XXIV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

Juan A. García Cruz

El pasado año, del 4 al 12 de Julio, tuvo lugar en París la XXIV Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Concurrieron a esta competición, dirigida a estudiantes de enseñanza media, un total de treinta y dos equipos nacionales; por primera vez participó una delegación española.

Aunque la competición es personal, al final se establece una clasificación oficiosa por naciones. Cada equipo nacional se compone de un máximo de seis participantes; España concurrió con el mínimo.

El desarrollo de la competición constó de dos sesiones, cada una de tres problemas y un tiempo por sesión de cuatro horas y media. Cada problema se puntuó con un máximo de 7. Helos aquí :

1. Encontrar todas las funciones f, definidas en los reales positivos y que toman valores reales positivos, que satisfagan las dos condiciones siguientes:

(i) $f(x)f(y) = yf(x)$, para todo x, y positivos.

(ii) $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$

2. Sea A uno de los puntos de intersección de dos circunferencias coplanarias no iguales C_1 y C_2 , con centros respectivos en O_1 y O_2. Una de las tangentes comunes toca a C_1 en P_1 y a C_2 en P_2 , mientras que la otra toca a C_1 en Q_1 y a C_2 en Q_2 . Sea M_1 el punto medio de P_1Q_1 y M_2 el punto medio de P_2Q_2 . Probar que los ángulos O_1AO_2 y M_1AM_2 son iguales.

3. Sean a, b, c enteros positivos tales que ningún par de ellos

tiene divisor común mayor que 1. Mostrar que

$$2abc - ab - bc - ca$$

es el mayor entero que no se puede expresar en la forma

$$xbc + yca + zab$$

donde x,y,z son enteros no negativos.

4. Sea ABC un triángulo equilátero, y E el conjunto de todos los puntos contenidos en los tres segmentos AB, BC y CA (incluidos A,B,C). Determinar si, para toda partición de E en dos subconjuntos disjuntos, al menos uno de los subconjuntos contiene los vértices de un triángulo rectángulo. Justifica tu respuesta.

5. ¿Es posible elegir 1983 enteros positivos distintos, todos ellos menores o iguales a 10^5, y tal que no tres de los cuales sean términos consecutivos de una progresión aritmética? Justifica tu respuesta.

6. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0$$

Determinar cuándo se da la igualdad.

Por equipos nacionales, Alemania Federal ganó la competición con un total de 212 puntos. Tres de sus componentes realizaron correctamente todos los problemas, hecho sólo igualado por uno de los componentes del equipo de la Unión Soviética, que quedó en cuarto lugar con 169 puntos.

El segundo y tercer lugar fueron para los equipos de Estados Unidos y Hungría, con 171 y 170 puntos, respectivamente.

España quedó en el lugar veintitrés, con 37 puntos.

Cerraron la clasificación Kuwait e Italia, puestos treinta y uno y treinta y dos, con 4 y 2 puntos.