NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 92, julio de 2016, páginas 135-144

La liebre y la tortuga: un juego de recorrido sin dados

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1]**)**

Resumen Exposición y análisis del juego La Liebre y la Tortuga, un juego de recorrido diseñado por David Parlett: descripción sucinta del juego, su original sistema de avances, modificaciones en sus reglas, diversas ediciones. Aspectos matemáticos de La Liebre y la Tortuga: tablas de valores, funciones, gráficas y series. También reseñamos la respuesta recibida a las cuestiones planteadas en anterior artículo sobre calendarios y polimínos y hacemos la crónica del concurso de diseño de juegos del IES Lucas Martín Espino de Icod de los Vinos (Tenerife).

Palabras clave Descripción y aspectos matemáticos juego La Liebre y la Tortuga. Polimínos en calendarios. Concurso de diseño de juegos para alumnos de secundaria.

Abstract Presentation and analysis of the game The Hare and the Tortoise, a game of course designed by David Parlett: brief description of the game, the original system advances, changes in its rules, various editions. Mathematical aspects of The Hare and the Tortoise: value tables, functions, graphs and series. Also we reviewed the responses received to the questions raised in previous article on calendars and polyominoes and we chronicled the design contest games IES Lucas Martin Espino of Icod (Tenerife).

Keywords Description and mathematical aspects game The Hare and the Tortoise. Polyominoes calendars. Game design contest for high school students.

1. Introducción

Normalmente, los juegos de recorrido llevan un elevado porcentaje de componente del azar en su desarrollo. Y el artilugio más común para introducir ese factor de azar son los dados.

Pero hay unos pocos juegos de este tipo en los que no interviene el azar o lo hace en una mínima medida, y se utilizan otros elementos para el avance por las casillas.

Este es el caso del original juego de *La liebre y la tortuga*.

Otros son juegos que surgen como variantes de otros ya conocidos como *El parchís "top secret"*.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

J U E G O S

2. La liebre y la tortuga

Basado en la conocida fábula de Esopo de igual nombre (**Χελώνη κα λαγωός)** luego reescrita por Jean de La Fontaine y Félix María Samaniego, fue inventado por David Parlett en 1973 y estuvo a la venta, por primera vez, en junio de 1974. La *figura 1* muestra el primer diseño de Parlett con el recorrido a realizar por los jugadores y la *figura 2* la primera edición que fue publicado por "*Intellect Games*" con un estilo victoriano. En 1975 ya lo situaron los lectores de la revista "*Games & Puzzles"* entre los 10 mejores juegos tras *Monopoly*, *Mastermind* y *Scrabble*, pero por delante de *Cluedo*, todos ellos juegos bien conocidos. Con más de 40 años de existencia ha sido publicado en numerosos países. La variante de los hermanos Grimm de la fábula, enfrenta a la liebre con un erizo (*figura 3*) que gana al orejudo animal haciendo una carrera de relevo con sus familiares y es como aparece el juego en la versión alemana (publicada por Ravensburger en 1978), cuando ganó el ahora prestigioso galardón **Spiel des Jahres** de 1979, compitiendo con juegos como *Acquire* y *Blockade* de *Sid Sickson*, *Alaska* de *Eric Solomon*, el electrónico *Simon* o el magnético *Shogun*, alguno ya mencionado en anteriores artículos nuestros.

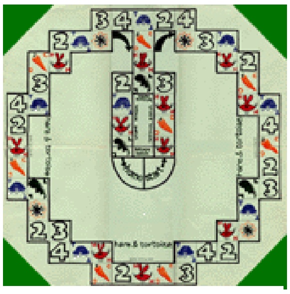
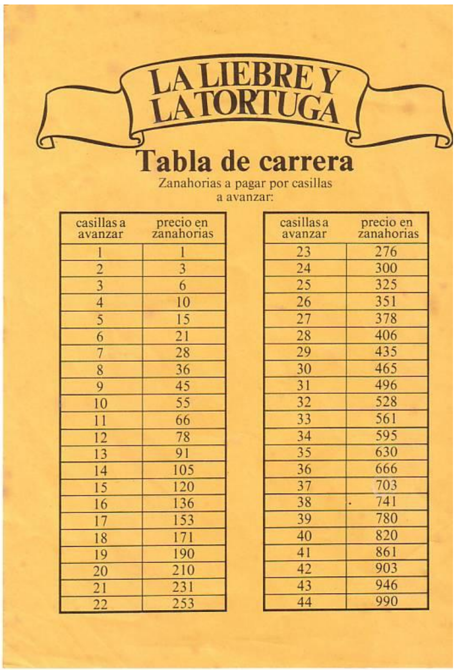


Figura 1

Figura 2

La principal característica del juego está en la manera de avanzar. El movimiento de las fichas de los jugadores no se fundamenta en un elemento de azar como los dados o tarjetas de avance; los jugadores mueven sus fichas una distancia que depende de la estrategia que sigan y utilizando tarjetas con zanahorias que hacen el papel de combustible para el avance. Estos avances vienen dados en una tabla como la de la *figura 4*. La cuestión está en que el consumo no es lineal, puede usarse una zanahoria por casilla para avanzar de una en una a velocidad de tortuga y con el riesgo de quedarse atrás, o pueden usarse 55 hortalizas para avanzar 10 casillas con aceleración de liebre y consumir el combustible teniendo que esperar turnos para recuperarlo. Por tanto para moverse n casillas, n natural, el número de zanahorias necesarias es:

Figura 3



LA LIEBRE Y LA TORTUGA

Tabla de carrera

Zanahorias a pagar por casillas a avanzar:

casillas a avanzar	precio en zanahorias	casillas a avanzar	precio en zanahorias
1	1	23	276
2	3	24	300
3	6	25	325
4	10	26	351
5	15	27	378
6	21	28	406
7	28	29	435
8	36	30	465
9	45	31	496
10	55	32	528
11	66	33	561
12	78	34	595
13	91	35	630
14	105	36	666
15	120	37	703
16	136	38	741
17	153	39	780
18	171	40	820
19	190	41	861
20	210	42	903
21	231	43	946
22	253	44	990

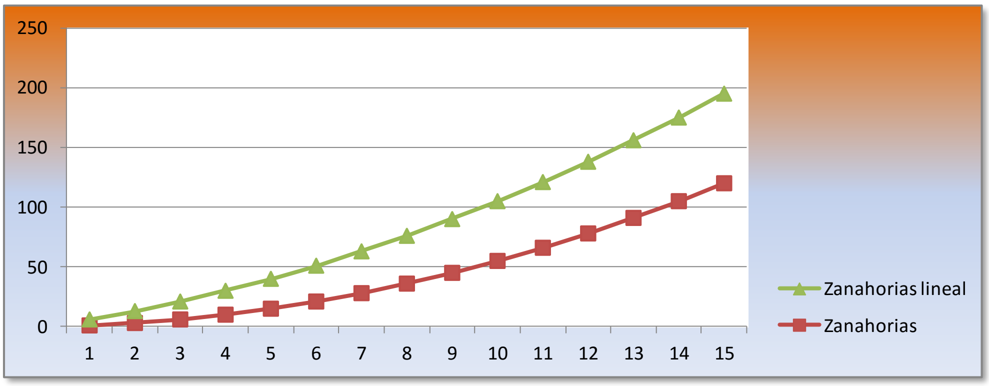
Figura 4

$$\sum_{i=1}^{n} n$$

lo que conduce a la siguiente función que relaciona el número de zanahorias necesarias *y=f(x)*, siendo la variable *x* la cantidad de casillas a recorrer.

$$y = 0.5x^2 + 0.5x$$

Podemos ver su gráfica, comparada con un avance lineal, en la siguiente *gráfica 1*



Gráfica 1

Realizada con los valores de la *tabla 1* siguiente:

Avances	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Zanahorias	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
Zanahorias lineal	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75

Tabla 1

Se trata de un juego donde prima la estrategia, aunque el azar, en forma de 10 tarjetas-liebre con instrucciones como “No podrás jugar en tu próximo turno”, “Adelanta tu ficha de modo que ganes una posición dentro del conjunto de los que jugáis”, “Tu última tirada te resulta gratis, … produce incidencias no previsibles en el desarrollo del recorrido (En la primera edición en español). Otras normas del juego como el limitar con cuántas zanahorias se puede llegar a la casilla 64, el tener que deshacerse de las tres lechugas por el camino, el que la reposición del alimento dependa de la posición relativa en la carreta por llegar a la última casilla, hace que el juego tenga constantes cambios en las posiciones y en las expectativas de llegar al final, haciéndolo dinámico y muy entretenido.

El juego, poco conocido, permite en nuestra opinión el desarrollo de conceptos relacionados con las matemáticas. Por un lado, el análisis de situaciones problemáticas, pues en cada jugada se debe evaluar qué hacer en función de las condiciones del juego en ese momento. Su práctica como actividad en la clase de matemáticas nos permite plantear una serie de cuestiones a investigar con los alumnos. Como ejemplos, podemos intentar estudiar las siguientes cuestiones:

- ¿Qué relación existe entre las cantidades de zanahorias y las casillas que permiten avanzar?
- ¿Qué función expresa esta relación?
- Calcula cuántas zanahorias serán necesarias para avanzar 50, 60, 64, n casillas.
- Juega alguna partida con una tabla de avances que siga una expresión lineal, como en la tabla 1, y comenta el desarrollo del juego en este caso.
- Mira cómo se distribuyen las casillas de cada tipo en el recorrido y plantea hipótesis de por qué están a esas distancias una de otras.

Para ello se puede comenzar por trasladar a unas tablas valores tales como los que se muestran en la *tabla 2,* y a partir de ahí conjeturar.

Casilla		Casilla		Casilla	
Nº	Tipo	Nº	Tipo	Nº	Tipo
1	Liebre	22	Lechuga	43	Tortuga
2	Zanahorias	23	2	44	3
3	Liebre	24	Tortuga	45	4
4	3	25	Liebre	46	Liebre
5	Zanahorias	26	Zanahorias	47	2
6	Liebre	27	4	48	1-6
7	Lechuga	28	3	49	Zanahorias
8	Tortuga	29	2	50	Tortuga
9	4	30	Tortuga	51	Liebre
10	2	31	Liebre	52	3
11	Tortuga	32	1-6	53	2
12	3	33	Zanahorias	54	4
13	Zanahorias	34	Liebre	55	Zanahorias
14	Liebre	35	2	56	Tortuga
15	Tortuga	36	3	57	Lechuga
16	1-6	37	Tortuga	58	Liebre
17	2	38	Zanahorias	59	Zanahorias
18	4	39	Liebre	60	2
19	Tortuga	40	Zanahorias	61	Liebre
20	3	41	2	62	Lechuga
21	Zanahorias	42	Lechuga	63	Liebre
				64	**META**

Veces		Casillas
Liebre	13	1, 3, 6, 14, 25, 31, 34, 39, 46, 51, 58, 61, 63
Zanahorias	11	2, 5, 13, 21, 26, 33, 38, 40, 49, 55, 59
Tortuga	10	8, 11, 15, 19, 24, 30, 37, 43, 50, 56
Lechuga	5	7, 22, 42, 57, 62
2	9	10, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 60
3	7	4, 12, 0, 28, 36, 44, 52,
4	5	9, 18, 27, 45, 54
1-6	3	16, 32, 48

Tabla 2

Figura 5

Figura 6

La primera versión en español es de Juegos EDUCA (ref. 4691) bajo licencia de Ravensburger en 1980. Una reciente versión del juego en español, reeditada por Devir utiliza un tablero de diseño más actual y las fichas son pequeñas liebres de colores. Figuras 5 y 6.

Podemos apreciar alguna diferencia entre ambos tableros, pues Parlett modificó en 1987 la distribución de las casillas. Así, la primera lechuga pasó de la casilla 7 a la 10 porque permitía al primer jugador alcanzarla en su primer movimiento, dándole cierta ventaja. Reordenó los cuadros anteriores al 10 y también los finales, pues con esta modificación hace más dinámico el final de la partida. Pero también las tarjetas-liebre han sido modificadas, entre otras razones porque cupiesen en tres idiomas (español, catalán y portugués). Curioso. Otra modificación propuesta, pero que no hemos visto reflejada en las reglas hasta ahora, es la de que la liebre puede quedarse dos turnos sin mover cuando cae en la casilla-liebre, tumbando el pequeño orejudo, y se levanta y reanuda su camino en la siguiente jugada o si algún otro jugador lo adelanta, se incorpora en su turno inmediatamente. Lo que recuerda que en la fábula de Esopo el animal se queda dormido durante la carrera, lo que permite a la tortuga ganar el desafío.

Son muchas las variantes del juego, sobre todo modificando alguna de sus reglas. Podemos curiosear en la página de David Parlett[i] para versiones publicadas en diferentes países (incluidas las versiones piratas). Otra presentación detallada, comparando las distintas versiones, es la publicada por Greg Aleknevicus en The Games Journal en 2001.[ii]

En la versión de la Editorial Rio Grande[iii], las tarjetas son sustituidas por estas otras reglas, que usando un dado dan el porcentaje aleatorio que el juego siempre ha tenido.

Acciones versión Rio Grande 2000

position in race

	1	2	3	4	5	6
	Pierdes el siguiente turno	Pierdes el siguiente turno	Pierdes el siguiente turno	Pierdes el siguiente turno	Pierdes el siguiente turno	Pierdes el siguiente turno
	Hacia atrás 1 casilla zanahoria	Hacia atrás 1 casilla zanahoria	Hacia atrás 1 casilla zanahoria	Hacia atrás 1 casilla zanahoria	Hacia adelante 1 casilla zanahoria	Hacia adelante 1 casilla zanahoria
	Hacia atrás 1 posición	Hacia atrás 1 posición	Hacia atrás 1 posición	Hacia adelante 1 posición	Hacia adelante 1 posición	Hacia adelante 1 posición
	Toma o deja 10 zanahorias	Toma o deja 10 zanahorias	Este movimiento fue gratis	Este movimiento fue gratis	Este movimiento fue gratis	Este movimiento fue gratis y toma o deja 10 zanahorias
	Come 1 zanahoria	Come 1 lechuga	Come 1 lechuga	Come 1 lechuga	Come 1 lechuga	Come 1 lechuga
	Mueve de nuevo	Mueve de nuevo	Mueve de nuevo	Mueve de nuevo	Mueve de nuevo	Mueve de nuevo

Otro ejemplo de modificación estriba en el contenido de las tarjetas-liebre. Las que siguen son una alternativa a las originales del juego.

Da a cada jugador detrás de ti diez zanahorias. Si no tienes suficientes da cinco o incluso una a cada uno. Si alguien no las quiere las dejas en el mazo.	Si hay más jugadores detrás tuya que delante, pierdes 1 turno, en otro caso ¡ganas un turno extra!
Pasas a tener exactamente una reserva de 65 zanahorias.	Coge 10 zanahorias por cada lechuga que tengas. Si no tienes lechugas pierdes un turno.
¡Pierdes la mitad de tus zanahorias!	El último movimiento era gratis, recupera las zanahorias.
Muestras a los demás tus zanahorias y dices en alto la cantidad.	Mezcla las cartas de Liebre y recibe por el trabajito una zanahoria de cada jugador. *Esta carta se mezcla con el mazo*

3. Las soluciones de Luis Blanco al problema del calendario con pentaminos

Nuestro ya habitual colaborador Luis Blanco nos ha enviado un completísimo conjunto de soluciones al problema propuesto en anterior artículo publicado en el NÚMEROS 91. Para ello sigue una metodología de resolución de problemas con las fases de comprensión, de pensar, de ensayo-error, de organización de la información, de ejecución, resolución y comprobación de las soluciones. Con un tablero como el de la figura, podemos ensayar usando los poliminos que nos proponen, las posibles soluciones.

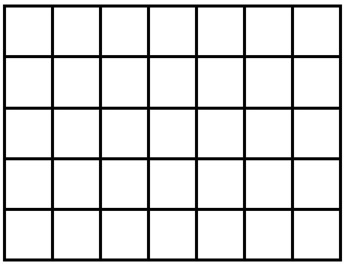
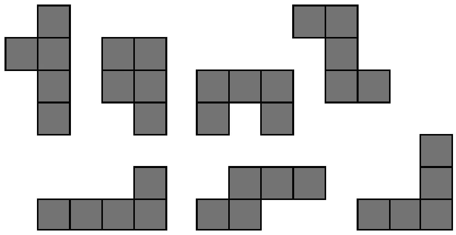


Figura 7

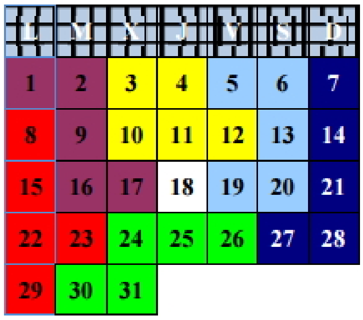
Este es el enunciado

Calendario de pentaminos

Le presentamos un rompecabezas con pentominos, el Juego del Calendario. Está tomado del blog MatESASv . El Juego del Calendario consiste en fijar uno de los 31 días naturales del calendario y cubrir los restantes usando, sin repetir ninguna, seis de los siete pentaminos con las siguientes formas:



Ejemplo: Ana festeja su cumpleaños el día 18.



¿Será posible fijar tu día de cumpleaños y cubrir los días restantes con seis de los siete pentaminos elegidos? ¡Ten en cuenta que no se puede repetir piezas! Ya hemos visto una solución para el día 18. ¿Podremos encontrar solución para cada uno de los días del mes? Cuando el mes no sea de 31 días utilizaríamos un tetramino o un domino (trimino si es febrero y bisiesto).

Y dice Luis:

Fase de comprensión.

Datos:

Siete pentaminós con formas determinadas por la imagen.

3 pentominós de 4x2; 2 pentominós de 3x3; 2 pentominós de 3x2

Una tabla irregular de 31 cuadrados uno por cada día del mes, con 7 cuadrados de largo, uno por cada día de la semana.

Objetivo:

Conseguir con seis de los siete pentominós sin repetir ninguno, tapar toda la parrilla menos un cuadrado, siendo este cuadrado cualquiera de los 31 de la tabla.

Relaciones:

Las distintas formas de unir unos pentominós con otros dentro de la tabla.

<u>Diagrama:</u>

La tabla con forma de hoja de calendario.

Fase de pensar.

<u>Ensayo error.</u>

<u>Organizar la información.</u>

Fase de ejecutar.

Se utilizarán las dos estrategias a la vez.

Consideraciones a tener en cuenta:

Cuanto más grandes son las piezas (pentominós) más difícil es colocarlas todas de forma que cubran el espacio previsto. Por ello, voy a centrar el problema en resolver toda la casuística de un mes de 31 días, que exige la colocación de los 6 pentominós, ya que es más fácil encontrar una solución en un mes de 30 días con un tetraminó (el que sea) o el mes de febrero bisiesto con un triminó (el que sea) o el mes de febrero no bisiesto con un biminó.

En segundo lugar, antes de empezar con la estrategia de ensayo error colocando piezas sobre el calendario, debemos delimitar cuántas soluciones hay que buscar para poder afirmar que es posible cubrir cualquier calendario independientemente del día que debe quedar al descubierto.

Para ello analizaremos las diferentes formas perimetrales que puede adoptar el calendario. Y observamos que sólo hay cuatro formas:

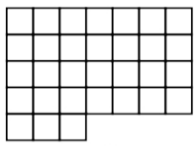


Fig 1

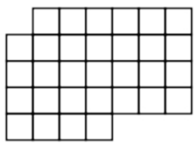


Fig 2

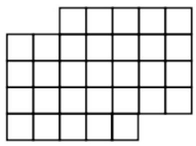


Fig 3

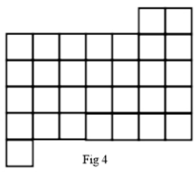


Fig 4

La Figura 1 corresponde a un mes de 31 días donde el día 1 coincide con el lunes.
La Figura 2 coincide con un mes de 31 días donde el día 1 coincide con el martes.
La Figura 3 coincide con un mes de 31 dias donde el día 1 coincide con el miércoles.
La Figura 2 rotada 180º coincide con un mes de 31 días donde el día 1 coincide con jueves.
La Figura 1 rotada 180º coincide con un mes de 31 días donde el día 1 coincide con viernes.
La Figura 4 coincide con un mes de 31 días donde el día 1 coincide con el sábado.
La Figura 4 rotada 180º coincide con un mes de 31 días donde el día 1 coincide con domingo.

De estas consideraciones, todo parece apuntar que el número de soluciones que hay que buscar es de 31 X 4 = 124. Pero se puede reducir un poco el número de soluciones ya que la tabla (Fig 3) es simétrica al ser rotada 180º, por tanto, de esta tabla sólo hay que buscar la mitad de soluciones, ya que la solución para el día 1 es válida también para el día 31, las del día 2 es válida también para el día 30, etc. Por tanto, de esta tabla solo necesitamos obtener 16 soluciones, reduciendo así el total a 124 - 15 = 119.

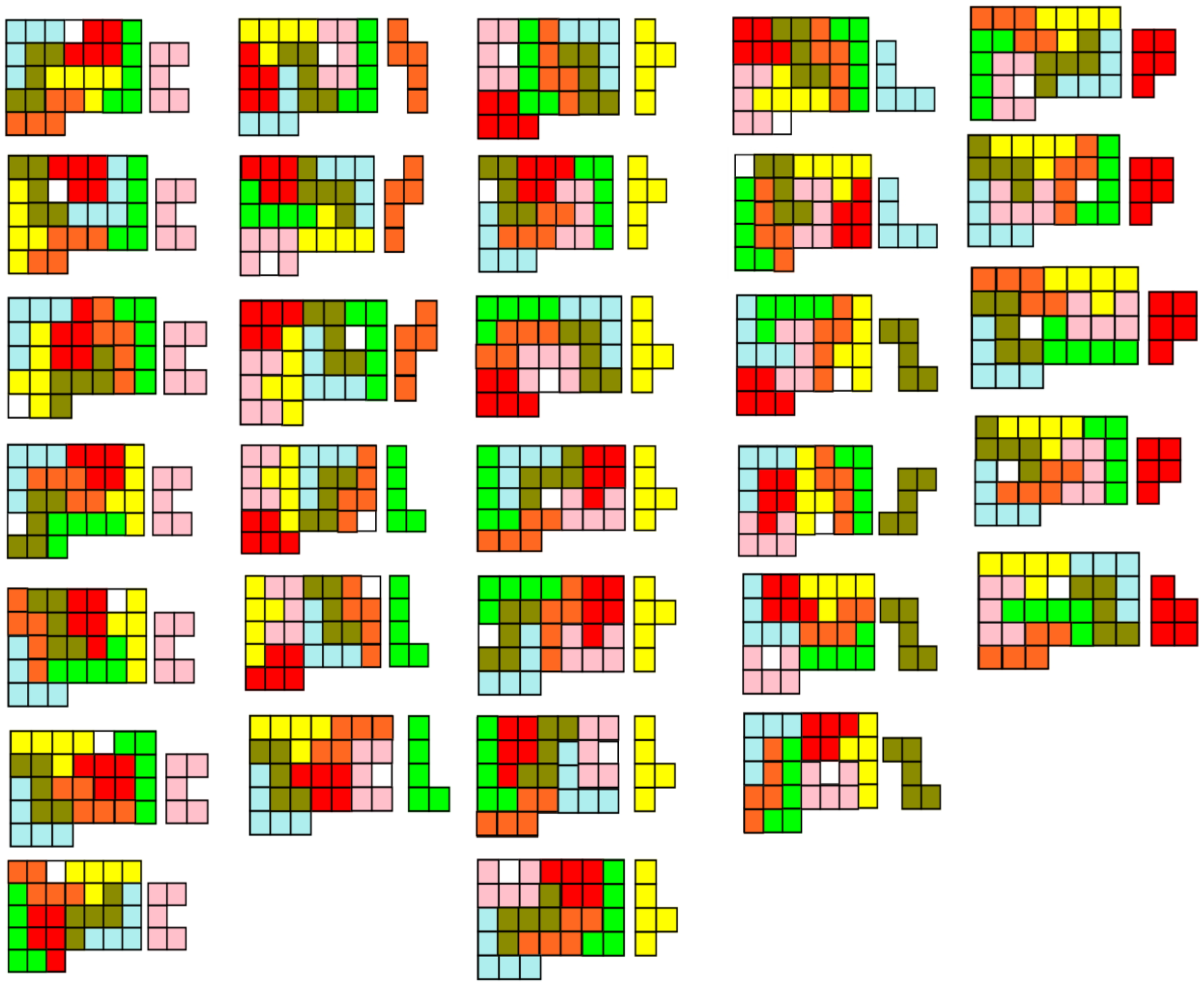
Lo mismo ocurre con la tabla de la figura 4, ya que solo es necesario buscar soluciones hasta el día 16, pues al rotar 180º esta figura obtenemos las soluciones para el mes que comienza en domingo, reduciendo así el total de soluciones a 119 - 15 = 104.

Es ahora cuando procedemos a utilizar la estrategia Ensayo-error exhaustivo para encontrar al menos una solución para cada día de la semana.

Una de las dificultades que nos encontramos cuando hay que resolver este tipo de problemas, es el engorroso trabajo de tener que elaborar las piezas. Solvento esta dificultad utilizando el software de la Pizarra digital interactiva "Notebook", que permite en unos pocos minutos diseñar las piezas e ir guardando las soluciones en distintas diapositivas.

Luis encuentra soluciones para los distintos casos. Publicamos solo una parte de ellas por problemas de espacio.

Soluciones para el mes de 31 días en las cuales el día 1 coincide con lunes y girando 180º cuando el día 1 coincide en viernes.



Solución.

No hay solución para todos los calendarios de 31 días. Sí hay solución para cualquier día siempre y cuando el día 1 no sea sábado o domingo.

Fase de Resolver

Comprobación:

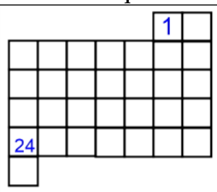
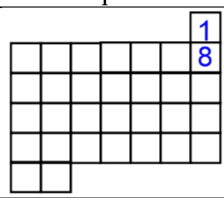
Podemos comprobar que hay dos fechas en las que es imposible.

Por ejemplo, para el día 8, cuando coincide en domingo o para el día 24 cuando coincide en lunes, es imposible cubrir el calendario con los pentominós.

Sí es posible si consideráramos que el día 1 cae en cualquier día de la semana que no sea sábado o domingo, y se aportan las soluciones.

Análisis.

Aunque se han intentado encontrar todas las soluciones en que es posible, bastaba encontrar una en la que fuera imposible colocar los pentominós para proceder a responder sobre la imposibilidad del objetivo.

Cuando el día 1 cae en sábado, es imposible rellenar el calendario si el cumpleaños es el día 24, ya que el día 31 queda aislado.	Cuando el día 1 cae en domingo, es imposible rellenar el calendario si el cumpleaños es el día 8, ya que el día 1 queda aislado.
	

Tampoco se ha encontrado una solución para estos días del calendario:

Cuando el día 1 cae en sábado, no se ha encontrado solución si el cumpleaños es el día 16, aunque no se descarta la posibilidad de encontrarla.	Cuando el día 1 cae en domingo, no se ha encontrado solución si el cumpleaños es el día 16, aunque no se descarta la posibilidad de encontrarla.

Respuesta:

Es imposible fijar el día de mi cumpleaños y cubrir los días restantes con seis de los siete pentaminos elegidos si en el calendario, el día 1 es sábado y mi cumpleaños es el día 24 y si el día 1 es domingo y mi cumpleaños es el día 8.

Pues aquí queda propuesto un desafío para nuestros lectores. Seguramente existe algún programa donde dando el tablero y las piezas nos resuelva el problema, pero entreténganse en dibujarlo, tomar las piezas de un juego de pentaminos (o construirlos) y, manipulando, tratar de encontrar la solución o de demostrar que no existe.

También queremos contarles que el Komando Matemático visitó hace unos días el IES Lucas Martín Espino de Icod de Los Vinos, por invitación de la profesora Carmen Tavío, dentro de una Semana Cultural que realizaba el Centro. Aparte de lo estupendamente que resultó la actividad tuvimos una sorpresa muy agradable: esta profesora amiga había realizado con sus alumnos una multitud de experiencias matemáticas con sus alumnos, entre las cuales nos sorprendió mucho un trabajo consistente en diseñar un juego. Los alumnos, en grupo o individualmente, debían presentar el tablero, las fichas y las reglas de un juego original. Para ello, naturalmente, podían inspirarse en cualquier otro juego que conocieran, mezclar reglas o ser totalmente originales si eran capaces.

Lo sorprendente fue la participación de todo el alumnado y la consiguiente exposición de trabajos aprovechando la Semana Cultural del Centro. Hicimos una visita a la exposición e hicimos unas cuantas fotos de los juegos presentados. Hemos pedido a la profesora que pida a sus alumnos nos envíen las instrucciones de dichos juegos con la intención de publicar los dos o tres que consideremos mejores, naturalmente indicando los nombres de los autores de cada uno de ellos. Como adelanto nos complace insertar aquí algunas de las fotos que tomamos para que se hagan una idea de la buena elaboración de los juegos por parte de los alumnos.








¿Verdad que lucen muy bien? Creemos que vale la pena difundir este excelente trabajo.

Iniciativas como las del amigo Luis o la de nuestra amiga Carmen son las que esperamos por parte de nuestros lectores. Así que sigan el ejemplo. Nosotros atendemos todo lo que nos llegue y damos cumplida cuenta de sus escritos.

Hasta el próximo NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas pues. Un saludo.

Club Matemático

---

[i] http://www.parlettgames.uk/haretort/htvariants.html (mayo 2016)
[ii] http://www.thegamesjournal.com/articles/Hare&Tortoise.shtml, (mayo 2016)
[iii] Cuadro tomado de la página http://ludotonica.com/archivos/808 donde hay una completa referencia al juego. (mayo 2016)

Bibliografía

La mayor parte de lo publicado sobre este juego está en la WEB. Las referencias más conocidas publicadas en papel son las siguientes:

Caps i Mans; Juegos; El País semanal, ≈1980

Comas i Coma, O; "El mundo en juegos"; p. 88; RBA Libros, Barcelona, 2005