Rev.Acad.Canar.Cienc., III (Núm. 1),127-166 (1991)

DESIGUALDADES DE TIPO ISOPERIMETRICO PARA PROBLEMAS DE PLATEAU Y CAPILARIDAD (*)

por

Jesus Ildefonso DIAZ
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid, ESPAÑA
(Proyecto PB86-0485 de la CICYT)

(*) Este trabajo obtuvo el Premio de la Academia Canaria de Ciencias (Concurso del año 1989) correspondiente a trabajos de investigación básica o aplicada en Ciencias Matemáticas.

1. Introducción. En este trabajo se considera una amplia clase de problemas cuasilineales elípticos de la forma

$$-\mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u) + \beta(u)=f(x) \quad \text{en} \quad \Omega, \tag{1.1}$$

con condiciones de contorno de tipo Dirichlet

$$u=h \quad \text{en } \partial\Omega \tag{1.2}$$

o bien de tipo Neumann

$$Q(|\nabla u|)\nabla u.n=g \quad \text{en } \partial\Omega \tag{1.3}$$

Antes de explicitar con detalle las hipótesis estructurales sobre Q y β conviene señalar que dos elecciones de Q de especial interés son las que corresponden a las elecciones

$$Q(r)=1/\sqrt{1+r^2}\ . \tag{1.4}$$

y

$$Q(r)=|r|^{p-2} \quad , \ p>1 \tag{1.5}$$

Un tratamiento monográfico de los problemas (1.1), (1.2) y (1.1), (1.3) con Q dada por (1.5) fué el objeto del libro D[2]. Problemas de esta naturaleza aparecen en numerosos contextos: reacciones químicas en partículas catalíticas, fluidos no-Newtonianos, conducción estacionaria no lineal del calor, etc (veanse referencias en la obra antes citada). Es importante resaltar que la elección de Q correspondiente a (1.5) incluye como caso particular (p=2) a la ecuación semilineal.

$$-\Delta u + \beta(u)=f \quad \text{en } \Omega \tag{1.6}$$

Problemas con Q dada por (1.4) son de gran interés en Geometria Diferencial y en la Estática de Medios Contínuos. Así por ejemplo, si u es la representación no paramétrica de una superfície definida sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^N$, es bien conocido que la curvatura media de la superficie representada por u viene dada por

$$NH = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$$

La ecuación (1.1) impone a esa superfície una curvatura media H tal que $H(x):=\beta(u(x))-f(x)$. (vease, por ejemplo, GT[1] Capítulo 16). En Mecánica de Medios Continuos tal operador diferencial aparece en fenómenos en los que interviene la tensión superficial pues esta se expresa en términos de la curvatura media de la superfície (ver, por ejemplo, F[1].). El <u>Problema de Plateau</u> se refiere al estudio de (1.1) con condiciones de Dirichlet (1.2). Corresponde, por ejemplo, a una membrana elástica sometida a un campo de diferencia de presiones dado por H(x) y sujeta en su borde a un soporte fijo. El Problema de la Capilaridad aparece en el estudio de la superficie de separación entre un líquido y el aire (o más en general entre dos fluidos) cuando se supone el líquido en reposo estático sobre una vasija (que aquí suponemos cilíndrica de sección Ω). Sobre las paredes de la vasija es natural suponer una "condición de contacto" entre los dos fluidos y el material sólido, lo que se expresa en términos de la condición de contorno (1.3) (vease p.e. F[1]). Ambos problemas han sido objeto de consideración por prestigiosos autores desde finales del siglo pasado.

Señalemos también el carácter no lineal del operador de segundo orden $\mathrm{div}(\nabla u/\sqrt{1+|\nabla u|^2})$. Con frecuecia algunos autores le linealizan suponiendo que $|\nabla u|$ varía en un rango muy pequeño en torno a cero, en cuyo caso la ecuación (1.1) "se aproxima" a la ecuación semilineal (1.6).

Problemas de gran interés aparecen cuando la función u genera una frontera libre definida por

$\mathcal{F}=\partial N\cap\partial P$ siendo $N=\{x\in\Omega: u(x)=0\}$, $P=\{x\in\bar{\Omega}: u(x)>0\}$.

(supuesto que $u\geq 0$). La zona N representa la región de Ω en la que la membrana toca el suelo, o bien la parte de la base de la vasija que queda seca (si por ejemplo el volúmen de fluido es muy pequeño en comparación con la sección de la vasija).

El objetivo primordial de este trabajo es mostrar ciertas desigualdades de "tipo isoperimétrico" asociadas a las soluciones (1.1),(1.2) y (1.1),(1.3). Así como las bolas euclideas de $\mathbb{R}^N$ tienen la propiedad (isoperimétrica) de poseer superficie mínima entre todos los dominios de $\mathbb{R}^N$ con volúmen fijado, las soluciones v de (1.1) planteadas sobre una bola Ω^* centrada en el orígen y de volúmen $|\Omega^*|=|\Omega|$ tienen también propiedades extremales en el conjunto de soluciones de (1.1) sobre dominios Ω con volúmen prefijado. Estas propiedades son de gran utilidad para obtener acotaciones "a priori" de las normas $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ de las soluciones de (1.1). También permiten obtener estimaciones sobre la medida del conjunto nulo N(u) e incluso criterios muy generales sobre su no existencia; es decir, sobre la positividad estricta de la solución.

La obtención de las citadas propiedades es llevada a cabo por medio de las nociones de reordenamientos decrecientes (escalar y simétrico) $\tilde{u}$ y u^* de una función $u\in L^1(\Omega)$ introducidas ya por Hardy, Littelwood y Polya en los años veinte. En nuestro trabajo nos beneficiaremos de una buena parte de desigualdades técnicas establecidas previamente por G. Talenti T[1] (vease también el pionero trabajo de C. Maderna y S. Salsa MS[1] para condiciones de tipo Neumann).

Los resultados que aquí se presentan contienen aportaciones de distinto género. En lo que concierne al problema de Plateau se extienden los resultados de D[1], relativos a Q dado por (1.5), al caso de ecuaciones cuasilineales generales (1.1) incluyendo, en particular, la elección de Q definida en (1.4). También se extienden los resultados de BM[1] y MS[3] para problemas de obstáculo a operadores generales del tipo (1.1). Señalemos, por ejemplo, que aquí se darán estimaciones sobre

$$\| [k_1 - k_2]_+ \|_{L^\infty(0, |\Omega|)}$$

siendo $\varphi_+ = \max(0, \varphi)$,

$$k_1(s) = \int_0^s \beta(\tilde{u}(\sigma))d\sigma \quad y \quad k_2(s) = \int_0^s \beta(\tilde{v}(\sigma))d\sigma \; .$$

Tales estimaciones no parecen ser conocidas en el contexto de problemas elípticos (un resultado de esta naturaleza es también reciente en la teoría de ecuaciones parabólicas no lineales D[5]). En particular bajo adecuadas hipótesis se concluye la "comparación en masa" de $\beta(u)$ y $\beta(v)$, lo que conduce a un buen número de estimaciones sobre $\|\beta(u)\|_{L^p}$ y N(u). Por último, señalemos que en lo que concierne al problema de tipo capilaridad (esto es, con condiciones de contorno de tipo Neumann) los resultados que se presentan aquí parecen nuevos en la literatura incluso para el caso "sencillo" de la ecuación semilineal (1.6). El plan del resto del artículo es el siguiente:

2. Hipótesis estructurales, nociones de solución y otros comentarios preliminares.
3. Desigualdades isoperimétricas para el problema de Plateau.
    3.1. Caso de β univoco.
    3.2. Caso de β multivoco: comparación con el problema de obstaculo inferior.
    3.3. El problema de obstáculo superior.
4. Desigualdades isoperimétricas para el problema de capilaridad.
5. Bibliografía.

2. Hipótesis estructurales, nociones de solución y otros comentarios preliminares.

En lo que sigue supondremos Ω abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ de frontera regular y Q de clase $C^2((0,\infty))$ tal que

$$Q(r)r \to 0 \quad \text{si} \quad r \to 0 \tag{2.1}$$

$$Q(r)r^2 \quad \text{es convexa y estrictamente creciente.} \tag{2.2}$$

Con respecto a β supondremos

$$r \mapsto \beta(r) \quad \text{es un grafo maximal monótono de } \mathbb{R}^2 \tag{2.3}$$

$$0 \in \beta(0) \tag{2.4}$$

Observación 1.

La hipótesis (2.3) incluye, en particular, el caso de β función contínua creciente. Por simplicidad en la notación mantendremos el símbolo de igualdad en (1.1) para el caso de β multivoco si bien para mayor precisión habría que reemplazarle por el de pertenencia. □

Nos ocuparemos en este trabajo de <u>soluciones</u> <u>débiles</u> de (1.1), (1.2) o (1.1), (1.3); es decir, satisfaciendo

$$\int_\Omega Q(|\nabla u|)\nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega \beta(u)v dx = \int_\Omega f v dx \tag{2.5}$$

ó

$$\int_\Omega Q(|\nabla u|)\nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega \beta(u)v dx = \int_\Omega f v dx - \int_{\partial\Omega} g v H_{N-1}(dx) \tag{2.6}$$

respectivamente para toda función test $v \in C^1(\Omega)$ ($v=0$ en $\partial\Omega$ en el caso de (2.5)).

Por razones que explicitaremos más tarde (véase Observacion 5) trabajaremos con soluciones en espacios de Orlicz-Sobolev. Estos espacios están asociados a una función peso que aquí es dada por

$$A(r) := Q(r)r^2. \tag{2.7}$$

Se define, en primer lugar, el espacio de Orlicz

$$L^A(\Omega) = \left\{ f \text{ medible}: \exists\lambda\in R, \int_\Omega A(|f(x)/\lambda|)dx<\infty \right\}.$$

L^A es un espacio vectorial gracias a (2.1) y (2.2) y además es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_A = \inf\left\{ \lambda>0: \int_\Omega A(|f(x)/\lambda|)dx \le 1 \right\}.$$

Finalmente se define el espacio de Orlicz-Sobolev $W^{1,A}(\Omega)$ por

$$W^{1,A}(\Omega) = \left\{ f\in L^A(\Omega) : \nabla f \in (L^A(\Omega))^N \right\} \tag{2.8}$$

donde las derivadas has de entenderse en sentido de distribuciones. De nuevo $W^{1,A}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{1,A} = \|f\|_A + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial f}{\partial x_i}\|_A .$$

Como es habitual, se denota por $W_0^{1,A}(\Omega)$ a la complección de $C_0^1(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_{1,A}$. (Véase Ad[1]).

Antes de precisar la noción de solución débil que emplearemos indiquemos que por simplicidad nos limitaremos al caso de condiciones de contorno constante

$$g(x)\equiv g \quad , \quad h(x)\equiv h\geq 0 \tag{2.9}$$

Definición 1. *Diremos que* u *es solución débil de (1.1),(1.2) [resp. (1.1),(1.3)] si* $u-h\in W_0^{1,A}(\Omega)$, $\beta(u)\in L^1(\Omega)$, *y (2.5) tiene lugar para todo* $v\in W_0^{1,A}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ *[resp.* $u\in W_0^{1,A}(\Omega)$, $\beta(u)\in L^1(\Omega)$, *y (2.6) tiene lugar para todo* $v\in W^{1,A}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$*].* □

Observación 2.

Las integrales interviniendo en (2.5) y (2.6) cobran perfecto sentido en las condiciones anteriores por medio de las desigualdades de Young y de Cauchy-Schwartz (Vease T[1]p 164). Nótese también que si Q viene dado por (1.5) entonces $W^{1,A}(\Omega)=W^{1,P}(\Omega)$ (espacio de Sobolev sobre $L^P(\Omega)$). Para Q como en (1.4) se tiene que $W_0^{1,A}(\Omega)=W_0^{1,1}(\Omega)$ (vease T[1] p 181). □

Observación 3.

Cuando β es un grafo multivoco la noción de solución débil de (1.1), (1.2) debe modificarse en el sentido siguiente: existe $b\in L^1(\Omega)$ con $b(x)\in\beta(u(x))$ cpt $x\in\Omega$ tal que

$$\int_\Omega Q(|\nabla u|)\nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega bv dx = \int_\Omega fv dx \tag{2.10}$$

$\forall v\in W_0^{1,A}(\Omega)$. De manera análoga se procede para el problema (1.1)(1.3). □

Es importante señalar que en este trabajo no se desarrolla ninguna investigación sobre la existencia o unicidad de soluciones débiles de (1.1). Por el contrario, supondremos en todo momento que tales soluciones existen y son únicas. Se tratará pues de resultados obtenidos "a priori" de la teoría de la existencia.

A modo de observación señalemos que resultados de existencia de soluciones débiles según han sido aquí introducidas pueden encontrarse en Vi[1], Do[1], Go[1], LMu[1],[2] y Vu[1]. Para el caso Q dada por (1.4) existe una abundante literatura sobre la teoría de existencia de soluciones variacionales (vease, por ejemplo, Ge[2], Gi[1] y F[1] y la bibliografía de esos trabajos). El caso de β multivoco es tratado en Has[1], Brk[1] y Ge[1] entre otros. Un tratamiento unificado de la ecuación (1.1) conteniendo en sus hipótesis los casos (1.4) y (1.5) fue presentado en DST[1]. Por último recordaremos aquí que la obtención de soluciones con gradiente acotado $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ requiere necesariamente hipótesis sobre la curvatura de $\partial\Omega$ (vease por ejemplo DST[1] y su bibliografía).

3.- Desigualdades isoperimétricas para el Problema de Plateau.

En esta sección utilizaremos técnicas de reordenamiento simétrico para obtener un criterio de comparación en masa para el Problema de Plateau. Veremos que el tipo de resultados es de distinta naturaleza según que $\beta(u)$ sea unívoco o multívoco. Comenzaremos por recordar algunas definiciones de interés:

Definición 2. *Sea* $u:\Omega\to\mathbb{R}$ *medible, llamaremos* *<u>función de distribución</u>* *de* u *a la función* μ *dada por*

$$\mu(t)=|\{u>t\}| \text{ , donde } |G|=\text{medida de } G, \text{ y } \{u>t\}=\{x\in\Omega: u(x)>t\}.$$

Llamaremos *<u>reordenamiento decreciente de u</u>* *a la función* $\tilde{u}:(0,|\Omega|]\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$\tilde{u}(s)=\inf\{t\in\mathbb{R}: \mu(t)\le s\}.$$

Finalmente, llamaremos *<u>reordenamiento simétrico</u>* *de* u *a la función* $u^*:\Omega^*\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$u^*(x)=\tilde{u}(\omega_N|x|^N)$$

donde ω_N *es el volúmen de la bola unidad en* $\mathbb{R}^N$ *y* Ω^* *representa la bola centrada en el orígen y de volúmen* $|\Omega|$.

Algunas monografías ocupándose de un tratamiento exhaustivo de esas nociones y diversas aplicaciones en Física-Matemática son HLP[2], Pos[1], B[2], Mo[2] y Ka[1]. Nuestro objetivo será obtener estimaciones sobre u^* cuando u es solución de (1.1), (1.2) o (1.3). En particular obtendremos ciertos resultados de comparación aunque en general la comparación no será puntual. Un criterio alternativo es el siguiente:

Definición 3. *Sean* $v\in L^1(\Omega)$ y $w\in L^1(\Omega^*)$. *Diremos que* v *es más concentrado en masa que* w *(y lo denotaremos por* $v\underset{\sim}{\prec}w$*) si*

$$\int_0^t \tilde{v}(s)ds\le\int_0^t \tilde{w}(s)ds \qquad \forall t\in[0,|\Omega|] \text{ ,}$$

o, equivalentemente, si

$$\int_{B_r(0)} v^*(x)dx\le\int_{B_r(0)} w^*(x)dx \qquad \forall r\in[0,R] \text{ con } \Omega^*=B_R(0) \text{ ,}$$

siendo $\tilde{v},\tilde{w}$ *(resp.* v^*,w^**) los reordenamientos decrecientes (resp. simétricos) de* v *y* w.

Observación 4.

Al parecer comparaciones de esta naturaleza fueron ya introducidas por Hardy-Littelwood-polya en HLP[1]. Reciéntemente esta noción ha sido fructiferamente utilizada para el tratamiento de problemas de evolución por Vázquez (V[1]).

3.1. Caso de β univoco.

Supongamos que β es una función contínua monótona no decreciente con $\beta(0)=0$. Comencemos por el caso de condiciones nulas en el borde

Teorema 1. *Sean* $\Omega_1=\Omega, \Omega_2=\Omega^*$, $f_i \in L^1(\Omega_i)$ *con* $f_i \geq 0$ *y sea* $u_i \in W_0^{1,A}(\Omega_i)$ *solucion débil (no negativa) de (1.1) correspondiente a* $f=f_i$, $i=1,2$. *Definamos*

$$k_i(s)=\int_0^s \beta(\tilde{u}_i(\sigma))d\sigma \quad , \quad F_i(s)=\int_0^s \tilde{f}_i(\sigma)d\sigma \tag{3.1}$$

Introduzcamos la función auxiliar

$$B(r)=Q(r)r \ \ (=A(r)/r). \tag{3.2}$$

Supongamos que, o bien

$$\lim_{r\to\infty} B(r)=+\infty, \tag{3.3}$$

o bien

$$\max\left\{\|f_1\|_{L^N(\Omega)}, \|f_2\|_{L^N(\Omega^*)}\right\} \leq \left(\lim_{r\to\infty} B(r)\right)N\omega_N^{1/N} \ . \tag{3.4}$$

Por último, sea f_2 *simétrica y decreciente e.d.*

$$f_2^*=f_2 \tag{3.5}$$

Entonces se tiene la estimación

$$\|[k_1-k_2]_+\|_{L^\infty((0,|\Omega|))} \leq \|[F_1-F_2]_+\|_{L^\infty((0,|\Omega|))}. \tag{3.6}$$

siendo $[\varphi]_+=\max(o,\varphi)$. *En particular*

$$f_1 \precsim f_2 \text{ implica que } \beta(u_1)\precsim\beta(u_2). \tag{3.7}$$

Antes de pasar a la demostración del Teorema 1 señalemos algunas consecuencias relevantes.

Corolario 1. *Bajo las hipótesis del Teorema 1, si* $f_1 \precsim f_2$ *entonces para toda función convexa no decreciente* ϕ *se tiene que* .

$$\int_\Omega \phi\Big(\beta(u_1(x))\Big)dx \leq \int \phi\Big(\beta(u_2(x))\Big)dx \tag{3.8}$$

En particular

$$\|\beta(u_1)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\beta(u_2)\|_{L^p(\Omega^*)} \qquad \forall 1\leq p\leq\infty. \tag{3.10}$$

Con respecto a la frontera libre $\mathcal{F}$, o más concretamente al conjunto nulo N(u), se derivan dos consecuencias distintas según la homogeneidad de la condición de contorno o no:

Corolario 2. *Sea* $f\in L^1(\Omega)$, $f\geq 0$. *Sea* β *estrictamente creciente. Sea* $u\in W_0^{1,A}(\Omega)$ *solución débil de (1.1). Consideremos* $v\in W_0^{1,A}(\Omega^*)$ *verificando*

$$-\text{div}\ (Q(|\nabla v|)\nabla v) + \beta(v) = f^* \quad \text{en } \Omega^* \tag{3.11}$$

Supongamos también que, o bien se cumple (3.3), o bien

$$\|f\|_{L^N(\Omega)} \leq \Big(\lim B(r)\Big)N\omega_N^{1/N} \tag{3.12}$$

Entonces si $S(v)\subset\Omega$ *se tiene que*

$$|N(u)| \leq |N(v)|. \tag{3.13}$$

Corolario 3. *Sea* β *estrictamente creciente y sean* $f\equiv 0$, $h(x)\equiv h>0$ *tal que, o bien se cumple (3.3), o bien*

$$\beta(h)|\Omega|^{1/N} \leq (\lim_{r\to\infty} B(r))N\omega_N^{1/N}. \tag{3.14}$$

Sea u *solución débil de (1.1),(1.2) y consideremos* $v\in W^{1,A}(\Omega^*)$ *radial*

$$\left.\begin{array}{ll} -\text{div}(Q(|\nabla v|)\nabla v)+\beta(v)=0 & \text{en } \Omega^* \\ v=h & \text{en } \partial\Omega^* \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

Entonces

$$v>0 \textit{ en } \Omega^* \textit{ implica } u>0 \textit{ en } \Omega. \tag{3.16}$$

Además

$$|N(u)|\leq|N(v)|\cdot \tag{3.17}$$

Pasemos ahora a las demostraciones. La del Teorema 1 requiere una cadena de Lemas técnicos previos. Por no alargar la exposición su demostración es sólo esbozada de manera sucinta.

Lema 1. *En las hipótesis del Teorema 1 y si* $u\in W_0^{1,A}(\Omega)$ *es una solución no negativa de (1.1) entonces la función decreciente*

$$t \longmapsto \int_{\{u>t\}} Q(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx$$

es Lipschitz continua y se tiene la desigualdad

$$0 \le -\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}} Q(|\nabla u|)|\nabla u|^2dx \le \int_0^{\mu(t)} \tilde{f}(s)ds-\int_0^{\mu(t)} \beta(\tilde{u}(s))ds \qquad (3.18)$$

cpt $t>0$, *siendo* $\mu(t)$ *la función de distribución de* u.

Demostración. El resultado es una variante del Lemma 1 de T[1] donde (3.18) es establecida para $u\in W_0^{1,A}(\Omega)$ pero sin el término $\int_0^{\mu(t)}\beta(u(s))ds$. Para hacer intervenir tal expresión basta utilizar la monotonía de β y

$$\int_{\{u>t\}}\beta(u) = \int_t^{+\infty}\beta(t)(-d\mu(t)) = \int_0^{\mu(t)}\beta(\tilde{u}(s))ds$$

(veanse detalles en D[2] Lemma 1.29 para soluciones $u\in W_0^{1,P}(\Omega)$). □

Lema 2. *(T[1]). Sea* $z\in W_0^{1,A}(\Omega)$ *no negativa. Entonces si* $\mu(t)$ *es la función de distribución de z se tiene que*

$$1\le-\mu'(t)\left[N\omega_N^{1/N}\mu(t)^{N-1/N}\right]^{-1}B^{-1}\left(-\frac{d}{dt}\int_{\{z>t\}}Q(|\nabla z|)|\nabla z|^2dx/N\omega_N^{1/N}\mu(t)^{(N-1)/N}\right) \quad (3.19)$$

con el convenio de

$$B^{-1}(\sigma)=+\infty \qquad \text{si } \sigma>\lim_{r\to\infty} B(r)\ .$$ □

Lema 3. *Sea* $u_i \in W^{1,A}(\Omega_i)$ *solución de (1.1) con* f_i *como en el Teorema 1. Entonces el reordenamiento decreciente* $\tilde{u}_i$ *de* u_i *es absolutamente contínuo en* $(0,|\Omega|]$ *y satisface*

$$-\frac{d\tilde{u}_i}{ds}(s) \le \frac{1}{\alpha(s)}B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha(s)}\left\{\int_0^s\tilde{f}_i(\theta)\theta-\int_0^s\beta(\tilde{u}_i(\theta))d\theta\right\}\right) \qquad (3.20)$$

siendo

$$\alpha(s) := N\omega_N^{1/N}s^{(N-1)/N}. \qquad (3.21)$$

Demostración. Resulta de adaptar el Lemma 1.31 de D[2]. La idea directriz es utilizar que B^{-1} es no decreciente (por (2.2)) y enlazar (3.18) y (3.19) para obtener

$$1 \le \frac{-\mu'(t)}{\alpha(\mu(t))}B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha(\mu(t))}\left\{\int_0^{\mu(t)}\tilde{f}_i(\theta)d\theta-\int_0^{\mu(t)}\beta(\tilde{u}_i(\theta))d\theta\right\}\right) \qquad (3.22)$$

(Una aplicación de la desigualdad de Holder permite ver que B^{-1} puede ser aplicado gracias a la hipótesis (3.4)). Finalmente (3.20) resulta de (3.22) por integración entre $t_1=\tilde{u}_i(s_1)-\varepsilon$ y $t_2=\tilde{u}_i(s_2)$ con $\varepsilon>0$ arbitrariamente pequeño y $0<s_1\le s_2\le|\Omega|$ tales que $\tilde{u}_i(s_2)<\tilde{u}_i(s_1)$. □

Lema 4. *Sea* $f_2=f_2^*$ *e.d.* f_2 *es radialmente simétrica y decreciente a lo largo de los radios. Sea* $u_2\in W_0^{1,A}(\Omega^*)$ *solución débil de (1.1),. Entonces* $u_2=u_2^*$ *y se verifica*

$$-\frac{d\tilde{u}_2}{ds}(s)=\frac{1}{\alpha(s)}B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha(s)}\left\{\int_0^s\tilde{f}_2(\theta)d\theta-\int_0^s\beta(\tilde{u}_2(\theta))d\theta\right\}\right)\ \textit{en}\ (0,|\Omega|)\qquad(3.23)$$

Demostración. Basta utilizar la unicidad de soluciones junto a cálculos rutinarios para expresar la ecuación (1.1) aplicada a una función $u(x)=\tilde{u}(s)$ con $s=\omega_N r^N$, $r=|x|$ en términos de una ecuación diferencial ordinaria para $\tilde{u}(s)$ (vease p.e. D[2] lemma 1.32). □

Demostración del Teorema 1. De la definición de $k_1(s)$ y de las relaciones (3.17),(3.18) deducimos que

$$\frac{dk_1}{ds}(s)=\beta(\tilde{u}_1(s)).$$

Así, k_1 verifica los siguientes problemas de segundo orden

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(s)B\left(-\alpha(s)\frac{d}{ds}\,\gamma\left(\frac{dk_1}{ds}(s)\right)\right)+k_1(s)\le F_1(s)\qquad\text{en }(0,|\Omega|)\\&k_1(0)=0\ ,\ k_1'(|\Omega|)=0\end{aligned}\right\}\qquad(3.24)$$

con γ el grafo maximal monótono dado por

$$\gamma=\beta^{-1},\qquad(3.25)$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(s)B\left(-\alpha(s)\frac{d}{ds}\,\gamma\left(\frac{dk_2(s)}{ds}\right)\right)+k_2(s)=F_2(s)\qquad\text{en }(0,|\Omega|)\\&k_2(0)=0\ ,\ k_2'(|\Omega|)=0\ .\end{aligned}\right\}\qquad(3.26)$$

Como $k_1\in C([0,|\Omega|])$, podemos suponer que existe $s_0\in[0,|\Omega|]$ tal que

$$\|[k_1-k_2]_+\|_{L^\infty((0,|\Omega|))}=(k_1-k_2)(s_0)>\|[F_1-F_2]_+\|_{L^\infty((0,|\Omega|))}$$

pues en otro caso no hay nada que demostrar. Es claro que $s_0>0$. Si $s_0<|\Omega|$ definimos $z:=k_1-k_2\in W^{2,\infty}(s_0-\varepsilon,s_0+\varepsilon)$. Supongamos por el momento que $\gamma\in C^1$ y que γ es estrictamente creciente. Entonces

$$\gamma(k_1'(s))-\gamma(k_2'(s))=z'(s)c(s)\qquad(3.27)$$

con

$$c(s)=\int_0^1\gamma'(\tau k_1'(s)+(1-\tau)k_2'(s))d\tau>0.$$

Por otra parte, introduciendo

$$d(s)=\int_0^1 B'\left[-\alpha(s)\left\{\tau\frac{d}{ds}\gamma(\frac{dk_1}{ds}(s))+1-\tau)\frac{d}{ds}\ \gamma(\frac{dk_2}{ds}(s))\right]d\tau\quad (\geq 0 \text{ pues } B \text{ es creciente})$$

se tiene

$$\alpha(s)\left[B\left(-\alpha(s)\frac{d}{ds}\ \gamma(\frac{dk_1(s)}{ds})\right)-B\left(-\alpha(s)\frac{d}{ds}\ \gamma(\frac{dk_2(s)}{ds})\right)\right]=-\alpha(s)^2 d(s)\frac{d}{ds}\left(c(s)\frac{d}{ds}z(s)\right)<0$$

sobre $(s_0-\varepsilon,\ s_0+\varepsilon)$, pues

$$F_1(s)-F_2(s)-k_1(s)-k_2(s)\leq\|[F_1-F_2]_+\|_\infty-(k_1-k_2)(s)<0 \quad \text{en } (s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon).$$

En consecuencia

$$-\frac{d}{ds}\left(c(s)\frac{dz}{ds}(s)\right)<0 \qquad \text{en } (s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon). \qquad (3.28)$$

Lo que contradice que z alcance su máximo en el punto interior s_0. Para el caso de γ maximal monótono no necesariamente de clase C^1 la expresión (3.27) toma sentido con $c(s)\geq 0$, aproximando γ por γ_λ, aproximación Yosida de γ (véase, por ejemplo el Lema 4 de DM[1][2]). Finalmente si $s_0=|\Omega|$, (3.28) tiene lugar en $(|\Omega|-\varepsilon, |\Omega|)$, lo que implica que $z'(|\Omega|)>0$ y contradice las condiciones de contorno. Por tanto, un tal s_0 no puede existir y (3.5) queda demostrado.

La propiedad (3.7) es ahora obvia dado que $f_1 \precsim f_2$ implica que $[F_1-F_2]_+\equiv 0$ y entonces $\forall s\in[0, |\Omega|]$

$$k_1(s)-k_2(s)\leq\|[k_1-k_2]_+\|=0\ . \quad \square$$

Observación 5.

La conclusión del Teorema 1 es válida para el caso más general en que u_1 es solución débil de la ecuación

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\ a_i(x,u,\nabla u)+\beta(x,u)=f(x) \qquad \text{en } \Omega \qquad (3.28')$$

donde a_i son funciones medibles tales que

$$-\sum_{i=1}^{N} a_i(x,u,\xi_i)\xi_i\geq Q(|\xi|)|\xi|^2 \qquad \forall(x,u,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N. \qquad (3.28'')$$

(la demostración sólo requiere una fácil modificación del Lema 1). De hecho un argumento de este estilo permite ver con claridad la necesidad de trabajar en el espacio de Orlicz-Sobolev $W^{1,A}(\Omega)$.

En efecto, una hipótesis del tipo "$\forall$ compacto $M\subset\mathbb{R}^N$ existe $C=C(M)$ tal que $Q(|\xi|)|\xi|^2 \geq C(M)|\xi|^p$ $\forall\xi\in M$ y para algún m>1" permitiría obtener la comparación en masa del Teorema 1 entre $u_1\in W^{1,\infty}(\Omega)$ solución de (1.1), (1.2) y $u_2\in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ satisfaciendo

$$-C\ \mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)+\beta(x,v)=f_2 \qquad \text{en } \Omega^*.$$

En ese caso, el espacio de trabajo sería el espacio de Sobolev usual $W_0^{1,p}(\Omega)$ pero a cambio la naturaleza del problema simetrizado sería distinta. □

Observación 6.

La estimación en L^∞ dada por (3.6) y su demostración parecen nuevas en la literatura. Resultados inspirados en la misma filosofía aunque relativos a problemas parabólicos pueden encontrarse en DM[1], [2] y D[5]. La relación (3.6) expresa que el operador $A: D(A)\to L^\infty((o,|\Omega|))$ dado por

$$\left.\begin{array}{l} D(A)=\{v\in W^{2,\infty}((o,|\Omega|)): v(o)=o\ , v'(|\Omega|)=o\} \\ Av=\alpha(s)B\left(-\alpha(s)\dfrac{d}{ds}\ \gamma(\dfrac{dv}{ds})\right) \end{array}\right\} \tag{3.29}$$

es T-acretivo (T-accretive en inglés, T-accretif en francés) en el espacio $L^\infty((0,|\Omega|))$. La consecuencia (3.7) ha sido mostrada por diversos autores en casos particulares con respecto a las hipótesis del Teorema 1 (vease p.e. Ch[1] y Li[1] para el caso de ecuaciones lineales y M[1], V[1], Mo[1] y D[2][3] para ciertas ecuaciones no lineales. En todos ellos el argumento para concluir la comparación (3.7) es distinto al aquí introducido. □

Observación 7.

La comparación puntual

$$u_1^*(x)\le u_2(x) \qquad \text{en } \Omega^* \tag{3.30}$$

es bien conocida (vease T[1], AlTr[1]) cuando $u_2\in W_0^{1,A}(\Omega)$ se toma como la solución de la ecuación no perturbada

$$-\mathrm{div}(Q(|\nabla v|)\nabla v) = f_2 \qquad \text{en } \Omega^* \tag{3.31}$$

y por tanto de naturaleza distinta a (1.1). □

Observación 8.

Es fácil comprobar que para Q dada para (1.5) se tiene $\lim_{r\to\infty} B(r)=+\infty$ y así el Teorema 1 es válido sin restricción alguna sobre f_1. Por el contrario, para Q dada por (1.4) se tiene que $\lim_{r\to\infty} B(r)=1$ y la condición (3.4) es requerida sobre f_1. Tal condición es necesaria para la existencia de u_2 en el caso de $\beta\equiv 0$ (Ta[1]). □

Los Corolarios 1,2 y 3 resultan de la aplicación del siguiente

Lema 5. *Sean* $y,z:[0,M]\longrightarrow(-\infty,+\infty)$ *continuas con* $y(s)$ *no creciente y tales que*

$$\int_0^t y(s)ds\le\int_0^t z(s)ds \qquad \forall t\in[0,M]. \tag{3.32}$$

Sea $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *continua y convexa con*

$$\tau_0=\min\{\tau\in(-\infty,\infty):\phi'(\tau)\ge0\} \tag{3.33}$$

Entonces

$$\int_0^t \phi(y(s))ds\le\int_0^t \phi(z(s))ds \qquad \forall t\in[0,t_0]. \tag{3.34}$$

siendo

$$t_0=\max\{t\in[0,M]:y(t)\ge\tau_0\} \tag{3.35}$$

Demostración. Basta suponer $\phi\in C^2(\mathbb{R})$ e $y\in C^1((0,M))$ pues en otro caso se regularizan ϕ e y pasando al límite en la conclusión. Por ser ϕ convexa se tiene que

$$\phi(a)-\phi(b)\ge\phi'(b)(a-b) \quad \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

y además como $\phi'(\tau)$ es creciente $\phi'(\tau)\ge0$ $\forall t\ge\tau_0$. Sea entonces $t\ge t_0$. Se tiene que

$$\int_0^t \phi(y(s))-\int_0^t \phi(z(s))ds \le \int_0^t \phi'(y(s))(y(s)-z(s))ds =$$

$$\phi'(y(t))\int_0^t (y(s)-z(s))ds - \int_0^t\{\phi''(y(s))y'(s)\int_0^t (y(\sigma)-z(\sigma))d\sigma\}ds$$

pero como y es (monótona) no creciente, $t\le t_0$ implica $y(t)\ge y(t_0)\ge\tau_0$ y por tanto $\phi'(y(t))\ge0$. La conclusión se deduce ahora de la hipótesis (3.32). □

Observación 9.

El lema 5 en el caso particular de ϕ creciente (e.d. $\tau_0=0$ y entonces $t_0=M$) se suele atribuir a HLP[1] (veanse una demostración en B[2]). □

Demostración del Corolario 1. Por el Teorema 1 sabemos que $\beta(u_1)\precsim\beta(u_2)$ por lo que basta aplicar el lema 5 a $y(t)=\beta(\tilde{u}_1(t))$, $Z(t)=\beta(\tilde{u}_2(t))$. La estimación (3.10) se obtiene tomando $\phi(t)=t^p$ $p>1$ y utilizando la equiintegrabilidad de $\varphi(\tilde{u}_1)$ y $\varphi(u_1)$ para cualquier función monótona φ. Por último (3.9) se obtiene haciendo $p\to+\infty$. □

Observación 10.

Nótese que si β es estrictamente creciente entonces (3.9) implica que $\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u_2\|_{L^\infty(\Omega^*)}$. Dada la simetría radial de u_2 no es difícil obtener estimaciones explícitas de $\|u_2\|_{L^\infty(\Omega^*)}$ en términos de adecuadas normas $\|f_2\|_{L^q(\Omega^*)}$ con $q \le p$. Esto es de especial interés cuando se toma $f_2 = f_1^*$ pues en esta forma se muestran "efectos regularizantes" (vease p.e. T[1]. Mo[1], AlTr[1], etc). $\square$

<u>Demostración del Corolario 2.</u> La conclusión será consecuencia del estudio de la cantidad $R_u = |\{u>0\}| = \mu(o)$. Observemos que

$$\int_0^{R_u} \beta(\tilde{u}(s))ds = \int_{+\infty}^{0} \beta(\tilde{u}(\mu(t)))d\mu(t) = \int_{+\infty}^{0} \beta(t)d\mu(t) \tag{3.36}$$

Supongamos ahora $S(u) \subset \Omega$. Entonces se tiene que $\nabla u.n=0$ en $\partial\Omega$ y $\nabla v.n=0$ en $\partial\Omega^*$. Por tanto, utilizando que $\nabla u.\bar{n} \le 0$ en $\partial\Omega$ se tiene que

$$\int_\Omega \beta(u(x))dx = \int_\Omega f(x)dx + \int_\Omega div(Q(|\nabla u|)\nabla udx$$

$$= \int_\Omega f(x)dx + \int_{\partial\Omega} Q(|\nabla u|)\nabla u.\bar{n}H_{N-1}(dx)$$

$$= \int_\Omega f(x)dx = \int_{\Omega^*} f^*(x)dx = \int_{\Omega^*} \beta(v(x))dx + \int_{\Omega^*} div(Q(|\nabla v|)\nabla v)dx$$

$$\ge \int_{\Omega^*} \beta(v(x))dx.$$

En consecuencia

$$\int_0^{|\Omega|} \beta(\tilde{u}(\sigma))d\sigma = \int_\Omega \beta(u(x))dx \ge \int_{\Omega^*} \beta(v(x))dx = \int_0^{|\Omega|} \beta(\tilde{v}(\sigma))d\sigma.$$

Concluimos entonces que

$$\int_s^{|\Omega|} \beta(\tilde{u}(\sigma))d\sigma = \int_0^{|\Omega|} \beta(\tilde{u}(\sigma))d\sigma - \int_0^{s} \beta(\tilde{u}(\sigma))d\sigma \ge \int_s^{|\Omega|} \beta(\tilde{v}(\sigma))d\sigma.$$

Para todo $s \in [0,|\Omega|]$. Veamos que $|N(u)| \le |N(v)|$ o equivalentemente que $R_u \ge R_v$ donde de nuevo $R_u = |S(u)| = \mu(0)$ y $R_v = |S(v)| = \nu(0)$. por reducción al absurdo. Supongamos $R_u < R_v$. Entonces como $\beta(0)=0$ y $\beta(r)>0$ si $r>0$ se tiene que

$$\int_s^{|\Omega|} \beta(\tilde{u}(\sigma))d\sigma = \int_s^{R_u} \beta(\tilde{u}(\sigma))d\sigma \ge \int_s^{|\Omega|} \beta(\tilde{v}(\sigma))d\sigma = \int_s^{R_v} \beta(\tilde{v}(\sigma))d\sigma. \quad \forall s \subset [0,|\Omega|].$$

Tomando $s=R_u$ se concluye que

$$0\geq\int_{R_u}^{R_v}\beta(\tilde{v}(\sigma))d\sigma$$

lo que contradice que $\beta(\tilde{v})>0$ en $[R_u,R_v)$. □

Demostración del Corolario 3. Basta razonar como en D[2] Theorem 1.28. Recordaremos aquí la idea de la demostración. En primer lugar se homogeneiza la condición de contorno introduciendo $U(x)=h-u(x)$, $V(x)=h-v(x)$. Ahora $U\in W_0^{1,A}(\Omega)$, $V\in W_0^{1,A}(\Omega^*)$ y $0\leq U\leq h$, $0\leq V\leq h$ como se deduce del principio del maximo para u y v. Además se tiene que

$$-\mathrm{div}(Q(|\nabla U|)\nabla U)+\tilde{\beta}(U)=\beta(h)\quad \text{en } \Omega, \tag{3.37}$$

$$-\mathrm{div}(Q(|\nabla V|)\nabla V)+\tilde{\beta}(V)=\beta(h)\quad \text{en } \Omega^* \tag{3.38}$$

con

$$\tilde{\beta}(r):=\beta(h)-\beta(h-r)\qquad \forall r\in\mathbb{R}. \tag{3.39}$$

El Teorema 1 puede ser ahora aplicado con $f_1\equiv\beta(h)$ en Ω, $f_2\equiv\beta(h)$ en Ω^*. de lo que se concluye (3.7) e.d.

$$\int_\Omega\phi(\tilde{\beta}(U(x)))dx\leq\int_{\Omega^*}\phi(\tilde{\beta}(V(x)))dx \tag{3.40}$$

si ϕ es convexa y no decreciente. Supongamos ahora que $v>0$ en Ω^*. Como β es estrictamente creciente $0\leq\tilde{\beta}(V)<\beta(h)$ en Ω^* y así

$$0\leq\|\tilde{\beta}(U)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq\|\tilde{\beta}(V)\|_{L^\infty(\Omega^*)}<\beta(h);$$

es decir,

$$\tilde{\beta}(U)<\beta(h)=\tilde{\beta}(h)\qquad \text{en } \Omega.$$

Como $\tilde{\beta}$ es estrictamente creciente concluimos que $u>0$ en Ω. Para demostrar (3.17) se fija $\varepsilon>0$ y se utiliza (3.40) con $\phi_\varepsilon(r)$ convexa creciente tal que

$$\phi_\varepsilon(r)=0\quad \text{si}\quad 0\leq r\leq\tilde{\beta}(h)-\varepsilon\quad \text{y}\quad \phi_\varepsilon(\tilde{\beta}(h))=1 \tag{3.41}$$

Se concluye pasando al límite en (3.40) cuando $\varepsilon\to 0$. □

Observación 11.

Es interesante contrastar las desigualdades (3.13) y (3.17). En ambos casos se trata de desigualdades "de tipo isoperimétrico". Recordemos que la desigualdad clásica isoperimétrica asegura que si D es una región acotada de $\mathbb{R}^N$ de volúmen A y si ∂D tiene de area L entonces

$$L\geq N\omega_N^{1/N}A^{(N-1)/N} \tag{3.42}$$

y la igualdad se tiene si y sólo si D es una bola. En otras palabras; entre todos los dominios D de volùmen fijado (=A) la bola es el dominio que tiene menor superfície de contorno (perímetro si N=2). □

3.2. Caso de β multivoco: Comparación con el problema de obstáculo inferior.

El Teorema 1 puede ser extendido al caso de β grafo maximal monótono multivoco (recordaremos que el papel de $\beta(u)$ lo juega ahora la función b mencionada en la Observación 3). Supongamos primero $f_1 \geq 0$:

Teorema 2. *Sean* $\Omega_1=\Omega, \Omega_2=\Omega^*$, $f_1 \in L^1(\Omega_1)$ *como en el Teorema 1 y sean* $u_1 \in W_0^{1,A}(\Omega_1)$ *solución débil no negativa de (1.1), correspondiente a* $f=f_1$ *Sea* $b_1 \in L^1(\Omega_1)$, $b_1(x) \in \beta(u_1(x))$ cptx$\in\Omega_1$ *el término realizando la igualdad en (2.10). Definamos* F_1 *como en (3.1) y*

$$k_1(s)=\int_0^s \tilde{b}_1(\sigma)d\sigma \tag{3.43}$$

Entonces se tiene la estimación (3.6). En particular

$$f_1 \underset{\sim}{\angle} f_2 \text{ implica que } b_1 \underset{\sim}{\angle} b_2 \,. \square \tag{3.44}$$

La idea de la demostración consiste en aproximar β por funciones β_λ tales que cuando $\lambda \to 0$ las soluciones correspondientes u_λ verifiquen que $u_\lambda \to u$ y $\beta_\lambda(u_\lambda) \to b$ (véase p.e. D[1] Theorem 2.20 para el caso de Q lineal y DST[1] Teorema 1 para Q verificando la hipótesis (2.11)).

Observación 12.

En el caso del Corolario 3 una hipótesis natural es

$$\beta \text{ es univoco en } r=h \text{ , } \beta_-(o)(:=\inf\{t\in\beta(o)\})=0, \tag{3.46}$$

y β no necesariamente estrictamente creciente. La conclusión (3.16) ahora se debe reemplazar por

$$b_v(x)>0 \text{ en } \Omega^* \text{ implica } b(x)>0 \text{ en } \Omega. \tag{3.47}$$

Para demostrar (3.47) basta recordar que por el principio del máximo $0 \leq u \leq h$, $0 \leq v \leq h$ y por tanto $0 \leq b_u \leq \beta(h)$. Introduciendo $U=h-u$, $V=h-v$ se tienen (3.37) y (3.38) donde ahora la igualdad en las ecuaciones se produce con las secciones de $\tilde{\beta}(U)$ y $\tilde{\beta}(V)$ dadas por $\beta(h)-b$ y $\beta(h)-b_v$ respectivamente. Por último (3.47) se deduce de nuevo por la estimación en L^∞. Finalmente la desigualdad (3.17) (bajo la hipótesis (3.46) tiene como resultado similar

$$|N(b)| \leq |N(b_v)|. \square \tag{3.48}$$

Tal como se señaló en la Observación 7 la comparación puntual $u_1^*(x) \leq u_2(x)$ en Ω^* se tiene cuando u_2 es elegida como la solución radial sin término de perturbación ($\beta(u_2)\equiv 0$). El resultado siguiente es de especial interés en el caso de β multivoco pues asegura la comparación puntual con u_2 solución de un problema de tipo obstáculo. Prescindiremos ahora de la hipótesis $f\geq 0$:

<u>**Teorema 3.**</u> *Sean* $\Omega_1=\Omega, \Omega_2=\Omega^*$ y $f_1\in L^1(\Omega_1)$. *Sea* $u\in W_0^{1,A}(\Omega)$ *verificando (1.1) con* $f=f_1$ *y sea* $u_2\in W_0^{1,A}(\Omega^*)$ *solucion simétrica del problema de obstáculo*

$$\left.\begin{array}{l} -\mathrm{div}(Q(|\nabla v|)\nabla v)\geq f-\beta^+(0) \quad , \ v\geq 0 \\ \left(-\mathrm{div}(Q(|\nabla v|))+\beta^+(0)-f_2\right)v=0 \end{array}\right\} \text{ en } \Omega \tag{3.49}$$

donde

$$\beta_+(0)=\max\{t\in\beta(0)\}. \tag{3.50}$$

Entonces

$$f_1 \precsim f_2 \quad \textit{implica} \quad u_1^*(x)\leq u_2(x) \quad \text{cpt } x\in\Omega^* \tag{3.51}$$

Además

$$|N(u_1)|\geq|N(u_2)| \tag{3.52}$$

y se tiene la caracterización siguiente:

$$|N(u_2)|=|\Omega^*| \quad si \quad f_2(x)\leq\beta_+(0) \quad \text{cpt } x\in\Omega^*, \tag{3.53}$$

$$|N(u_2)|=0 \quad si \quad \int_{\Omega^*}(f_2(x)-\beta_+(0))dx\geq 0 \text{ y } f_2\not\equiv\beta_+(0) \tag{3.54}$$

$$|N(u_2)|=|\Omega|-s_0, \textit{ en otro caso,}$$

siendo $s_0\in]|\{f_2-\beta_+(0)>0\}|,|\Omega^*|[$ *la única solución de* $\kappa_2(s_0)=0$, κ_2 *dada por*

$$\kappa_2(s):=\int_0^s(\tilde{f}_2(\theta)-\beta_+(0))d\theta. \tag{3.56}$$

<u>Demostración.</u> Seguiremos de cerca la demostración inicial de BM1] (vease también D[1] Theorem 2.22), por lo que sólo daremos las ideas de sus diferentes etapas. La desigualdad equivalente a (3.18) es ahora

$$0\leq -\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}}Q(|\nabla u|)|\nabla u|^2dx\leq\int_0^{\mu(t)}(\tilde{f}(s)-\beta^+(o))ds \cdot \tag{3.57}$$

Para justificar tal modificación hay que acudir a la demostración detallada de (3.18). Se utiliza como función test

$$v=T_{t,\tau}(u)$$

en la expresión (2.5) y en nuestro caso (2.10) siendo $t,\tau>0$ y $T_{t,\tau}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$T_{t,\tau}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\le s\le t \\ s-t & \text{si } t<s\le t+\tau \\ t & \text{si } t+\tau<s \end{cases} \tag{3.58}$$

La observación clave es que si $b\in\beta(u)$ entonces

$$b(x)T_{t,\tau}(u(x)) \ge \beta^{+}(0)T_{t,\tau}(u(x)) \qquad \text{cpt } x\in\Omega \tag{3.59}$$

pues si $u(x)>0$ entonces $b(x)\ge\beta_{-}(u(x))\ge\beta_{+}(0)$ y si $u(x)=0$ entonces $T_{t,\tau}(u(x))=0$. La desigualdad (3.57) se termina por paso al límite $\tau\to 0$.
El segundo ingrediente de la demostración es la desigualdad

$$-\frac{d\tilde{u}_1}{ds}(s)\le\frac{1}{\alpha(s)}B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha(s)}\left\{\int_0^s(\tilde{f}_1(\theta)-\beta_{+}(o))d\theta\right\}\right) \qquad \text{cpt } s\in(o,\mu(o)) \tag{3.60}$$

análoga a (3.20). El único paso delicado es justificar que la integración de la desigualdad similar a (3.22) conduce a (3.50). Ello requiere mostrar que la función

$$\kappa_1(s):=\int_0^s(\tilde{f}_1(\theta)-\beta_{+}(o))d\theta \tag{3.61}$$

es tal que $\kappa_1(s)\ge 0$ cpt $s\in(o,\mu(o))$, si μ es la función de distribución de u, lo que se deduce ahora de (3.57).
El tercer paso consiste en demostrar que $\tilde{u}_2$ derifica una expresión del tipo (3.60) pero con igualdad (al igual que en el Lema 4).
Esto se deduce de la unicidad de soluciones tras pasar el operador diferencial a la variable real $s=\omega_N r^N$, $r=|x|$. Se obtiene asi que

$$-\frac{d\tilde{u}_2}{ds}(s)=\frac{1}{\alpha(s)}B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha(s)}\,\kappa_2(s)\right) \qquad \text{cpt } s\in(o,\upsilon(o)), \tag{3.62}$$

con $\upsilon(t)$ función de distribución de u_2.
A diferencia del Teorema 1 la conclusión del Teorema 3 se va a deducir directamente de (3.60)(3.62), e.d. sin pasar por problemas de segundo orden. Basta integrar (3.60) y (3.62) en el intervalo $(s,|\{u_1>0\}|)$ para obtener que

$$\tilde{u}_1(s)\begin{cases} \le \displaystyle\int_s^{|\{u_1>0\}|}\frac{1}{\alpha(\sigma)}\,B^{-1}\!\left(\frac{1}{\alpha(\sigma)}\kappa_1(\sigma)\right)d\sigma & \text{si } s\in[o,|\{u_1>0\}|] \\ 0 & \text{si } s\in[|\{u_1>0\}|,|\Omega|] \end{cases} \tag{3.63}$$

y

$$\tilde{u}_2(s)\begin{cases} = \displaystyle\int_s^{|\{u_2>0\}|} \frac{1}{\alpha(\sigma)} B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha(\sigma)}\kappa_2(\sigma)\right)d\sigma & \text{si} \quad s\in[0,|\{u_2>0\}|] \\ = 0 & \text{si} \quad s\in[|\{u_2>0\}|,|\Omega|] \end{cases} \tag{3.64}$$

Si $f_2\le\beta_+(0)$ (3.64) asegura que $\tilde{u}_2\equiv0$ y (3.53) queda probado. Veamos (3.54). La función κ_2 es cóncava pues $\kappa_2'=\tilde{f}_2-\beta_+(o)$ que es decreciente. De la definición de $\tilde{f}_2$ se tiene que κ_2 es estrictamente creciente en $(0,|f_2>\beta_+(0)|)$, constante en $(|\{f_2>\beta_+(0)|,|\{f_2\ge\beta_+(0)\}|)$ y estrictamente decreciente en $(\{f_2\ge\beta(0)\}|,|\Omega^*|)$. Además $\kappa_2(0)=0$ y $\kappa_2(|\Omega^*|)=\int_{\Omega^*}(f_2-\beta^+(0))dx$. Entonces si $\kappa_2(|\Omega^*|)>0$ se tiene que $\kappa_2(s)>0$ $\forall s\in(0,|\Omega^*|]$ y por (3.62) deducimos que

$$\frac{d\tilde{u}_2}{ds}(\upsilon(o)-\varepsilon)>0 \qquad \forall\varepsilon>0 \text{ suficientemente pequeño.}$$

Pero $\tilde{u}_2\in C^1((0,|\Omega^*|]$ y así $\upsilon(0)=|\Omega^*|$. Supongamos ahora que $\int_{\Omega^*}(f_2(x)-\beta^+(0))dx<0$ y $|\{f_2>\beta_+(0)\}|>0$. Es claro que $|\{u_2>0\}|>0$ pues en otro caso ha de ser $f_2<\beta_+(0)$ en Ω^*. Por la descripción de κ_2 existirá un único $s_0\in(|\{f_2\ge\beta_+(0)\}|,|\Omega^*|)$ tal que $\kappa_2(s)>0$ si $0<s<s_0$, $\kappa_2(s_0)=0$ y $\kappa_2(s)<0$ si $s<s_0<|\Omega^*|$. Por tanto de (3.62) se tiene que

$$\frac{d\tilde{u}_2}{ds}(s_0)=0$$

y como $\tilde{u}_2$ es no-creciente se tiene que $s_0=\upsilon(0)$.

Finalmente, por la hipótesis $f_1 \underset{\sim}{\angle} f_2$ se tiene que

$$\kappa_1(s)\le\kappa_2(s) \qquad \forall s\in[0,|\Omega|] \tag{3.65}$$

y además se vió que $\kappa_1(s)\ge0$ $\forall s\in(0,\mu(0)]$, por tanto $s_0(=\upsilon(0))\ge\mu(0)$, lo que prueba (3.52). Por último la comparación (3.51) se deduce ahora de (3.63), (3.64) y (3.65). $\square$

Observación 13.

De (3.63) y (3.64) y la Lipschitcianidad de B^{-1} se deduce que para todo $1\le p\le\infty$ existe $C>0$ tal que

$$\|\tilde{u}_1-\tilde{u}_2\|_{L^p((0,|\Omega|)} \le C\|F_1-F_2\|_{L^p((0,|\Omega|))} \tag{3.66}$$

con F_i definidas por (3.1) (y f_i no necesariamente tales que $f_1 \underset{\sim}{\angle} f_2$).

Un corolario inmediato del Teorema 3 resulta al tomar $f_1=f_2$ y $f_2=f_1^*$, pues entonces la condición para tener $|N(u)|>0$ de traduce en

$$\int_\Omega (f(x)-\beta_+(0))dx<0 \quad \square \tag{3.67}$$

3.3. El problema del obstáculo superior.

Consideraremos ahora el problema del obstáculo superior

$$\left.\begin{array}{l} -\mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u)+H(u) \le f \ , \ u\le 1 \\ (-\mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u)+H(u)-f)(1-u)=0 \end{array}\right\} \text{ en } \Omega \tag{3.68}$$

$$u=0 \quad \text{en } \partial\Omega \tag{3.69}$$

donde $H(u)$ es tal que

$$H(u) \text{ es continua y nodecreciente, } H(o)=o. \tag{3.70}$$

El problema (3.68), (3.69) es de una naturaleza distinta al problema de obstáculo inferior $u\ge 0$ pues la condición de contorno expresa que ahora el conjunto de coincidencia $\{u=1\}$ se encuentra en el interior de Ω. Observemos que si u es solución fuerte (3.68) se puede escribir, equivalentemente

$$-\mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u)+H(u)+\beta(u)\ni f \quad \text{en } \Omega \tag{3.71}$$

con

$$\beta(r)=\begin{cases} 0 & \text{si } r\le 1 \\ [0,+\infty) & \text{si } r=1 \\ \emptyset & \text{si } r>1 \end{cases} \tag{3.72}$$

Teorema 4. *Sea*

$$f\in L^1(\Omega) \ , \ f(x)\ge 0 \quad \text{cpt } x\in\Omega \tag{3.73}$$

Supongamos o bien (3.3) o bien (3.12). Sea $u\in W_0^{1,A}(\Omega)$ *solución fuerte de (3.71) originando el conjunto de coincidencia I dado por*

$$I:=\{x\in\Omega: u(x)=1\}$$

Supongamos que

$$\int_I \mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u)dx\ge 0 \tag{3.74}$$

Para $s\in(0,|\Omega|]$ *definamos*

$$\zeta(s):=\int_s^{|\Omega|} \frac{1}{\alpha(s)}\, B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha(s)}\int_0^{\sigma-s}\tilde{f}(\theta)d\theta\right)d\sigma \tag{3.75}$$

Entonces, o bien $|I|=0$, *o bien* $|I|\le s_0$, *donde* $s_0\in(o,|\Omega|)]$ *es la única solución de* $\zeta(s)=1$.

Además, si $v\in W_0^{1,A}(\Omega^*)$ *es la solución del problema de obstáculo*

$$\left.\begin{array}{l} -\mathrm{div}(Q(|\nabla v|)\nabla v)\le f^{\#}\ ,\ v\le 1 \\ (-\mathrm{div}(Q(|\nabla v|)\nabla v)-f^{\#})(1-v)=0 \end{array}\right\}\ en\ \Omega^*, \tag{3.76}$$

siendo

$$f^{\#}(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & \mathrm{si}\ 0<\omega_n|x|^N\le s_0 \\ \tilde f(\omega_N|x|^N-s_0) & \mathrm{si}\ s_0<\omega_N|x|^N\le s_0 \end{array}\right. \tag{3.78}$$

Entonces se tiene que

$$|I|\le|\{v=1\}|. \tag{3.79}$$

<u>Demostración.</u> Por el principio del máximo se tiene que $0\le u(x)\le 1$ cptx$\in\Omega$. Multiplicando (3.71) por $v=T_{t,\tau}(u)$ con $T_{t,\tau}$ dado por (3.58), dividiendo por τ y pasando al límite en $\tau\to 0$ se obtiene que

$$0\le -\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}}Q(|\nabla u|)|\nabla u|^2dx=\int_{\{u>t\}}f(x)-b(x))-H(u(x))dx\ .$$

con $b\in L^1(\Omega)$, $b(x)\in\beta(u(x))$, realizando la igualdad en (3.71). Pero como $u\le 1$

$$\int_{\{u>t\}}f(x)-b(x)-H(u(x))dx=\int_{\{t<u<1\}}f(x)-H(u(x)))dx-\int_I \mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u)$$

Por otra parte por un resultado bien conocido de Hardy-Littlewood (véase, por ejemplo D[1] Theorem 1.25 ii) se tiene que

$$\int_{\{t<u<1\}}f(x)dx\le\int_0^{|\Omega|}\tilde f(s),(\chi_{\{t<u<1\}})ds=\int_0^{\mu(t)-|I|}\tilde f(s)ds$$

En consecuencia, por la hipótesis (3.74), como $H(u)\ge 0$, se concluye que

$$0\le -\frac{d}{dt}\int_{\{u>t\}}Q(|\nabla u|)|\nabla u|^2dx\le\int_0^{\mu(t)-|I|}\tilde f(s)ds$$

Aplicando (3.19) se obtiene

$$-\frac{d\tilde u}{ds}(s)\le\frac{1}{\alpha(s)}B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha(s)}\int_0^{s-|I|}\tilde f(\theta)d\theta\right)\qquad \mathrm{cpt}\ s\in(|I|,|\Omega|) \tag{3.80}$$

Integrando (3.80) entre $|I|$ y $|\Omega|$ se concluye que

$$1\le\zeta(|I|). \tag{3.81}$$

Pero de la definición de ζ se deduce que ζ es estrictamente decreciente y que $\zeta(|\Omega|)=0$. Por (3.81) $\zeta(0^+)\ge 1$. Entonces existe un único s_0 tal que $\zeta(s_0)=1$ y por (3.81) se ha de tener $|I|\le s_0$.

Finalmente, $-\mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla v)=f^{\#}$ en $\{v<1\}$. Utilizando la simetría de v escribiendo el operador en términos de la variable $s=\omega_N r^N$, $r=|x|$ se tiene que $\{v=1\}$ es regular y por tanto (3.74) se verifica con igualdad.

Además, se tiene

$$\int_0^s \tilde{f}^{\#}(\sigma)d\sigma = \int_0^{s-s_0} \tilde{f}(\theta)d\theta).$$

En consecuencia,

$$1=\zeta(|\{v=1\}|)$$

y así $|\{v=1\}|=s_0$. Entonces

$$v(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in I^* \\ \displaystyle\int_{\omega_N|x|^N}^{|\Omega|} \frac{1}{\alpha(s)}\, B^{-1}\Big(\frac{1}{\alpha(s)}\int_0^{s-s_0}\tilde{f}(\theta)d\theta\Big) & \text{si } x\in\Omega^*-I^*, \end{cases} \tag{3.82}$$

siendo I^* la bola centrada en el origen con $|I^*|=s_0$ lo que termina la demostración. □

Observación 14.

La distinta definición de las funciones κ_2 (en el Teorema 3) y ζ en el Teorema 4 ponen en evidencia un fenómeno notable a nuestro juicio: La medida del conjunto de coincidencia depende de manera fundamental de la dimensión del espacio N en el caso del problema de obstáculo superior, mientras que en el del obstáculo inferior no aparece N en la caracterización de $|I|$ por medio de $\tilde{f}_2$. □

Observación 15.

La desigualdad (3.81) puede ser utilizada para obtener condiciones suficientes para que $|I|=0$ (vease SM[1] p 25). Señalemos también que (3.74) es una hipótesis de regularidad sobre ∂I, pues cuando ∂I es lo suficientemente regular como para poder aplicar el teorema de Green (p.e. ∂I Lipschitz) entonces (3.74) se verifica trivialmente (con la igualdad). □

Observación 16.

El problema del obstáculo superior aparece también asociado a obstáculos inferiores ψ tales que $\psi|_{\partial\Omega}=-1$. Sea $f^{\#}\in L^2(\Omega)$ y sea $U\in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$-\Delta U \geq f^{\#}\ ,\ U\geq 0\ ,\ (-\Delta U-f)U=0 \quad \text{en } \Omega.$$

Entonces es fácil ver que

$$u:=1-U+\psi$$

verifica

$$-\Delta u \le f \ , \ u \le 1 \ , \ (-\Delta u - f)(u-1)=0 \text{ en } \Omega$$

con

$$f:=\Delta\psi - f. \square$$

Observación 17.

La cuestión de si es posible comparar (en masa) u con la solución del problema radial está, a nuestro saber, abierta $\square$

Observación 18.

Los criterios sobre existencia o no existencia de N(u) o de los conjuntos de coincidencia I, y las estimaciones sobre la medida de estos conjuntos complementa resultados de existencia y no existencia obtenidos mediante la comparación con adecuadas super y subsoluciones. (Vease por ejemplo AD[1],D[1],[2],[4],DHn[1],DHr[1],DST[1]y DV[1]). tal técnica de comparación puntual permite obtener también estimaciones sobre la localización espacial de los conjuntos N(u) e I. Señalemos por último que las funciones de comparación (super y subsoluciones) son usualmente tomadas con simetría radial.

Observación 19.

Otro punto de vista diferente ha sido introducido por C. Bandle [1][2] y F. Pacella y M. Tricarico PT[1]. Con el fin de poder comparar la solución del problema (1.1),(1.3) (con g=0) con la de otro problema con condiciones de Neumann, estos autores utilizaron la noción de <u>α-simetrización</u> de una función en lugar de la simetrización esférica aquí utilizada. Ahora la función α-simetrizada $C\alpha u$ es una función esféricamente simétrica pero definida únicamente sobre un sector de amplitud α. El resultado obtenido es una comparación puntual de tipo $C_\alpha u \le v$ en el sector $C_\alpha(\Omega)$ de medida $|\Omega|$ y amplitud $\alpha \in (o, \pi/2]$ adecuada y v satisface condiciones de contorno homogéneas de tipo Dirichlet sobre el trozo de casquete esférico y de Neumann sobre los hiperplanos laterales (vease también LPT[1] y BP[1]).

4. Desigualdades isoperimétricas para el problema de Capilaridad.

En esta sección abordaremos el caso de condiciones de contorno de tipo Neumann (1.3). En todo lo que sigue, para simplificar la exposición supondremos

$$g(x)\equiv g\in\mathbb{R} \tag{4.1}$$

En el caso de condiciones de contorno de Dirichlet estas han sido homogeneizadas de manera sistemática con el fin de aplicar el Lema 2 que resulta o bien de la propiedad de Polya -Sezgo

$$\int_{\Omega^*} A(|\nabla u^*|)dx \le \int_{\Omega} A(|\nabla u|)dx \qquad \forall u\in W_0^{1,A}(\Omega) \tag{4.2}$$

o bien de la fórmula de Fleming-Rishel y la desigualdad isoperimétrica clásica (3.42). En el caso que nos ocupa se tendrá que la traza $u|_{\partial\Omega}$ no es nula, siendo desconocida "a priori" por lo que (4.2) no puede ser utilizada. Por el contrario siguiendo MS[1][2] verémos que el otro camino antes señalado conduce a buenos resultados. En lo que sigue supondremos la propiedad geométrica

$$\left.\begin{array}{l}\text{existe } C>o \text{ tal que}\\ \qquad H_{N-1}(\partial E\cap\partial\Omega) \le CP_\Omega(E)\\ \text{para todo medible } E\subset\Omega \text{ con } |E|<\frac{1}{2}|\Omega| \ ,\end{array}\right\} \tag{4.3}$$

Aquí $P_\Omega(E)$ es <u>el perímetro (en sentido de De Giorgi) de E relativo a Ω</u> dado por

$$P_\Omega(E):=\mathrm{Sup}\left\{\left|\int_E \mathrm{div}\psi dx\right| : \psi = (\psi_1,..\psi_N)\in(C_0^\infty(\Omega))^N \ , \ \sum_{i=1}^N \psi_i^2 \le 1\right\}. \tag{4.4}$$

Si llamamos

$$C^* = \min\{C: C \text{ verifica } (4.3)\}$$

el Teorema isoperimétrico de De Giorgi (DeG[1]) y la propiedad (4.3) arrojan la cadena de desigualdades

$$\min^{(N-1)/N}\{|E|,|\Omega-E|\} = |E|^{(N-1)/N} \le \frac{1}{N\omega_N^{1/N}} P_{\mathbb{R}^N}(E) \le$$

$$\le \frac{1}{N\omega_N^{1/N}}(H_{N-1}(\partial E\cap\partial\Omega)+P_\Omega(E)) \le \frac{1}{N\omega_N^{1/N}}(C+1)P_\Omega(E) \ . \tag{4.6}$$

En consecuencia en Ω se tiene una <u>desigualdad isoperimétrica relativa</u> con constante

$$C^* \le \frac{1}{N\omega_N^{1/N}}(C+1) \tag{4.7}$$

Desgraciadamente ahora no es bien conocido el tipo de dominios que realizan la igualdad en (4.6). Nótese que si $\partial E\cap\partial\Omega = \emptyset$ entonces $P_\Omega(E)=P_{\mathbb{R}^N}(E)$. Señalemos también que la condición (4.3) no es satisfecha si $\partial\Omega$ tiene puntos cuspide pero una alternativa puede ser dada (MS [2]).

Sea ahora $u\in W^{1,A}(\Omega)$ una solución débil de (1.1),(1.3). Definamos

$$k = \inf\{t\in\mathbb{R}: |\{u>t\}| \le \frac{1}{2}|\Omega|\} \tag{4.8}$$

(notese que k puede ser negativo). Introduzcamos

$$w = u-k \quad , \; w_1=[w]_+ \quad , \quad w_2=[w]_- . \tag{4.9}$$

y sea

$$\lambda = C^* N\omega_N^{1/N} \tag{4.10}$$

Consideremos ahora los problemas de Dirichlet simétricos

$$-\mathrm{div}(Q(|\nabla v_1|)\nabla v_1) + \lambda\beta(\lambda v_1+k) = \lambda f_1^{\#} \quad \text{en } \Omega^*/2 \tag{4.11}$$

$$-\mathrm{div}(Q(|\nabla v_2|)\nabla v_2) - \lambda\beta(-\lambda v_2+k) = \lambda f_2^{\#} \quad \text{en } \Omega^*/2 \tag{4.12}$$

$$v_i=0 \quad \text{en } \partial\Omega^* . \tag{4.13}$$

donde $\Omega^*/2$ representa una bola centrada en el orígen y tal que

$$|\Omega^*/2| = |\Omega^*|/2.$$

El siguiente resultado ofrece una comparación similar a la del Teorema 1 para β contínua no decreciente.

Teorema 5 Sean $f\in L^1(\Omega)$, $f_i^{\#}\in L^1(\Omega^*/2)$ *con* $f_i^{\#}\ge 0$, $f_i^{\#}=(f_i^{\#})^*$ *tales que, o bien se cumple (3.3), o bien*

$$\sup\frac{C^*}{s^{(N-1)/N}}\left(\max\left\{\int_0^s \tilde{f}_1^{\#}(\theta)d\theta, \int_0^s \tilde{f}_-(\theta)d\theta+g_+(C/C^*)s^{\frac{N-1}{N}}, \int_0^{\sim} f_+(\theta)d\theta+g_-(C/C^*)s^{\frac{N-1}{N}}\right]\le\lim_{r\to\infty} B(r)$$

$$\text{(C y } C^* \textit{ dadas en (4.5) y (4.7))} \tag{4.14}$$

Sean $v_i\in W_0^{1,A}(\Omega^*/2)$ *verificando (4.11) y (4.12). Introduzcamos*

$W_i(x)=\lambda v_i(x)$

Definamos también

$$K_{1,1}(s)=\int_0^s\beta(\tilde{w}_1(\sigma)+k)d\sigma \;,\; K_{2,1}(s)= \int_0^s\beta(\tilde{W}_1(\sigma)+k)d\sigma \tag{4.15}$$

$$K_{1,2}(s)= \int_0^s\beta(-\tilde{w}_2(\sigma)+k)d\sigma \qquad K_{2,2}(s)= \int_0^s\beta(-\tilde{W}_2(\sigma)+k)d\sigma \tag{4.16}$$

$$F_{1,1}(s)=\int_0^s\tilde{f}_+(\sigma)d\sigma+g_-(C/C^*)s^{(N-1)/N}, \qquad F_{2,1}(s)=\int_0^s\tilde{f}_+^{\#}(\sigma)d\sigma \tag{4.17}$$

$$F_{1,2}(s)=\int_0^s\tilde{f}_-(\sigma)d\sigma+g_+(C/C^*)s^{(N-1)/N}, \qquad F_{2,2}(s)=\int_0^s\tilde{f}_-^{\#}(\sigma)d\sigma \tag{4.18}$$

Entonces se tienen las estimaciones

$$\| [K_{1,1}-K_{2,1}]_+ \|_{L^\infty((0,\frac{|\Omega|}{2})} \le \| [F_{1,1}-F_{2,1}]_+ \|_{L^\infty((0,\frac{|\Omega|}{2})} . \tag{4.19}$$

En particular si

$$\int_0^s \tilde{f}_1^{\#}(\sigma)d\sigma \ge \int_0^s \tilde{f}_+(\sigma)d\sigma + g_-(C/C^*)s^{(N-1)/N} \qquad \forall s\in(0,\frac{|\Omega|}{2}) \tag{4.20}$$

se tiene que

$$\beta(w_1+k) \underset{\sim}{\angle} \beta(W_1+k) \tag{4.21}$$

y si

$$\int_0^s \tilde{f}_2^{\#}(\sigma)d\sigma \ge \int_0^s \tilde{f}_-(\sigma)d\sigma + g_+(C/C^*)s^{(N-1)/N} \qquad \forall s\in(0,\frac{|\Omega|}{2}) \tag{4.22}$$

entonces

$$\beta(-w_2+k) \underset{\sim}{>} \beta(-W_2+k) . \tag{4.23}$$

Observación 20. Antes de seguir expliquemos un poco el sofisticado enunciado del Teorema 5. En primer lugar señalemos que no se pide condición de positividad a u. La necesidad de renormalizar con λ de problema simétrico (4.10) nace de las limitaciones de la desigualdad isoperimétrica relativa. Así no es difícil comprobar que $\lambda=1$ corresponde a cuando se tiene la desigualdad isoperimétrica clásica. En otro orden de cosas señalemos que

$$S(w_1)=\{u>k\}\ ,\quad S(w_2)=\{u<k\}\ \text{ y } S(w_1)\cup S(w_2)=\Omega \quad (S(.)=\text{soporte})$$

de ahí que se tenga

$$\int_\Omega \beta(u(x))dx=\int_{S(w_1)}\beta(u(x))dx+\int_{S(w_2)}\beta(u(x))dx=\int_{S(w_1)}\beta(w_1(x)+k)dx+\int_{S(w_2)}\beta(w_2(x)+k)dx$$

El primer término del anterior sumando se estima por medio de $K_{2,1}(s)$ con $s\le|\Omega|/2$ y el segundo por $K_{2,2}(s)$ para $s\le|\Omega|/2$. Es de resaltar también que el dato de contorno de Neumann g interviene en el problema radial como un término fuente y que es posible también tratar el caso de g(x) no constante, en cuyo caso en el problema radial aparecen los reordenamientos decrecientes (N-1)-dimensionales de g_+ y g_- (vease MS[4] para un tratamiento del caso $\beta\equiv0$).

Veamos algunas aplicaciones del Teorema 5.

Teorema 6. *Supongamos la hipótesis del Teorema 1 (en concreto (4.20)) y (4.22) Entonces para toda la función convexa no decreciente* ϕ *se tiene que*

$$\int_0^s \phi(\beta(\tilde{u}(\sigma))d\sigma \leq \int_0^s \phi(\beta(\tilde{W}_1(\sigma)+k)d\sigma \qquad \forall s\in[0,|\Omega|/2] \tag{4.24}$$

$$\int_s^{|\Omega|} \phi(-\beta(\tilde{u}(\sigma))d\sigma \leq \int_0^{|\Omega|-s} \phi(-\beta(-\tilde{W}_2(\theta)+k))d\theta \quad \forall s\in[|\Omega|/2,\Omega] \tag{4.25}$$

(añadir a la parte del Teorema 6).

En particular, si $u\geq 0$ se tiene que

$$\|\beta(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\beta(\lambda v_1+k)\|_{L^\infty(\Omega^*/2)} (v_1\in W_0^{1,A}(\Omega^*/2) \text{ verificando } (4.11) \tag{4.26}$$

y si $\beta(s)=s$, entonces para todo $1\leq p\leq+\infty$

$$\|u-k\|_{L^p(\Omega)} \leq \lambda\left(\|v_1\|_{L^p(\Omega^*/2)}+\|v_2\|_{L^p(\Omega^*/2)}\right) \tag{4.27}$$

<u>Demostración del Teorema 6.</u> Por (4.21) y (4.23) sabemos que $\forall s\in[0,\frac{|\Omega|}{2}]$

$$\int_0^s \beta(\tilde{w}_1(\sigma)+k)d\sigma \leq \int_0^s \beta(\tilde{W}_1(\sigma)+k)d\sigma \tag{4.28}$$

y

$$-\int_0^s \beta(-\tilde{w}_2(\sigma)+k)d\sigma \leq -\int_0^s \beta(-\tilde{W}_2(\sigma)+k)d\sigma \tag{4.28'}$$

Por otra parte si $0\leq s\leq|\Omega|/2$ sabemos que $\tilde{u}(s)>k$. Utilizando que $(\tilde{u}-k)_+=\widetilde{(u-k)}_+$ se tiene que

$$\int_0^s \beta(\tilde{u}(\sigma))d\sigma = \int_0^s \beta(\widetilde{(u-k)}(\sigma)+k)d\sigma = \int_0^s \beta(\tilde{w}_1(\sigma)+k)d\sigma \leq \int_0^s \beta(\tilde{W}_1(\sigma)+k)d\sigma$$

y entonces por el Lema 5 (con $M=|\Omega|/2$ y $t_0=0$) concluios que

$$\int_0^s \phi(\beta(\tilde{u}(\sigma)))d\sigma \leq \int_0^s \phi(\beta(\tilde{W}_1(\sigma)+k))d\sigma \ .$$

Si $s\in[|\Omega|/2,\Omega]$ entonces $\tilde{u}(s)\leq k$ y así utilizando ahora que

$$(\tilde{u}(s)-k)_- = \widetilde{(u-k)}_-(|\Omega|-s)$$

se concluye que

$$-\int_s^{|\Omega|}\beta(\tilde{u}(\sigma))d\sigma = -\int_s^{|\Omega|}\beta(-(\tilde{u}(\sigma)-k)_-+k) = -\int_s^{|\Omega|}\beta(-\tilde{w}_2(|\Omega|-\sigma)+k))d\sigma =$$

$$-\int_0^{|\Omega|-s}\beta(-\tilde{w}_2(\theta)+k)d\theta \le \int_0^{|\Omega|-s}-\beta(-\tilde{W}_2(\theta)+k))d\theta \qquad (4.28'')$$

Aplicando de nuevo el Lema 5 con $M=|\Omega|/2$. $t_0=0$, $y(s)=-\beta(\tilde{u}(|\Omega|-s))$ $z(s)=-\beta(-\tilde{W}_2(s)+k)$ se llega a

$$\int_0^{|\Omega|-s}\phi(-\beta(-\tilde{w}_2(\theta)+k))d\theta=\int_s^{|\Omega|}\phi(-\beta(\tilde{u}(\sigma)))d\sigma\le\int_0^{|\Omega|-s}\phi(-\beta(-\tilde{W}_2(\theta)+k))d\theta. \qquad (4.29)$$

(añadir a la parte 4.29)(justo antes de la observación 19)

Finalmente, si $u\ge0$, operando como en el Corolario 1 se deduce (4.26) toda vez que $\|\beta(u)\|_{L^\infty(\Omega)}=\beta(\tilde{u}(0))=\|\beta(u^*)\|_{L^\infty(\Omega^*/2)}=\beta(\tilde{u}(0))=\beta(\tilde{u})\|_{L^\infty((0,|\Omega|/2))}$. Si por otra parte $\beta(s)=s$

$$\int_\Omega|u-k|^P dx = \int_0^{|\Omega|/2}|\tilde{w}_1|^P dx + \int_0^{|\Omega|/2}|\tilde{w}_2|^P dx$$

y (4.27) resulta de (4.24) y (4.25). □

Observación 21. Conociendo la estructura de β es posible estimar explícitamente el término de la derecha de la desigualdad (4.27). Señalemos también que al igual que en la Observación 7 las comparaciones puntuales

$$w_1^*(x) \le W_1^*(x) \qquad x\in\Omega^*,$$

son posibles cuando en el problema radial se prescinde del término de absorción. (Vease MS [2]). La generalización a ecuaciones satisfaciendo (3.28') y (3.28'') sigue siendo válida. □

Para la demostración del Teorema 5 seguiramos también una cadena de Lemas

Lema 6. *Supongamos las hipótesis del Teorema 5. Entonces*

$$0\le-\frac{d}{dt}\int_{\{w_1>t\}}Q(|\nabla w_1|)|\nabla w_1|^2dx\le\int_0^{\mu_1(t)}\tilde{f}(s)ds-\int_0^{\mu_1(t)}\beta_k(\tilde{w}_1(s))ds-gH_{N-1}(\Gamma_1^t). \qquad (4.30)$$

$$0\leq-\frac{d}{dt}\int_{\{w_2>t\}}Q(|\nabla w_2|)|\nabla w_2|^2dx\leq\int_0^{\mu_2(t)}(\tilde{f})(s)ds+\int_0^{\mu_2(t)}\beta_k(-\tilde{w}_2(s))ds-gH_{N-1}(\Gamma_2^t) \tag{4.31}$$

siendo

$$\beta_k(r)=\beta(r+k) \tag{4.32}$$

$\mu_1(t)$=función de distribución de w_1

$$\Gamma_1^t=\{x\in\partial\Omega: (\text{traza de } w_1)(x)>t\} \tag{4.33}$$

<u>Demostración.</u> Multiplicando la ecuación (2 1) por $v=T_{t,\tau}(w_1)$, dividiendo por τ y pasando al límite cuando $\tau\to 0$ se obtiene

$$-\frac{d}{dt}\int_{\{w_1>t\}}Q(|\nabla w_1|)|\nabla w_1|^2dx=\int_{\{w_1>t\}}f(x)dx-\int_{\{w_1>t\}}\beta(\tilde{w}(x))dx-gH_{N-1}(\Gamma_1^t) \tag{4.34}$$

donde se ha utilizado que

$$\nabla u=\nabla w\ ,\ \nabla w.\nabla w_1=|\nabla w_1|^2 \qquad \beta(u)T_{t,\tau}(w_1)=\beta(w+k)T_{t,\tau}(w_1)=\beta_k(w_1)T_{t,\tau}(w_1)$$

así como que

$$\frac{1}{\tau}\int_{\partial\Omega}gT_{t,\tau}(w_1)H_{N-1}(dx)=\int_{\{x\in\partial\Omega:\, w_1>t+\tau\}}gH_{N-1}(dx)\ +\int_{\{x\in\partial\Omega:\, t<w_1\leq t+\tau\}}g\left(\frac{w_1-t}{\tau}\right)H_{N-1}(dx).$$

Por último basta aplicar propiedades conocidas de $\tilde{w}_1$ y μ_1 para obtener (4.30). La demostración para w_2 sigue pasos similares pero ahora observando que

$\nabla w.\nabla w_2=-|\nabla w_2|^2$, $\beta(u)T_{t,\tau}(w_2)=\beta(-w_2+k)T_{t,\tau}(w_2)=\beta_k(-w_2)T_{t,\tau}(w_2)$. □

Lema 7 *Supongamos* Q *y* f *tales que, o bien se cumple (3.3), o bien*

$$\sup_{s>0}\left|\left(\frac{C^*}{s^{(N-1)/N}}\int_0^s\tilde{f}(\theta)d\theta\right)+g\_C\right|\leq\lim_{r\to\infty}B(r) \quad (C \text{ y } C^* \textit{ dadas en (4.5)(4.7)})$$

Entonces cpt $s\in(0,|\Omega|/2)$ se tiene

$$-\frac{d\tilde{w}_1}{ds}(s)\leq\frac{1}{\alpha^*(s)}B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha^*(s)}\left\{\int_0^s\tilde{f}_+(\theta)d\theta-\int_0^s\beta_K(\tilde{w}_1(\theta))d\theta\right\}+g\_C\right) \tag{4.35}$$

y

$$-\frac{d\tilde{w}_2}{ds}(s)\leq\frac{1}{\alpha^*(s)}B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha^*(s)}\left\{\int_0^s\tilde{f}_-(\theta)d\theta\ \int_0^s\beta_K(\tilde{w}_2(\theta))d\theta\right\}+g_+C\right)$$

siendo

$$\alpha^*(s)=\frac{1}{C^*}\, s^{(N-1)/N} \qquad (C^* \textit{ dada en } (4.7)). \qquad (4.36)$$

Demostración. Por los resultados de MS[1] (Section 2) se obtiene que

$$1 \le \frac{-\mu_1'(t)}{P_\Omega(\{w_1>t\})}\, B^{-1}\left(-\frac{1}{P_\Omega(\{w_1>t\})}\,\frac{d}{dt}\int_{\{w_1>t\}} Q(|\nabla w_1|)|\nabla w_1|^2 dx\right). (4.36')$$

Utilizando (4.30) y la desigualdad (4.3) ($\Gamma_1^t=\{w_1>t\}\cap\partial\Omega$) se llega a

$$1\le\frac{-\mu_1'(t)}{P_\Omega(\{w_1>t\})}B^{-1}\left(-\frac{1}{P_\Omega(\{w_1>t\})}\left[\int_0^{\mu_1(t)}\tilde{f}_+(\theta)d\theta-\int_0^{\mu(t)}\beta_k(\tilde{w}_1(\theta))d\theta+g\_CP_\Omega(\{w_1>t\})\right]\right.$$

Basta ahora utilizar la desigualdad isoperimétrica relativa (4.6), la monotonía de B^{-1} e integrar como en el Lema 3 para obtener (4.35). □

Demostración del Teorema 5. Expresando el operador diferencial en términos de la variable $s=\omega_N r^N$, $r=|x|$ se tiene

$$-\frac{d\tilde{v}_1}{ds}(s) = \frac{1}{\alpha(s)}\, B^{-1}\left(\frac{C^* N\omega_N}{\alpha(s)}\int_0^s\left(\tilde{f}_1^{\#}(\theta)-\beta_k\left(\frac{\tilde{v}(\theta)}{CN\omega_N^{1/N}}\right)\right)d\theta\right).$$

como $\alpha(s)=C^* N\omega_N^{1/N}\alpha^*(s)$, se concluye

$$\frac{d\tilde{W}_1}{ds}(s) = \frac{1}{\alpha^*(s)}\, B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha^*(s)}\left\{\int_0^s\tilde{f}^{\#}(\theta)d\theta-\int_0^s\beta_k(\tilde{W}(\theta))d\theta\right\}\right)$$

Similarmente a la demostración del Teorema 1 se sigue que

$$\alpha^*(s)B\left(-\alpha^*(s)\frac{d}{ds}\,\gamma\left(\frac{dk_{1,1}}{ds}(s)\right)\right)+k_{1,1}(s) \le F_1(s) \qquad \text{en } (0,\tfrac{|\Omega|}{2})$$

$$k_{1,1}(0)=0$$

Además de la construcción de w_1 se deduce que

$$\tilde{w}_1(s)=0 \qquad \forall s\in[|\Omega|/2,\,|\Omega|]$$

por lo que como $\beta(0)=0$

$$k'_{1,1}(\tfrac{|\Omega|}{2})=0$$

Finalmente $k_{2,1}$ verifica (3.26) y la estimación para $k_{1,1}$ y $k_{2,1}$ se concluye por reducción al absurdo. Analogamente se procede con $k_{1,2}$ y $k_{2,2}$. □

Obtendremos ahora algunas desigualdades de tipo isoperimétrico para la frontera libre. Para fijar ideas nos centraremos en soluciones u no negativas. Existen dos casos distintos según que k>0 ($\Leftrightarrow |N(u)|<|\Omega|/2$) o k=0($\Leftrightarrow |N(u)|\geq|\Omega|/2$)

Teorema 7. *Sea β estrictamente creciente, $\beta(0)=0$ y $f\in L^1(\Omega)$. Sea u solución no negativa de (1.1),(1.2). Sean $v_1\in W_0^{1,A}(\Omega^*)$ solución de (4.11) con $f_1^{\#}$ verificando (4.20) , $f_1^{\#}\geq 0$ y $v\in W^{1,A}(\Omega^*)$ solución de*

$$-\operatorname{div}\left(Q(\frac{1}{\lambda}|\nabla v|)\nabla v\right)+\lambda^2\beta(v)=-\lambda^2(f_-)^*-\lambda^2\frac{C}{C^*}\frac{g}{|x|} \qquad en\ \frac{\Omega^*}{2} \qquad (4.37)$$

$$v=k \qquad en\ \partial\frac{\Omega^*}{2}\ . \qquad (4.38)$$

En el caso de k>0 y si $v\geq 0$ en Ω^* se cumple que

$$v>0\ en\ \frac{\Omega^*}{2}\ implica\ que\ u>0\ en\ \Omega \qquad (4.40)$$

y además

$$|N(u)|\leq|N(v)|. \qquad (4.41)$$

<u>Demostración.</u>

Supongamos ahora k>0. Definiendo $f_2^{\#}$ tal que

$$\int_0^s \tilde{f}_2(\sigma)d\sigma = \int_0^s \tilde{f}_-(\sigma)d\sigma+g_+(C/C^*)s^{(N-1)/N}$$

se cumple (4.23). Pero si $W_2=\lambda v_2$ con $v_2\in W_0^{1,A}(\Omega)$ verificando (4.12) entonces, por la unicidad de soluciones, $v=-\lambda v_2+k$.
Observamos también que

$N(u)=\{x\in\Omega: w_2(x)=k\}$

Además, $-\beta(-\tilde{w}_2(\sigma)+k)$ es no creciente σ y $\tilde{w}_2\leq k$ pues $u\geq 0$ por hipótesis. Aplicando el Lema 5 se concluye que como β es estrictamente creciente

$$(\|w_2\|_{L^\infty(\Omega)}=\|\tilde{w}_2\|_{L^\infty(0,\frac{|\Omega|}{2})}\leq\|\tilde{W}_2\|_{L^\infty(0,\frac{|\Omega|}{2})} \qquad (4.42)$$

Entonces si $v>0$ en $\frac{\Omega^*}{2}$ ha de ser $W_2(x)<k$ y por (4.42) $W_2<k$ en Ω lo que afirma que N(u) es vacío. Analogamente, tomando $\phi=\phi_\varepsilon$ convexa creciente verificando

$$\phi_{\varepsilon}(r)=0 \quad \text{si} \quad 0\le r\le\beta(k)-\varepsilon \ , \ \phi_{\varepsilon}(\beta(k))=1$$

$\forall 0<\varepsilon<k$, de (4.28'') y el Lema 5 deducimos haciendo $s=|\Omega|$ que

$$\int_{\Omega}\phi_{\varepsilon}\Big(-\beta(-w_2(x)+k)+\beta(k)\Big)dx\le\int_{\Omega^*}\phi_{\varepsilon}\Big(-\beta(-W_2(x)+k)+\beta(k)\Big)dx$$

$$\le\int_{\{x\in\Omega^*:\beta(-W_2(x)+k)<\varepsilon\}}dx$$

Por tanto como $\phi_{\varepsilon}(.)\ge0$ y β es estrictamente creciente

$$|N(u)|=|\{w_2=k\}| = \int_{\{w_2=k\}}\phi_{\varepsilon}(\beta(k))dx\le|\{x\in\Omega^*:\beta(v(x))<\varepsilon\}|.$$

Haciendo $\varepsilon\downarrow 0$ y como $\beta^{-1}(0)=0$ se deduce (4.41). □

Para terminar establezcamos una desigualdad de tipo isoperimétrico para el problema de obstáculo

$$\left.\begin{array}{l} -\mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u)\ge f \ , \ u>0 \\ (-\mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u)-f)u=0 \end{array}\right\} \text{ en } \Omega \qquad (4.43)$$

$$Q(|\nabla u|)\nabla u.n=g \qquad \text{en } \partial\Omega. \qquad (4.44)$$

Teorema 8. *Sea* $f\in L^1(\Omega)$ *y sea* $u\in W^{1,A}(\Omega)$ *solución fuerte de (4.43) y (4.44). Supongamos (3.3) o bien (3.12). Sea* I *el conjunto de coincidencia*

$$I:=\{x\in\Omega: u(x)=0\}$$

y supongamos que

$$\int_I \mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u)dx\le0 \qquad (4.45)$$

Para $s\in(0,|\Omega|]$ *definamos*

$$\psi(s):=\int_s^{|\Omega|/2}\frac{1}{\alpha(\sigma)}\,B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha(\sigma)}\int_0^{\sigma-s}-\tilde{f}(\theta)d\theta+g(\frac{C}{C^*})\sigma^{(N-1)/N}\right) \qquad (4.46)$$

Por último sea $k>0$ *satisfaciendo (4.8) y supongamos*

$$\psi(0)>k. \qquad (4.47)$$

Entonces necesariamente

$$|I|<s_{0,k}$$

con $s_{o,k}$ *raíz unica de*

$$\psi(s_{0,k})=k. \qquad (4.48)$$

<u>Demostración.</u> En primer lugar observemos que si u es solución de (4.43),(4.44) y si $k\in\mathbb{R}$ dado por (4.8) es tal que $k>0$ entonces la

función $w_2=[u-k]_-$ verifica que

$$w_2 \le k \quad c.\forall p.\, x\in\Omega$$

y

$$I=\{x\in\Omega: u(x)=0\}=\{x\in\Omega: w_2(x)=k\}.$$

Argumentaremos ahora como en el problema de Plateau de obstáculo superior. La inecuación (4.43) es equivalente a la ecuación multívoca

$$-\mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u)+\beta(u)\ni f \quad \text{en } \Omega. \tag{4.49}$$

con β dado por

$$\beta(r)=\begin{cases} 0 & \text{si } r>0 \\ (-\infty,0] & \text{si } r=0 \\ \emptyset & \text{si } r<0. \end{cases} \tag{4.50}$$

Multiplicamos la ecuación (4.49) por $T_{t,\tau}(w_2)$ y observamos que

$$\nabla u=\nabla w \quad y \quad \nabla w.\nabla w_2=-|\nabla w_2|^2.$$

Dividiendo por τ y pasando al límite cuando $\tau\to 0$ se obtiene

$$\frac{d}{dt}\int_{\{w_2>t\}} Q(|\nabla w_2|)|\nabla w_2|^2 = \int_{\{w_2>t\}}(f(x)-b(x))dx-gH_{N-1}(\Gamma_1^t)$$

con $b\in L^1(\Omega)$, $b(x)\in\beta(u(x))$ cpt $x\in\Omega$. Pero

$$\int_{\{w_2>t\}}(f(x)-b(x))dx=\int_{\{w_2=k\}\cup\{k>w_2>t\}}(f(x)-b(x))dx=\int_{\{k>w_2>t\}}(f(x)-b(x))dx-\int_I \mathrm{div}(Q(|\nabla u|)\nabla u)dx$$

$$\ge\int_{\{k>w_2>t\}} f(x)dx$$

Pero por la propiedad de Hardy-Littlewood

$$\int_{\{t<w_2<k\}}-f(x)dx \le \int_0^{|\Omega|}(-\tilde{f})(s)(\chi_{\{t<w_2<k\}})ds = \int_0^{\mu_2(t)|I|}(-\tilde{f})(s)ds$$

En consecuencia, obtenemos

$$0 \le -\frac{d}{dt}\int_{\{w_2>t\}} Q(|\nabla w_2|)|\nabla w_2|^2 dx \le \int_0^{\mu_2(t)|I|}(-\tilde{f})(s)ds.+gH_{N-1}(\Gamma_1^t)$$

Por los resultados de MS[ ] se obtiene (4.36') para w_2 tanto

$$1 \le \frac{\mu_2'(t)}{P_\Omega(\{w_2>t\})}\, B^{-1}\left(-\frac{1}{P_\Omega(\{w_1>t\})}\left[\int_0^{\mu_2(t)-|I|}(-\tilde{f})(\theta)d\theta+gCP_\Omega(\{w_2>t\})\right]\right).$$

Por la desigualdad isoperimétrica relativa (4.6), la monotonía de B^{-1}, tras integrar se obtiene que

$$-\frac{d\tilde{w}_2}{ds}(s)\leq\frac{1}{\alpha^*(s)}B^{-1}\left(\frac{1}{\alpha^*(s)}\left\{\int_0^{s-|I|}(-\tilde{f})(\theta)d\theta-g\left(\frac{C}{C^*}\right)s^{(N-1)/N}\right)\right. \qquad (4.51)$$

casi para todo $s\in(|I|,|\Omega|)$

Integrando (4.51) entre $|I|$ y $\frac{|\Omega|}{2}$ y recordando que $w_2(|\Omega|/2)=0$ se obtiene

$$k\leq\psi(|I|)$$

Finalmente, observando que $k\leq\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ deducimos que entonces necesariamente ha de existir un (único) $s_{0,k}$ tal que

$$k=\psi(s_{0,k})$$

y como ψ es estrictamente decreciente ha de ser $|I|\leq s_{0,k}$.

Agradecimientos: Este trabajo fue realizado durante la estancia del autor en la Universidad de Metz (Francia) en Noviembre de 1989 en calidad de Professeur Associé. El autor agradece a los miembros de la U.F.R. de Mathematiques, Informatique et Mecanique de esa Universidad por el ambiente de trabajo y tranquilidad con los que fue obsequiado.

5. Bibliografía

ABe[1] Abourjaily, C. Benilan, P. Artículo en preparación.

Ad[1] Adams, R.A. Sobolev Spaces. Academic Press. New York (1975).

AD[1] Antontsev, S.N. Díaz, J.I. New results on space and time localization of solutions of nonlinear elliptic or parabolic equations via energy methods. Soviet Math. Dokl. 203, 524-528 (1988) (En ruso).

AlTr[1] Alvino, A. Trombetti, G. Sulle migliori constanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri. Richerche di Mat. 27 (1978), 193-212.

B[1] Bandle, C. Existence theorems and a priori bounds for a class of nonlinear Dirichlet problems with mixed boundary conditions, Journ. Diff. Eq. 19 (1975), 36-45.

B[2] Bandle, C. Isoperimetric inequalities and applications. Pitman. London (1980).

BM[1] Bandle, C. Mossino, J. Application du réarrangement à une inequation variationelle. C.R. Acad. Sc. Paris, 296 (1983), 501-504.

BM[2] Bandle, C. Mossino, J. Rearrangement in Variational Inequalities Annali di Matematica pura ed applicata. 88 (1984), 1-14.

BSS[1] Bandle, C. Sperb, R.P. Stakgold, I. Diffusion and reaction with monotone kinetics. Nonlinear Analysis Th. Meth. and Appl. 8 (1984), 321-333.

BeP[1] Berestycki, H. Pacella, F. Proprietes de symetrie pour les solutions positives d'equations elliptiques avec conditions aux limites mixtes. C.R. Acad. Sc. Paris, 306 (1988), 71-74.

BrK[1] Brezis, H. Kinderlehrer. The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities. Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 831- 844.

CF[1] Caffarelli, L.A. Friedman, A. Regularity of the boundary of a Capillary Drop on an Inhomogeneous Plane and Related Variational Problems. Rev. Matem. Iberoamericana 1 (1985), 61-84.

Ch[1] Chiti, G. Norme di Orlicz delle soluzioni di una classe di equazioni ellittiche. Boll. Unione Mat. It. 16-A (1979), 178-185.

DeG[1] De Giorgi, E. Su una teoria generale della misura (r-1) dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Ann. Mat. Pura Appl. 36 (1954), 191-213.

DLe[1] Díaz, G. Letelier, R. Explosive solutions of quasilinear elliptic equations: Existence and uniqueness. Pendiente de publicación.

D[1] Díaz, J.I. Técnica de supersoluciones locales para problemas estacionarios no lineales. Memoria n^0 16 de la Real Academia de Ciencias, Madrid (1982).

D[2] Díaz, J.I. Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Vol 1. Elliptic Equations. Pitman, London 1985.

D[3] Díaz, J.I. Applications of symmetric rearrangement to certain nonlinear elliptic equations with a free boundary. En el libro Nonlinear Differential Equations. Editores J. Hale y P. Martínez. Pitman (1985), 155-181.

D[4] Díaz, J.I. Problemas estáticos con frontera libre en Mecánica de medios contínuos. Revista de la Real Academia de Ciencias. Madrid. Tomo 83 (1989), 119-122.

D[5] Díaz, J.I. Isoperimetric inequalities in nonlinear parabolic problems. (Aparecerá).

DHn[1] Díaz, J.I. Hernández, J. On the existence of a free boundary for a class of reaction-diffusion systems, SIAM J. Math. Anal. 5 (1984), 670-685.

DHr[1] Díaz, J.I. Herrero, M.A. Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems. Proc. Royal Soc. Edinburgh 89A (1981), 249-258.

DM[1] Díaz, J.I. Mossino, J. Inegalité isoperimetrique dans un probléme d'obstacle parabolique. C.R. Acad. Sc. Paris 305 (1987), 737-740.

DM[2] Díaz, J.I. Mossino, J. Isoperimetric inequalities in the parabolic obstacle problem. Aparecerá en Journal de Mathematiques Pures et Appliquées.

DST[1] Díaz, J.I. Saa, J.E. Thiel, U. Sobre la ecuación de curvatura media prescrita y otras ecuaciones cuasilineales elípticas con soluciones anulándose localmente. Aparecerá en Revista de la Unión Matemática Argentina (volúmen en honor de Julio Rey Pastor).

DV[1[Díaz, J.I. Veron, L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations Transsactions of the Americ. Math. Soc. (1985), 787-814.

Do[1] Donaldson. Nonlinear elliptic boundary value problems in Orlicz-Sobolev Spaces. J. Differential Equations, 10 (1971).

F[1] Finn, R. Equilibrium Capillary Surfaces. Springer-Verlag, 1986.

Fr[1] Friedman, A. Variational Principles and Free Boundary Problems. Wiley, New York (1982).

FlRi[1] Fleming, W.H. Rishel, R. An integral formula for the total gradient variation. Arch. Math. 11 (1960).

Ge[1] Gerhardt, C. Existence, regularity and boundary behaviour of generalized surfaces of prescribed mean curvature. Math. Z. 139 (1974), 173-198.

Ge[2] Gerhardt, C. Boundary value problems for surface of prescribed mean curvature. J. Math. Pures et Appliques, 58 (1979), 75-109.

GT[1] Gilbarg, D. Trudinger, N.S. Elliptic Partial Differential Equations of second order. Springer-Verlag 1983.

Gi[1] Giusti, E. Boundary value problems for non-parametric surfaces of prescribed mean curvature. Annalí della Scuola Norm. Sup. di Pisa 34 (1976), 501-548.

Go[1] Gossez, J.P. Nonlinear elliptic boundar value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients. Trans. Amer. Math. Soc. 190. (1974).

HLP[1] Hardy, G.H. Littlewood, J.E. Polya, G. Some simple inequalities satisfied by convex functions. Messenger Math. 58 (1929). 145-152.

HLP[2] Hardy, G.H. Littlewood, J.E. Polya, G. Inequalities. Cambridge Univ. Press. Cambridge (1934).

HaS[1] Hartman, P. Stampacchia, G. On some non-linear elliptic differential functional equations. Acta Math. 115 (1966), 271-310.

Ka[1] Kawol, B. On Rearrangements, Symmetrization and Maximum Principles. Lectures Notes in Math. Springer-Verlag (1985).

LMu[1] Landes, R. Mustonen, V. Pseudo-monotone mappings in Sobolev-Orlicz spaces and nonlinear boundary value problems on unbounded domains. J. Math. Appl. 88 (1982), 25-36.

LMu[2] Landes, R. Mustonen, V. Unilateral Obstacle Problem for Strongly Nonlinear Second Order Elliptic Operators, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 45 (1986), Part 2, 95-107.

Li[1] Lions, P.L. Quelques remarques sur la symmetrization de Schwartz. En el libro Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications. Vol 1. H. Brezis-J.L. Lions, editores. Pitman, London (1980), 308-319.

LiPaTr[1] Lions, P.L. Pacella, F. Tricarico, M. Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on fome part of the boundary and related questions. Aparecerá en Indiana Univ. J. Math.

M[1] Maderna, C. Optimal problems for a certain class of nonlinear Dirichlet problems. Suppl. Bull. U.M.I.I (1980), 31-34.

MS[1] Maderna, C. Salsa, S. Symmetrization in Neumann problems, Applicable Analysis 9 (1979), 247-256.

MS[2] Maderna, C. Salsa, S. A priori bounds in nonlinear Neumann problems. Boll. Un. Math. Ital. 5 16-B (1979).

MS[3] Maderna, C. Salsa, S. Some special properties of solutions to obstacle problems. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 71. (1984), 121-129.

Ma[1] Maz'ja, V.G. On weak solutions of the Dirichlet and Neumann problems, Trans. Moscow Math. Soc. 20 (1969).

Mo[1] Mossino, J. Inegalites Isoperimetriques et Applications en Physique. Herman, Paris (1984).

PT[1] Pacella, F. Tricario, M. Symmetrization for a Class of Elliptic Equations with Mixed Boundary Conditions. Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 34 (1985), 75-94.

PoS[1] Polya, G. Szego, G. Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Ann. Math. Stud. 27. Princeton Univ. Press. Princeton (1952).

R[1] Rodrigues, J.F. Obstacle Problems in Mathematical Physics. North-Holland 1987.

T[1] Talenti, G. Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces. Ann. Mat. Pura Appl. IV, 120 (1977) 159-184.

TrV[1] Trombetti, G. Vazquez, J.L. A symmetrization result for elliptic equations with lower-order terms. Ann. Fac. Sci. Toulouse.

V[1] Vazquez, J.L. Symmetrisation pour $u_t=\Delta\phi(u)$ et applications. C.R. Acad. Sci. Paris. 295 (1982), 71-74.

Vi[1] Vishik, M.I. Solvability of the first boundary value problem for quasilinear equations with rapidly increasing coefficients in Orlicz classes. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 151 (1963), 1060-1064.

Vu[1] Vuillermot, P. A class of elliptic partial differential equations with exponential nonlinearities. Math. Ann. 268. (1984), 497-518.

Recibido: 6 de Diciembre de 1989