus estamentos incluyen funciones, ecuaciones, operadores y espacios de dimensión infinita. En el seno de la matemática pura se encuentran materias tradicionales como la teoría de números, álgebra, geometría, análisis y topología. Tras medio siglo de espectacular crecimiento especializado, la matemática pura ha sufrido una fecunda renovación dimanada principalmente del descubrimiento de fructíferos y profundos enlaces entre sus varios componentes.

La matemática aplicada, por otra parte, ajusta métodos matemáticos a las observaciones y teorías científicas. Constituye un conducto primordial de ideas científicas para estimular la innovación matemática y actúa, al propio tiempo, como inmejorable vehículo para la resolución de problemas científicos. Métodos clásicos de matemática aplicada que engloban ecuaciones diferenciales, cálculo numérico, teoría de control y sistemas dinámicos, vienen ahora utilizándose en novedosas y más amplias áreas de aplicación, entre las que, aparte de otras, figuran optimización, fisiología y epidemiología. De igual manera, nuevos y más precisos instrumentos de estadística y cálculo de probabilidades, teoría de juegos, teoría de la decisión y matemática discreta, son hoy aplicados a las ciencias humanas, alcanzándose óptimas cotas en cuanto a descripciones, predicciones y resultados. Merece en punto y aparte señalar que las teorías abstractas de matemáticos como Boole, Cantor, Turing y von Neumann han culminado en nuestro tiempo con el descubrimiento del explosivo computacional en virtud del cual numerosos resultados de la ciencia teórica son usados para estimular la realidad sobre un computador moderno, siendo consecuencia de ello que los métodos computacionales invadan en la actualidad todos los aspectos de la matemática aplicada.

Si bien es cierto que todos los intentos para dividir la matemática en partes, son necesariamente artificiales, la moderna división en matemática pura y matemática aplicada, representa justamente una de las mejores estructuraciones para ayudar a comprender la unidad del complejo matemático. Dicha división no configura, de hecho, diferencias intrínsecas en la naturaleza de la disciplina, y mejor que precisar distinciones en estilo, propósito e historia, se revela más idónea para describir tipos de matemáticos en lugar de tipos de matemáticas.

Debe señalarse igualmente que en los últimos tiempos han habido algunas etapas en las que se produjeron tensiones entre los seguidores de una y otra corrientes que, aunque causaron malestar y desconcierto en la comunidad matemática, no impidieron que se creara, a la postre, una deseable savia de nueva matemática.

Ahora bien, para ofrecer una mejor visión del panorama que describimos sobre la división, hay que dar cuenta también de otros pormenores y posicionamientos de practicantes de uno y otro campo, lo que hacemos seguidamente agregando algunas consideraciones ulteriores, con inclusión de varias referencias significativas.

Digamos antetodo que la línea divisoria entre la matemática pura y la matemática aplicada, no debe ni puede ser interpretada en un sentido drástico. Es claramente visible el amplio solapamiento de sus fronteras en numerosos puntos y, por otra parte, la historia repite una y otra vez que más temprano o más tarde, contextos enteros de la última (la aplicada) son inexorablemente alcanzados por sus homólogos de la primera (la pura), para fundirse en un mismo término o cuerpo.

R. Courant, un cultivador sobresaliente de ambas matemáticas, comenta irónicamente algunas ufanas posturas al respecto, cuando afirma |7|: " No se puede trazar una línea divisoria estricta entre matemáticas puras y aplicadas. No debería existir una clase de sumos sacerdotes de la belleza matemática incontaminada, responsable exclusivamente ante sus propias inclinaciones, y una clase de trabajadores que sirven a otros señores ".

El matemático, en general, se siente más confortablemente reflejado en cuanto a su cometido, cuando las afirmaciones son un tanto amplias e imprecisas, como la que sigue de James R. Newman |11|: " La investigación matemática tiene dos direcciones ante sí: una, la de poder penetrar en las demás ciencias, construyendo modelos, mapas y puentes para el razonamiento; otra, la de dedicarse a sus propios asuntos, cultivando su propio jardín. Los dos trabajos han sido enormemente fecundos ".

Hay quien no acepta criterio divisionario alguno y no pocos han llegado a pensar, con la presunción de no estar descaminados, en la existencia de un objeto llamado matemática, erigido primero por los matemáticos por razones que no tienen nada que ver con ciertas actividades humanas, y que después se aplica a problemas reales.

Lo cierto es que existe un trasfondo de naturaleza más compleja en la comentada división, que los propios matemáticos evidencian aún más al ofrecer interpretaciones más precisas, más lógicas y sobre todo, mejor matizadas. Muchos de ellos, en efecto, opinan que la separación no debe efectuarse de un sólo modo, ya que nos encontramos generalmente con dos especies de matemáticas según la óptica que se adopte en cuanto a sus diferentes sistemas de clasificación.

Algunas de las dicotomías son bien conocidas, y otras menos. La matemática estudia medidas y modelos, o en otras palabras, números (aritmética) y figuras (geometría); puede ser discreta o continua; es a veces finita y a veces infinita; pero quizás la más mordaz y sarcástica (por los paréntesis añadidos) sea la que sugiere P. Halmos |15|, al afirmar que " una parte de la matemática es pura (¿ inútil ?) y otra parte aplicada (¿ práctica ?) ".

Algunos, más en concreto, no acaban de decidirse exclusivamente por el álgebra (discreta) o sólo por la topología (continua), existiendo incluso florecimientos de materias como las denominadas topología algebraica y álgebra topológica. Ahora bien, la mayor parte de los matemáticos se inclinan, de hecho fuertemente, bien sea hacia la discreta, bien sea hacia la continua.

Ya dejamos anotada la carencia de una feliz y definitiva formulación acerca de la finalidad de las matemáticas, lo que sin duda ha venido generando la mayor parte de notables controversias, muy en especial en cuanto a su naturaleza y a la forma en que debe ser estructurada.

Hasta hace poco más de cien años, ningún matemático hubiera dudado de que el propósito primordial de su campo era la atención y control de los fenómenos naturales. Gauss, por ejemplo, adoptó como suya la siguiente divisa: " Tú, naturaleza, eres mi diosa. A tus leyes están sujetos mis servicios ". Y en nuestro siglo abundan opiniones que apuntan en el mismo sentido, algunas bien significativas por proceder de acendrados puristas, entre ellos Hardy quien reconoce |4|: " no hay ningún matemático tan puro como para desinteresarse por todo cuanto ocurre en el mundo físico. Además, en cuanto sucumba a tal tentación, en realidad estará abandonando su postura puramente matemática ".

Es claro que las matemáticas han estado y estarán profundamente afectadas por acontecimientos externos y nadie cuestiona que la matemática más excelente, sumida en lo abstracto, conduce a aplicaciones prácticas en la naturaleza. Es igualmente perceptible que los problemas más difíciles que brotan de esta última estimulan la invención de nueva matemática.

El matemático ruso N. I. Lobatschevski (1773-1856) llega a rechazar que puedan subsistir zonas vírgenes de sempiterna pureza cuando proclama que " no existe rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda algún día ser aplicada a los fenómenos del mundo real ".

J. Fourier (1768-1830) sostuvo (en línea con Gauss) en su clásica obra *Teoría analítica del calor* que " el estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos, y las ideas fundamentales son aquellas que representan fenómenos naturales "; punto de vista que no es compartido por C. Jacobi (1804-1851), gran matemático alemán y purista notable por su elegancia y rigurosidad de exposición, para quien la finalidad de la ciencia que practica alcanza el escalón más elevado de nuestras cualidades morales, cuando dice: " Fourier y otros matemáticos suscriben la opinión de que el objeto principal de las matemáticas es el interés público y la explicación de fenómenos naturales, pero cualquiera de esos científicos debería reconocer que el objeto único de la ciencia es *el honor del espíritu humano* y con esta premisa una cuestión sobre la teoría de números vale tanto la pena como una cuestión acerca del sistema planetario ".

En Hardy anida un sentimiento no disimulado de que las aplicaciones tienen mucho de antiestético, cuando a lo que le acotamos anteriormente añade que " algunas veces se ha sugerido que la auténtica grandiosidad de los matemáticos puros reside en la no utilidad de su obra, lo que conduce a jactarse de que una investigación matemática no tenga la más mínima aplicación práctica " (*).

(*) Es claro que para Hardy la utilidad, en tanto que meta a alcanzar, es sumamente inferior a la elegancia y profundidad. La doctrina que sostiene que solamente deberíamos proponernos el estudio de matemáticas inútiles, se conoce actualmente como el síndrome de Hardy.

Aparte de estas preocupaciones por la finura, pulcritud de estilo, penetración o rigor, para otros deben contar también en los juicios sobre la división, virtudes o atributos de diferente naturaleza, y hay quien a ultranza sólo ve auténtica matemática en la pura, cuando afirma que " la matemática pura es matemática para matemáticos, como opuesta a la matemática aplicada, que es matemática para otra cosa ".

Lo que verdaderamente interesa destacar es que, unos y otros, practicantes de la matemática pura y de la matemática aplicada, difieren en motivación, actitud, técnica y satisfacción.

El matemático aplicado se propone entender el mundo y quizás cambiarlo. Las técnicas que escoge son juzgadas por su efectividad: el fin es lo importante.

La motivación del matemático puro es casi siempre simple curiosidad. Además, para el matemático puro, su materia es una inagotable fuente de placer artístico: no sólo le excita la dificultad del problema y la satisfacción de la victoria (si la consigue), sino principalmente el gozo de su contemplación (*).

La literatura matemática está llena, por otra parte, de tér-

(*) Un destacado matemático actual, Alfred Adler, cuenta así el intenso placer del artista ante su creación |2| : " Un resultado matemático nuevo, enteramente nuevo, jamás conjeturado ni entrevisto antes por nadie, amamantado, por así decirlo, desde la primera hipótesis tentativa, criado a través de laberintos de fallidos intentos de demostración, de enfoques erróneos; perseguido durante meses o años de trabajo duro y delicado, por senderos escasamente prometedores .... Nada hay en el mundo, o casi nada, que pueda proporcionar tal gozo, una tal sensación de poder y tranquilidad que igualen a las de su creador. Y la erección de un nuevo y magno edificio matemático es un triunfo que susurra inmortalidad ".

minos estéticos, y el purista que dijo que estaba menos interesado en los resultados que en la belleza del método por el cual los había hallado, creemos que no estaba expresando un sentimiento poco común. El gran poeta Goethe dejó escrito que " el matemático no es perfecto sino cuando siente la belleza de la verdad ". No resulta difícil tampoco, descubrir que los matemáticos se ven empujados por los mismos incentivos y que experimentan las mismas satisfacciones que los cultivadores de las artes. K. Weierstrass (1815-1897), gran jerarca del rigor, señala: " un matemático que no tenga también algo de poeta no será nunca un matemático completo ".

Aún cuando el contenido de las matemáticas fuera indivisible, es necesario reconocer claras diferencias entre las actitudes que el mismo científico o científicos diferentes pueden adoptar ante un problema.

La actitud del purista, que todo espíritu rigurosamente científico asumirá al menos algunas veces, exige perfección sin compromisos.

Para el aplicado, sus matemáticas se encuentran dominadas por la *aproximación*, la cual es inevitable cuando se intentan reflejar procesos físicos por medio de modelos matemáticos. La técnica de esta traducción de la realidad en modelos matemáticos abstractos y la apreciación del grado de exactitud alcanzable mediante ellos requiere un sentido intuitivo agudizado por la experiencia.

Conviene señalar asímismo que, a veces una teoría matemática es directamente sugerida por una experiencia concreta de la cual es separada por un proceso de abstracción; a veces la matemática pura y sus aplicaciones se desenvuelven una y otra, nutriéndose cada una de ellas del crecimiento de la otra; y a veces, una teoría matemática comienza a desarrollarse como un ejercicio puramente espiritual, y sólo después demuestra tener alguna significativa aplicación. La primera de estas tres posibilidades es ejemplificada por la geometría euclídea, la segunda por la teoría de ecuaciones diferenciales y la tercera por el cálculo tensorial.

En otro orden de cosas, si tuviésemos que ocuparnos pura y exclusivamente de mostrar su relevancia, la división de la investigación matemática en pura y aplicada, no sería propiamente la vía más efectiva para comprenderla. La razón se adivina. Acabamos de ver que una idea matemática puede originarse inicialmente en el contexto de la matemática " pura ", sólo para hallar alguna ulterior aplicación; e inversamente, que algunas aplicaciones específicas pueden conducir a una noción que luego admite un desarrollo dentro de la matemática pura en direcciones enteramente diferentes. En general, la teoría se aferra primero a la práctica y luego la práctica a la nueva teoría, en un abrazo que acaba en fusión.

El cuadro contemplado desde esta última perspectiva, resulta ser tan viejo como la matemática misma. Como se sabe, el estudio griego de las formas puras de las secciones cónicas abrió el camino, dos mil años más tarde, a modelos científicos de órbitas planetarias, mientras que la aritmética comercial de los antiguos egipcios ha conducido en tiempos modernos a resultados esotéricos en la teoría de números. Estos vetustos ejemplos ilustran además, de hecho, el poder de ambas matemáticas, la pura y la aplicada, así como los lazos que las unen. Similar evidencia abunda en la matemática de hoy: la teoría abstracta de grafos y matrices creada no ha mucho, ha hecho posible el diseño de sistemas de computador que están revolucionando nuestro actual modo de vida y de trabajo, mientras que la revolución misma del computador viene generando nuevos campos de investigación de matemática pura en, por ejemplo y entre otros, estructura de datos y análisis de algoritmos |15|.

Si bien la relación temporal que coexiste entre la formación de una teoría matemática y la aplicación de la teoría, no es en cualquier caso acontecimiento importante, salvo naturalmente como materia de interés histórico, es conveniente saber que el tiempo que transcurre para que las teorías o invenciones matemáticas alcancen a las aplicaciones que le son consustanciales, varía enormemente. En ocasiones, es inmediato; a veces, deben transcurrir uno o varios siglos antes de que la teoría abstracta cause alguna revolución por su aplicación. Sin embargo, ese período que media entre una idea matemática y su utilización ha ido declinando de siglos a décadas y recientemente, a años. Citemos, a título de muestras significativas, que sin el cálculo infinitesimal de los matemáticos Newton y Leibniz (siglo XVII) no hubiéramos tenido ferrocarriles, ni electricidad ni aviones; que la noción de matriz creada por Charles Hermite, por razones puramente algebraicas, a finales del siglo XIX, ha llegado a convertirse hoy en un instrumento privilegiado de la técnica para el cálculo de vibraciones en los aviones, así como concepto primordial en mecánica cuántica, y por último, que la tomografía computerizada con su prodigioso scanner, producto del desarrollo de una técnica que ha revolucionado el campo de la medicina, no hubiera sido posible sin una feliz interpretación geométrica de un teorema demostrado por el matemático J. Radon hace hoy algo más de sesenta años.

El más profundo aserto acerca de la relación entre la matemática pura y la aplicada, es la de ser simbiótica, en el sentido de que ninguna de ellas sobrevive sin la otra; no sólo, como es universalmente admitido, la aplicada necesita de la pura, sino que la pura requiere también de la revitalización y el contacto con la realidad, que sólo la aplicada le puede suministrar.

El primer vestigio de la prueba de la simbiosis es histórico; recuérdese que toda la matemática pura llegó del mundo real, lo que hizo patente el hecho de que la geometría, conforme a la leyenda, proviniera de medir los efectos de las inundaciones del Nilo |15|.

Aparte de otras muchas señales importantes reveladoras de esa simbiosis que ensambla la matemática pura y la aplicada, uno de sus signos inequívocos queda igualmente bien ilustrado en los más potentes logros de la matemática del siglo XIX; cabe destacar entre ellos, el análisis de Fourier de la distribución del calor en los cuerpos que condujo finalmente a la en extremo abstrusa teoría de conjuntos infinitos de Cantor, así como las consideraciones puramente abstractas sobre la geometría no euclídea que forjaron los modelos esenciales de la teoría de la relatividad.

Debe tenerse en cuenta, por último, que aunque la matemática se encuentre simultáneamente configurada por exigencias de naturaleza pura y por la determinación del hecho científico, es obvio que ambos moldes han venido produciendo estructuras similares. Y se hace preciso subrayar que estas dos vertientes - una, aplicada, concreta y externamente influenciada y la otra, teórica, abstracta e introspectiva - proceden de raíces comunes.

Finalmente, la varias veces aludida ausencia de una definición válida acerca del propósito de las matemáticas, y que como ya hemos dicho, afecta seriamente toda exposición sobre su naturaleza y aspectos básicos y, en particular, formas de estructuración como la que en el presente trabajo nos ha ocupado, requiere que complementemos nuestros comentarios con una última reflexión.

Es cierto que siempre han habido y habrán tendencias cambiantes de la mentalidad matemática respecto de su propio quehacer; y podemos convenir incluso en que ello ha contribuído a eliminar y depurar discrepancias de práctica y de significado.

Pero nos llena de estupor y además resulta extremadamente penoso reconocer que más de dos milenios de historia hayan acabado por convencernos de que la matemática no puede formular por sí misma su objetivo final, capaz por otra parte, de orientar su verdadero progreso. Por su actualidad, es de interés que nos refiramos a lo que dice al respecto uno de los más distinguidos investigadores de nuestra época en geometría algebraica, el ruso I. R. Shafarevitch (|2|,|13|): " No se concibe la idea de que tan misteriosa, maravillosa y desconcertante actividad de los humanos, una actividad persistentemente proseguida durante milenios, pueda ser mero azar y no deba tener finalidad ". Y al interrogarse, desconcertado, cuál podría ser esta actividad, dicho matemático advierte que " cualquier actividad, desprovista de objetivo, pierde su sentido precisamente por esa causa ".

No habiendo forma de imaginar cómo la matemática puede seguir desarrollándose por siempre, sin conocer lo que estudia y porqué, Shafarevitch tras reconocer que " el propósito de la ciencia matemática no se justifica en modo alguno por sus aplicaciones ", acaba afirmando que " no es posible derivarlo de una actividad inferior a ella, sino desde esferas superiores a la propia actividad humana, como la de la religión ". Y en su conclusión, el matemático ruso expresa la esperanza de que la matemática sirva como modelo para la resolución del problema fundamental de nuestro tiempo: la revelación de una meta religiosa suprema para la actividad cultural humana.

Hemos llegado al final de nuestra exposición, y al hacer un repaso de lo que llevamos dicho, no quedamos seguros de que los comentarios efectuados hayan permitido al lector asimilar mejor ciertas situaciones o aclarado, al menos, determinados extremos sobre la aún controvertida división entre las matemáticas pura y aplicada. ¿ Estamos ahora en mejores condiciones de comprenderla ? ¿ existe separación *real* entre la matemática pura y la matemática aplicada ? ¿ o quizás sea sólo una mera cuestión de abuso de terminología ? (*).

Sólo nos resta decir que a la hora de meditar sobre esta dicotomía pura-aplicada de la matemática, y más en general, sobre cualquier forma de sondeo entre lo abstracto y lo concreto, merece la pena tener presente los siguientes párrafos de J. Kuntzmann|9|: " El estado normal de una ciencia puede compararse con una pirámide cuya amplia base representa las aplicaciones o los aspectos concretos, y cuya cúspide representa los aspectos abstractos. Sería lamentable que la pirámide se invirtiese ".

(*) Debe decirse que en la actualidad no son pocos los matemáticos que rehuyen el empleo de dichos términos, afirmando algunos que no se trata de matemáticas "puras y aplicadas", sino de matemáticas "útiles e interesantes"; otros, de matemáticas "utilitarias y desinteresadas", amén de muchas más.

BIBLIOGRAFIA

|1| BRUTER, C. P., Sur la nature des mathématiques, Gauthier-Villars, París (1973).

|2| DAVIS, P. J. y HERSH, The Mathematical Experience, Birkhäuser, Boston (1982).

|3| GONSETH, F., Les Mathématiques et la réalité, Lib. Albert Blanchard, París (1974).

|4| HARDY, G. H., A mathematician's Apology, Cambridge University Press (1940 y 1967).

|5| HAYEK, N., Los orígenes de la matemática moderna, Servicio Publicaciones, Universidad de La Laguna (1979).

|6| KLINE, M., Mathematics for Liberal Arts, Addison-Wesley (1967).

|7| KLINE, M., Mathematics in the modern world, Edit. W.H. Freeman, San Francisco y London (1968).

|8| KNEEBONE, G. T., Mathematical logic and the foundations of mathematics, D. Van Nostrand (1963).

|9| KUNTZMANN, J., Où vont les mathématiques, Hermann, París(1967).

|10| LE LIONNAIS, F., Las grandes corrientes del pensamiento matemático, Ed. Un. Buenos Aires (1962).

|11| NEWMAN, J. R., El mundo de las matemáticas, SIGMA, t. 5, Ed. Grijalbo, Barcelona-México (1969).

|12| RAYMOND, P., La historia y las ciencias, Anagrama, Barc.(1976).

|13| SHAFAREVITCH, I.R., On certain tendencies in the development of Mathematics, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 3, 182-4(1981).

|14| STEEN, L. A. (ed.), Mathematics Today, Springer-Verlag, N. York (1978).

|15| STEEN, L. A. (ed.), Mathematics Tomorrow, Springer-Verlag, N. York-Heidelberg-Berlin (1981).