Rev.Acad.Canar.Cienc., IV (núms. 1 y 2),23-29 (1992)

Teoremas Abelianos para la ${}_2F_1$–transformada índice generalizada

N. Hayek y B.J. González

Universidad de La Laguna

Abstract

In this paper we establish some Abelian theorems for the generalized index ${}_2F_1$-transform introduced by the authors [3].

KEY WORDS: Transformación integral índice, función generalizada, teoremas abelianos.
A.M.S. subjet classification 44A15 46F12.

1 Introducción.

En [2] estudiamos teoremas de tipo Abeliano para la ${}_2F_1$ -transformada índice clásica definida por

$$F(\tau) = \int_0^\infty \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x) f(x) dx \tag{1.1}$$

siendo

$$\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, x) = {}_2F_1(\mu + \frac{1}{2} + i\tau, \mu + \frac{1}{2} - i\tau; \mu + 1; -x) x^\alpha \tag{1.2}$$

donde ${}_2F_1(\mu + \frac{1}{2} + i\tau, \mu + \frac{1}{2} - i\tau; \mu + 1; -x)$ representa la función hipergeométrica de Gauss.

Esta transformada es extendida a funciones generalizadas en [4] mediante la construcción de un espacio de funciones prueba $U_{a,\mu,\alpha}$ constituído por todas las funciones complejas regulares ϕ definidas en el intervalo abierto $\mathbf{I} = (0, \infty)$ y tales que para todo entero no negativo k, existe

$$\gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi) = \sup_{0<t<\infty} \left| (2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2} - \alpha} (t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k \phi(t) \right| \tag{1.3}$$

con $a \in [0, \frac{1}{2})$, μ, $\alpha \in \mathbb{C}$, y siendo A_t el operador diferencial definido por:

$$t^{\alpha-\mu}(t+1)^{-\mu} D_t t^{\mu+1}(t+1)^{\mu+1} D_t t^{-\alpha} \tag{1.4}$$

El núcleo $\mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t)$ pertenece al espacio $U_{a,\mu,\alpha}$.

La ${}_2F_1$-transformación índice generalizada se define por:

$$ {}_2\mathcal{F}_1(f) = F(\tau) = < f(t), \mathbf{F}(\mu, \alpha, \tau, t) >, \quad \tau \in I\!R_+ \tag{1.5}$$

para $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$. $U'_{a,\mu,\alpha}$ denota, como es usual, el dual del espacio $U_{a,\mu,\alpha}$.

El objetivo de este trabajo es establecer algunos teoremas de tipo Abeliano para la transformación generalizada (1.5). Se prueba un teorema que relaciona el comportamiento de una función generalizada

$f(t)$ para $t \to 0^+$ con el de su transformada $F(\tau)$ para $\tau \to \infty$, así como otro que conexiona el comportamiento de una función generalizada $f(t)$ para $t \to \infty$ con el de su transformada $F(\tau)$ para $\tau \to \infty$.

Para asignar límites a funciones generalizadas adoptamos la convención de Zemanian (ver [6]). Además, la necesidad de extender la definición de orden de una distribución a funciones generalizadas pertenecientes a $U'_{a,\mu,\alpha}$, se justifica mediante un teorema de estructura que damos para los elementos de $U'_{a,\mu,\alpha}$, similar al establecido para distribuciones de soporte compacto (cf. [5]).

En lo que sigue, $\mathbf{I}$ denota el intervalo real $(0,\infty)$, $\mathbb{R}_+$ el conjunto de los números reales positivos y $\mathbb{N}_0$ el conjunto de los enteros no negativos. $\mathcal{D}(\mathbf{I})$ y $\mathcal{E}(\mathbf{I})$ son los conocidos espacios de funciones prueba en el intervalo $\mathbf{I}$; $\mathcal{D}'(\mathbf{I})$ y $\mathcal{E}'(\mathbf{I})$ son sus duales [5]. Los espacios $U_{a,\mu,\alpha}$ y $U'_{a,\mu,\alpha}$ fueron introducidos en [4].

2 Estructura de los elementos de $U'_{a,\mu,\alpha}$.

A continuación se da un teorema de estructura para la restricción de un elemento de $U'_{a,\mu,\alpha}$ a $\mathcal{D}(\mathbf{I})$.

Teorema 2.1 *Si $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$, existen $r+1$ funciones h_0, h_1, $\cdots$ $h_r \in L_\infty(\mathbf{I})$ tales que, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{I})$:*

$$< f,\phi >=$$

$$\left\langle \sum_{k=0}^{r} \left(A_t^k\right)'(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}(-D_t)h_k(t), \phi(t) \right\rangle$$

DEMOSTRACIÓN:

Si $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$, por el Teorema 1.8-1 [7] existe una constante $C > 0$ y un $r \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$| < f,\phi > | \le C \max_{0\le m\le r} \sup_{0<t<\infty} \left|(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^m \phi(t)\right|$$

cuyo último término se mantiene acotado por

$$C \max_{0\le m\le r} \|D_t(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^m \phi(t)\|_1$$

donde $\| \ \|_1$ denota la norma usual de $L_1(\mathbf{I})$. Así, si escribimos

$$\mathcal{D}(\mathbf{I}) \longrightarrow L_1^{r+1}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\phi \to \left(D_t(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^m \phi(t)\right)_{m=0,1,2,\cdots r} \to < f,\phi >$$

y puesto que

$$| < f,\phi > | \le C \max_{0\le m\le r} \|D_t(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^m \phi(t)\|_1,$$

será continua la aplicación:

$$Im\,(\mathcal{D}(\mathbf{I}))\longrightarrow L_1^{r+1}(\mathbf{I})$$

$$\left(D_t(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^m \phi(t)\right)_{m=0,1,2,\cdots r} \rightarrow < f,\phi > \tag{2.1}$$

siendo $Im\,(\mathcal{D}(\mathbf{I}))\subset L_1^{r+1}(\mathbf{I})$.

Ahora, por el Teorema de Hahn-Banach, se puede extender (2.1) a una aplicación continua

$$L_1^{r+1}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Por último, como consecuencia del isomorfismo existente entre $(L_1^{r+1})'$ y L_∞^{r+1}, aplicando el Teorema de representación de Riesz, existen funciones h_k, $k=0,1,\cdots r$ de L_∞ tales que

$$< f,\phi >=$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \left\langle h_k(t), D_t[(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}} A_t^k \phi(t)]\right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{k=0}^{r} \left(A_t^k\right)'(2t+1)^a t^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(t+1)^{\frac{\mu}{2}}(-D_t)h_k(t), \phi(t)\right\rangle \quad \square$$

El Teorema 2.1 justifica la extensión de la definición de orden de una distribución de soporte compacto a elementos de $U'_{a,\mu,\alpha}$ dada a continuación.

Definición 2.1 *Si $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$, se define el* orden de f *como el menor entero no negativo r que verifica*

$$|< f,\phi >| \leq C \max_{0\leq k\leq r} \gamma_{k,a,\mu,\alpha}(\phi), \qquad \phi \in U_{a,\mu,\alpha}$$

3 Teoremas de tipo Abeliano para la ${}_2F_1$–transformada índice generalizada.

En primer lugar, recordamos los teoremas Abelianos clásicos probados en [2].

Teorema 3.1 *Sea f una función medible en $(0,\infty)$, tal que*

$$t^{\alpha-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}}(t+1)^{-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}} f(t)$$

sea absolutamente integrable en cualquier intervalo de la forma (T,∞) con $T>0$. Si se asume que

$$\lim_{t\to 0^+} t^{-\gamma} f(t) = \beta \tag{3.1}$$

donde γ y β son complejos tales que $-R_e\alpha < R_e\gamma < R_e(\mu-\alpha)$, se tiene:

$$\lim_{\tau\to\infty} [F(\tau) - \beta G(\alpha,\mu,\gamma,\tau)] = 0 \tag{3.2}$$

siendo

$$G(\alpha,\mu,\gamma,\tau) = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha-\gamma+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-\alpha-\gamma-i\tau)}{\Gamma(\mu+1-\alpha-\gamma)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)} \tag{3.3}$$

y $F(\tau)$ dada por (1.1).

Teorema 3.2 *Sea f(t) una función medible en el intervalo* $(0,\infty)$ *tal que*

$$t^{\alpha-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}}(t+1)^{-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}}f(t)$$

sea absolutamente integrable en cualquier intervalo de la forma $(0,T)$, $0<T<\infty$. *Si se asume que existe un complejo* β *tal que*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\gamma}f(t)=\beta \tag{3.4}$$

donde $\gamma\in\mathbb{C}$ *con* $-R_e\alpha<R_e\gamma<R_e(\mu-\alpha)$, $R_e\gamma>R_e(\frac{\mu}{2}-\alpha)-\frac{1}{2}$, *entonces*

$$\lim_{\tau\to\infty}[F(\tau)-\beta G(\alpha,\mu,\gamma,\tau)]=0$$

con $G(\alpha,\mu,\gamma,\tau)$ *y* $F(\tau)$ *definidos por (3.3) y (1.1), respectivamente.*

Antes de demostrar el primer teorema de tipo Abeliano para funciones generalizadas, se hace preciso recordar también un lema probado en [4], además del establecimiento de otro nuevo.

Lema 3.1 *Para toda función regular* $\phi(t)$ *y todo entero positivo* k, *se tiene*

$$A_t^k\phi(t)=\sum_{j=0}^{2k}t^{j-k}p_{j,k}(t)D_t^j\phi(t) \tag{3.5}$$

con

$$p_{2k,k}(t)=(t+1)^k \quad y \quad p_{2k-1,k}(t)=k(t+1)^{k-1}[\mu-2\alpha+k+2t(\mu-\alpha+k)]$$

siendo $p_{j,k}(t)$ *un polinomio de grado* k, $0\le j\le 2k$ *([4]).*

Lema 3.2 *Sea* $f\in U'_{a,\mu,\alpha}$ *con soporte contenido en* $[T,\infty)$, $(T>0)$ *de orden* r, *siendo* $2r-R_e\mu<\frac{1}{2}$. *Entonces, si* $F(\tau)={}_2\mathcal{F}_1[f]$, *se tiene*

$$\lim_{\tau\to\infty}F(\tau)=0$$

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 1.8-1 [7], existe una constante $C>0$ y un entero r dependientes de f, tales que

$$|<f,\phi>|\le C\max_{0\le n\le r}\gamma_{n,a,\mu,\alpha}(\phi),\qquad \forall\phi\in U_{a,\mu,\alpha}$$

Sea $\xi(x)$ una función regular en $[0,\infty)$ tal que $\xi(x)=1$ en un entorno de $[T,\infty)$ y $\xi(x)=0$ en $[0,\rho]$ con $0<\rho<T$. Se tendrá que

$$|F(\tau)|=|\langle f(x),\xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\rangle|\le$$

$$\le C\max_{0\le n\le r}\gamma_{n,a,\mu,\alpha}(\xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x))$$

Ahora bien, por otra parte:

$$\gamma_{n,a,\mu,\alpha}(\xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x))=\sup_{\rho<x<\infty}\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}}A_x^n\xi(x)\,\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right|$$

y por la expresión de A_x^n dada en (3.5), lo últimamente escrito está acotado por

$$\sup_{\rho<x<\infty}\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}}\sum_{k=0}^{2n} x^{k-n} p_{j,n}(x) D_x^k \xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right| \leq$$

$$\leq M_1 \sum_{k=0}^{2n} \sup_{\rho<x<\infty}\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} x^k D_x^k \xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right| \leq$$

$$\leq M_2 \sum_{k=0}^{2n} \sup_{\rho<x<\infty}\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} x^k \right.$$

$$\left.\sum_{j=0}^{k} D_x^{k-j}[\xi(x)x^\alpha] D_x^j {}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+i\tau,\mu+\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-x)\right| \leq$$

$$\leq M_2 \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k} \sup_{\rho<x<\infty}\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} x^k D_x^{k-j}[\xi(x)x^\alpha] D_x^j {}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+i\tau,\mu+\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-x)\right|$$

Mas, teniendo en cuenta que

$$\sup_{\rho<x<\infty}\left|D_x^{k-j}[\xi(x)x^\alpha]\right| < A x^{R_e\alpha}$$

y que ([1] p. 102):

$$D_x^j {}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+i\tau,\mu+\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-x) =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+j+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+j-i\tau)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)\Gamma(\mu+j+1)} {}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+j+i\tau,\mu+\frac{1}{2}+j-i\tau;\mu++j+1;-x)$$

y como también se tiene, para $\tau\to\infty$:

$$|{}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+j+i\tau,\mu+\frac{1}{2}+j-i\tau;\mu+1;-x)| \leq B\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu-j}[x(x+1)]^{-\frac{1}{2}-R_e\frac{\mu}{2}-j}$$

e igualmente

$$\left|\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+j+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+j-i\tau)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+i\tau)\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-i\tau)}\right| = O(\tau^{2j}),$$

se deduce que

$$\sup_{\rho<x<\infty}\left|(2x+1)^a x^{\frac{\mu}{2}-\alpha}(x+1)^{\frac{\mu}{2}} x^k D_x^{k-j}[\xi(x)x^\alpha] D_x^j {}_2F_1(\mu+\frac{1}{2}+i\tau,\mu+\frac{1}{2}-i\tau;\mu+1;-x)\right| \leq$$

$$\leq B_j \sup_{\rho<x<\infty}\left|(2x+1)^a x^k [x(x+1)]^{-\frac{1}{2}-j}\tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu+j}\right| \leq C_j \tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu+j}$$

con lo cual

$$\gamma_{n,a,\mu,\alpha}\left(\xi(x)\mathbf{F}(\mu,\alpha,\tau,x)\right) \leq M_3 \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k} \sup_{\rho<x<\infty} C_j \tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu+j} \leq M_4 \tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu+2n}$$

de donde se infiere

$$|F(\tau)| \leq M_5 \tau^{-\frac{1}{2}-R_e\mu+2n}$$

Ahora, puesto que $2r - R_e\mu < \frac{1}{2}$, se concluye:

$$\lim_{\tau\to\infty} F(\tau) = 0. \quad \square$$

Estamos ya en condiciones de probar el siguiente teorema:

Teorema 3.3 *Sea $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$ tal que $f = f_1 + f_2$, siendo f_1 una función ordinaria que satisface las hipótesis del Teorema 3.1 y f_2 una función generalizada a la que es aplicable el Lema anterior. Entonces,*

$$\lim_{\tau\to\infty} [F(\tau) - \beta G(\alpha,\mu,\gamma,\tau)] = 0$$

siendo $F(\tau)$ la ${}_2F_1$-transformada generalizada de f, con β y $G(\alpha,\mu,\gamma,\tau)$ definidos como en el Teorema 3.1.

DEMOSTRACIÓN:

Por las consideraciones sobre límites de funciones generalizadas hechas anteriormente, sigue:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\gamma} f_2(x) = 0,$$

con lo cual

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\gamma} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f_1(x) = \beta$$

Además, la ${}_2F_1$-transformada generalizada F_1 de f_1 es igual a su ${}_2F_1$-transformada ordinaria y por consiguiente, en virtud del Teorema 3.1,

$$\lim_{\tau\to\infty} [F_1(\tau) - \beta G(\alpha,\mu,\gamma,\tau)] = 0$$

Si F_2 denota la ${}_2F_1$-transformada generalizada de f_2, sigue por el Lema anterior,

$$\lim_{\tau\to\infty} F_2(\tau) = 0.$$

Como $F(\tau) = F_1(\tau) + F_2(\tau)$, el teorema queda probado. $\square$

Se establece finalmente un segundo teorema de tipo abeliano que relaciona el comportamiento de cierto tipo de funciones generalizadas para $x \to \infty$ con el de su ${}_2F_1$-transformada generalizada para $\tau \to \infty$.

Teorema 3.4 *Sea $f \in U'_{a,\mu,\alpha}$ con $f = f_1 + f_2$, donde f_1 es una función ordinaria que satisface las hipótesis del Teorema 3.2 y f_2 una distribución de soporte compacto. Entonces, si $F(\tau)$ es la ${}_2F_1$-transformada generalizada de f, se tiene que*

$$\lim_{\tau\to\infty} [F(\tau) - \beta G(\alpha,\mu,\gamma,\tau)] = 0$$

estando β y $G(\alpha,\mu,\gamma,\tau)$ definidos en el Teorema 3.2.

DEMOSTRACIÓN:

La ${}_2F_1$-transformada generalizada contiene a la clásica como caso particular. Así, por el Teorema 3.2 y de la asignación de límite para $x \to \infty$ sobre distribuciones de soporte compacto, sigue inmediatamente la conclusión. $\square$

Bibliografía

[1] ERDELYI, A. - MAGNUS, W. - OBERHETTINGER, F. - TRICOMI, F. *Higher transcendental functions*, Vol I, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York (1953).

[2] HAYEK, N., GONZALEZ, B.J. y NEGRIN E.R. *Abelian theorems for the index* ${}_2F_1$*-transform*, Aparecerá en Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia., vol. 15 (1992).

[3] HAYEK, N., NEGRIN, E.R., GONZALEZ, B.J. *Una clase de transformada índice relacionada con la de Olevskii*, Actas XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas (Puerto de la Cruz), vol. I, 401-405, (1989).

[4] HAYEK, N. - GONZALEZ, B.J. *The* ${}_2F_1$*-index transform of generalized functions*, Preprint.

[5] SCHWARTZ, L. *Théorie des distributions*, Hermann & Cie., Paris, (1966).

[6] ZEMANIAN, A.H. *Some Abelian theorems for the distributional Hankel and K tranformations*, SIAM J. Appl. Math., 14, 1255-1265, (1966).

[7] ZEMANIAN, A.H. *Generalized integral transformations*, Interscience Publishers, New York, (1968).

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna (Tenerife)
Spain

Recibido: 1 de Abril de 1992