Texto del discurso de ingreso del Dr. D. Jorge J. Betancor Pérez:

Sobre el comportamiento en la frontera de ciertas clases de funciones.

Jorge J. Betancor Pérez

Exmo. Sr. Presidente.

Ilmos. Sres Académicos.

Señoras y Señores.

Quiero comenzar mostrando mi más sincero agradecimiento a los Ilustres Académicos que me han propuesto para tan alto honor, y a los restantes miembros de la Academia que han aprobado la propuesta.

Soy sólo la fachada de una casa. Detrás están mis padres, con su entrega y comprensión marcaron siempre mi camino y entendieron, con inmensa solidaridad, mi forma, seguro no siempre correcta, de seguirlo. ¡Cúanto me aguantaron ellos y mis hermanos aunque ahora se rían!. Asunción, la compañera que recorre conmigo siempre el camino, a veces bajo el sol, otras mojándonos con la lluvia. Isabel y Paula son nuestras mayores alegrías. Esto y todo es para ellos.

Mis maestros están también detrás de mis palabras. En la escuela primaria (el colegio San Isidoro en Las Palmas de G.C. y el colegio público Dr. José Melián en el Cruce de Arinaga), en el Instituto (Agüimes y Alonso Quesada en Las Palmas de G.C.) y en la Universidad (Facultad de Matemáticas de La Laguna) siempre encontré buenos profesores que con paciencia me enseñaron mucho más que Matemáticas, Literatura o Geografía. Mi agradecimiento especial a los Doctores D. Nácere Hayek Calil, D. José Manuel Méndez Pérez y D. José Rodríguez Expósito, de ellos he recibido mucho más de lo que merecía.

Siempre he contado con la colaboración de mis compañeros en el Departamento de Análisis

Matemático de la Universidad de La Laguna, tanto en las tareas docentes como de investigación. En particular, quisiera mencionar a los Profesores Juan Carlos Fariña Gil, con quien comparto despacho desde que inicié mi actividad universitaria hace ya casi 14 años, y Juan Diego Betancor Ortiz, siempre me han dado muestras de su generosidad.

Desde hace un tiempo y especialmente en los últimos dias, las matemáticas son para mi, casi unicamente, un manojo de buenas amistades y afectos. Uno de los más entrañables se ha ido para siempre este fin de semana a consecuencia de un accidente de tráfico. Quiero dedicar esta conferencia a la memoria de nuestro buen amigo el Prof. José Javier Guadalupe.

Presentamos en esta conferencia, donde no pretendemos ser exhaustivos, algunos resultados relevantes en relación con el comportamiento en la frontera de algunas clases de funciones armónicas y holomorfas. Existen importantes monografías dedicadas a este tema entre las que destacamos la de Ch. Pommerenke [34], reseñada en la bibliografía. Comentamos, para finalizar, algunos problemas aún no estudiados y que constituyen, en alguna medida, una continuación natural de las cuestiones tratadas por nosotros en nuestro trabajo [8] realizado en colaboración con los Profesores Juan C. Fariña (Universidad de La Laguna) y José G. Llorente (Universidad Autónoma de Barcelona).

Sea u una función compleja definida en $\mathbb{B}^n$, la bola unidad de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Se dice que u tiene valor asintótico $\lambda \in \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en el punto $\zeta \in \partial\mathbb{B}^n$, la frontera de $\mathbb{B}^n$, si existe un camino $\gamma : [0,1) \longrightarrow \mathbb{B}^n$ tal que, $\gamma(t) \rightarrow \zeta$ y $u(\gamma(t)) \rightarrow \lambda$, cuando $t \rightarrow 1^-$. De forma abreviada diremos que, en este caso, $\zeta \in A(u,\lambda)$. Definimos también el conjunto $A(u) = \cup_{\lambda \in \mathbb{C}_\infty} A(u,\lambda)$. Un punto $\zeta \in \partial\mathbb{B}^n$ está en el conjunto de Fatou de u, escrito $\zeta \in \mathcal{F}(u)$, cuando existe $\lim_{r \rightarrow 1^-} u(r\zeta)$ y es finito.

En las definiciones anteriores cuando nos referimos a funciones u reales sustituimos el conjunto $\mathbb{C}_\infty$ por $[-\infty, +\infty]$.

El teorema conocido como del punto ambiguo de Baghemil [5] establece que si u es una función definida en $\mathbb{B}^2$ y con valores en $\mathbb{C}_\infty$, existe a lo sumo un conjunto contable de puntos ambiguos. Un punto $\zeta \in \partial\mathbb{B}^2$ se dice ambiguo si existen dos arcos γ_1 y γ_2 en $\mathbb{B}^2$ que terminan en ζ, siendo los derivados de $\{u(z) : z \in \{\gamma_1\}\}$ y $\{u(z) : z \in \{\gamma_2\}\}$ disjuntos. En [6] se presentan ejemplos que muestran que el resultado en esta forma no es cierto en dimensión superior. Una versión del teorema de Baghemil sobre $\mathbb{B}^n$, $n \geq 3$, donde uno de los arcos es sustituido por una superficie, fue dado por P.J. Rippon [35].

Decimos que una función f, analítica en el disco unidad $\mathbb{B}^2$, es una función de Bloch (abreviadamente $f \in \mathcal{B}$) si

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z \in \mathbb{B}^2} (1 - |z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

Las funciones de Bloch tienen una importante relación con las funciones univalentes. Concretamente, si g es univalente en $\mathbb{B}^2$ entonces $f = log(g') \in \mathcal{B}$, y si $f \in \mathcal{B}$, siendo $f = clog(g')$, donde g es analítica en $\mathbb{B}^2$, entonces g es univalente cuando c es suficientemente pequeña. Las principales propiedades de las funciones de Bloch pueden ser encontradas en [3].

Existen funciones en $\mathcal{B}$ que carecen de límite radial en cada punto de $\partial\mathbb{B}^2$. Un ejemplo de esto es la serie lagunar de Hadamard

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \quad z \in \mathbb{B}^2.$$

Si f es una función definida sobre $\mathbb{B}^2$, denotamos por $\mathcal{P}(f)$ el conjunto constituido por aquellos $\zeta \in \partial\mathbb{B}^2$ que tienen la propiedad siguiente: la imagen $f(\Delta_\alpha(\zeta))$ de $\Delta_\alpha(\zeta)$ por f es densa en $\mathbb{C}$, para cada $\alpha > 0$, donde $\Delta_\alpha(\zeta)$ representa la α-región de Stolz en ζ.

Un teorema clásico de Plessner ([34, Chap. 6]) establece que si $f \in \mathcal{B}$ entonces la frontera $\partial\mathbb{B}^2$ de $\mathbb{B}^2$ se descompone como sigue

$$\partial\mathbb{B}^2 = \mathcal{P}(f) \cup \mathcal{F}(f) \cup \mathcal{E}(f),$$

donde $\mathcal{E}(f)$ es un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Recientemente, S. Rohde [39] ha estudiado el comportamiento de la función $f \in \mathcal{B}$ en el conjunto $\mathcal{E}(f)$. En particular, él restringe su atención al siguiente subconjunto de $\mathcal{B}$,

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{f \in \mathcal{B} : \ f(0) = 0, \ \|f\|_{\mathcal{B}} = 1 \ y \ |\mathcal{F}(f)| = 0\}.$$

La serie lagunar anteriormente mencionada está en esta clase $\widetilde{B}$, así como la función $log(g')$, donde g representa una transformación conforme de $\mathbb{B}^2$ en el dominio conocido como copo de nieve.

Una de las principales propiedades obtenidas por S. Rohde en [39] es la que ahora presentamos. Antes de enunciarla recordamos la definición de dimensión de Hausdorff de un conjunto $E \subset \partial\mathbb{B}^2$. Sean $E \subset \partial\mathbb{B}^2$ y $0 \leq \alpha \leq 1$. Se define el contenido de Hausdorff α-dimensional $M_\alpha(E)$, de E, como el ínfimo de las sumas

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|^\alpha,$$

donde $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de E por arcos de $\partial\mathbb{B}^2$, e $|I_k|$ representa la longitud de I_k, para cada $k \in \mathbb{N}$. La dimensión de Hausdorff $dim(E)$ de E se define como sigue

$$dim(E) = inf\{\alpha \in [0,1] : M_\alpha(E) = 0\}.$$

Proposición 1 . *Sean $f \in \widetilde{B}$, $a > 0$ y $\gamma : [0,1) \to \mathbb{C}$ una curva continua tal que $\gamma(0) = 0$. Existe un conjunto $E_{\gamma,a} \subset \partial\mathbb{B}^2$ siendo*

$$dim\, E_{\gamma,a} \geq 1 - \frac{K}{a} \tag{0.1}$$

y tal que, para cada $\zeta \in E_{\gamma,a}$, se tiene un homeomorfismo $\phi_\zeta : [0,1) \to [0,1)$ verificando

$$\sup_{0 \leq r < 1} |f(r\zeta) - \gamma(\phi_\zeta(r))| \leq a. \tag{0.2}$$

Aquí K denota una constante universal.

Si definimos $E_\gamma = \cup_{a>0} E_{\gamma,a}$, entonces **(0.1)** implica que $dim(E_\gamma) = 1$. Observamos que (0.2) nos dice que la imagen de un radio que termina en ζ *sigue* la curva dada por γ (después de una reparametrización) en un a-entorno. Además, fijada una curva γ (en las condiciones de la Proposición 1) existe un conjunto E_γ de $\partial\mathbb{B}^2$ con dimensión de Hausdorff 1 tal que, para cada punto $\zeta \in E_\gamma$, la curva $f([0,\zeta))$ sigue a γ (esto es, permanece a distancia acotada de γ).

De la proposición anterior se deduce, entre otros, el siguiente resultado debido a J. Anderson y L. Pitt [4] e, independientemente, a N.G. Makarov [30].

Proposición 2 . *Si g es una función univalente en $\mathbb{B}^2$ entonces*

$$dim\{\zeta \in \partial\mathbb{B}^2 : g'(\zeta) \text{ existe como límite radial finito}\} = 1.$$

Otra aplicación de la Proposición 1 se refiere a los puntos conocidos como de buen acceso. Supongamos que Ω es un dominio simplemente conexo y $f : \mathbb{B}^2 \to \Omega$ una transformación conforme. Un punto $w = f(\zeta) \in \partial\Omega$ se llama de buen acceso si existen un arco de Jordan $I \subset \Omega$ que termina en w y una constante $C > 0$ de manera que $diam I_z \leq C dist(z, \partial\Omega)$, para cada $z \in I$, donde I_z denota el subarco de I que une z y w. Representamos por W el conjunto de puntos ζ de $\partial\mathbb{B}^2$ para los que $f(\zeta)$ es de buen acceso. De la Proposición 1 se deduce que $dim\, W = 1$.

Sea ahora f una función holomorfa de $\mathbb{B}^2$ en un dominio Ω de $\mathbb{C}$. Denotamos por

$$\mathcal{F}^*(f) = \mathcal{F}(f) \cup \{\zeta \in \partial\mathbb{B}^2 : \lim_{r \to 1^-} f(r\zeta) = \infty\}.$$

Como sabemos, si Ω es acotado entonces $\mathcal{F}(f)$ es pleno en $\partial\mathbb{B}^2$. Más aun, si la capacidad logarítmica de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ($cap(\mathbb{C} \setminus \Omega)$) no es cero f está en la clase de Nevanlinna, y en este caso también casi todos los puntos de $\partial\mathbb{B}^2$ están en $\mathcal{F}^*(f)$. Por otra parte, si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es un conjunto finito entonces cualquier cubrimiento holomorfo de $\mathbb{B}^2$ sobre Ω tiene un conjunto $\mathcal{F}^*$ contable. Estos resultados fueron completados recientemente por J.L. Fernández y A. Nicolau [19] quienes obtuvieron el siguiente resultado.

Proposición 3 *[19, Theorem 1]. Sean Ω un dominio hiperbólico de $\mathbb{C}$, esto es, $\mathbb{C} \setminus \Omega$ contiene al menos dos puntos (o, equivalentemente, es holomórficamente cubierto por $\mathbb{B}^2$) y f una función holomorfa de $\mathbb{B}^2$ en Ω. Si $cap(\mathbb{C} \setminus \Omega) = 0$ y $\#(\mathbb{C} \setminus \Omega) = +\infty$ entonces $dim(\mathcal{F}^*(f)) = 1$.*

Señalamos que las propiedades descritas para Ω en términos de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ tienen enunciados intrínsecos equivalentes. $cap(\mathbb{C}\setminus\Omega) > 0$ significa que Ω tiene función de Green, o que el movimiento Browniano sobre Ω es transitorio, y $\#(\mathbb{C} \setminus \Omega) < \infty$ es equivalente a que Ω tiene área de Poincaré finita.

J.J. Carmona y Ch. Pommerenke [12] investigaron diferentes clases de puntos de torsión en la frontera. Supongamos que Ω es un dominio simplemente conexo que es un subconjunto propio de $\mathbb{C}$. Como se sabe, el teorema de la aplicación de Riemann garantiza la existencia de una aplicación conforme f de $\mathbb{B}^2$ sobre Ω.

Denotamos por $\mathcal{D}(f)$ el conjunto de puntos ζ de $\mathcal{F}(f)$ en los que f tiene derivada angular finita, esto es, en los que existe el límite

$$f'(\zeta) := \lim_{z \to \zeta, z \in \Delta_\alpha(\zeta)} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta},$$

donde $\Delta_\alpha(\zeta)$ denota, como antes, el α-sector de Stolz en ζ, para cada $\alpha > 0$.

Decimos que f es conforme en $\zeta \in \partial\mathbb{B}^2$ cuando $f'(\zeta) \neq 0$. $\mathcal{D}^*(f)$ es el subconjunto de $\mathcal{D}(f)$ constituido por los puntos de $\partial\mathbb{B}^2$ donde f es conforme.

El problema de medir el tamaño de $\mathcal{D}(f)$ fue abordado por N.G. Makarov [29]. Recurre para ello a la medida de Hausdorff respecto a una cierta función ϕ.

Proposición 4 *[29]. Sea f una aplicación conforme en $\mathbb{B}^2$. Si $|\mathcal{D}(f)| = 0$, entonces*

$$\lambda_\phi(\{\zeta \in \partial\mathbb{B}^2 : f'(\zeta) = 0\}) > 0,$$

donde λ_ϕ representa la medida de Hausdorff asociada a la función ϕ definida por

$$\phi(x) = x(log\frac{1}{x}loglog\frac{1}{x})^{1/2}, \ \ 0 < x < e^{-e}.$$

Un punto $\zeta \in \partial\mathbb{B}^2$ es de torsión para f (abreviadamente $\zeta \in \mathcal{T}(f)$) si $\zeta \in \mathcal{F}(f)$ y

$$\lim sup_{z \to \zeta, z \in \Delta_\alpha(\zeta)} arg(f(z) - f(\zeta)) = +\infty \ \ y \ \ \lim inf_{z \to \zeta, z \in \Delta_\alpha(\zeta)} arg(f(z) - f(\zeta)) = -\infty,$$

para cada $\alpha > 0$.

J.E. McMillan [33] probó que

$$\partial\mathbb{B}^2 = \mathcal{E}(f) \cup \mathcal{D}^*(f) \cup \mathcal{T}(f),$$

donde $\mathcal{E}(f)$ es un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Un punto $\zeta \in \mathcal{F}(f)$ se dice isogonal si existe

$$\gamma := \lim_{z \to \zeta, z \in \Delta_\alpha(\zeta)} arg\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta},$$

para cada $\alpha > 0$.

Existen aplicaciones f que no son isogonales, y que por tanto no son conformes, en ningún punto de $\partial\mathbb{B}^2$.

J.J. Carmona y Ch. Pommerenke [12] distinguen tres tipos de puntos de torsión.

Se dice que un punto $\zeta \in \mathcal{F}(f)$ es espiral para f $(\zeta \in \mathcal{S}(f))$ si

$$\lim_{z\to\zeta, z\in\Delta_\alpha(\zeta)} arg(f(z)-f(\zeta)) = +\infty \quad o \quad \lim_{z\to\zeta, z\in\Delta_\alpha(\zeta)} arg(f(z)-f(\zeta)) = -\infty,$$

para cada $\alpha > 0$.

Un punto $\zeta \in \mathcal{F}(f)$ es un punto de giro para f $(\zeta \in \mathcal{G}(f))$ si

$$\lim sup_{z\to\zeta, z\in\Delta_\alpha(\zeta)} arg(f(z)-f(\zeta)) = +\infty \ \ y \ \ +\infty > \lim inf_{z\to\zeta, z\in\Delta_\alpha(\zeta)} arg(f(z)-f(\zeta)) > -\infty,$$

o

$$-\infty < \lim sup_{z\to\zeta, z\in\Delta_\alpha(\zeta)} arg(f(z)-f(\zeta)) < +\infty \ \ y \ \ \lim inf_{z\to\zeta, z\in\Delta_\alpha(\zeta)} arg(f(z)-f(\zeta)) = -\infty,$$

para cada $\alpha > 0$.

Llamamos a $\zeta \in \mathcal{F}(f)$ punto de oscilación para f $(\zeta \in \mathcal{O}(f))$ cuando

$$+\infty > \lim sup_{z\to\zeta, z\in\Delta_\alpha(\zeta)} arg(f(z)-f(\zeta)) > 2\pi + \lim inf_{z\to\zeta, z\in\Delta_\alpha(\zeta)} arg(f(z)-f(\zeta)) > -\infty,$$

para cada $\alpha > 0$.

Destacamos el siguiente resultado de entre los establecidos en [12].

Proposición 5 *([12, Theorem 1]). Sea f una aplicación conforme definida en $\mathbb{B}^2$. Si f es isogonal a lo sumo en un conjunto de medida cero de $\partial\mathbb{B}^2$, entonces*

(i) $\lambda_\phi(\mathcal{S}(f)) > 0$,

(ii) $dim(\mathcal{G}(f)) = 1$, *y*

(iii) $dim(\mathcal{O}(f)) = 1$.

Como es bien conocido, si u es una función armónica en el espacio de Hardy h^p, $1 \leq p \leq \infty$, casi todos los puntos de $\partial\mathbb{B}^n$, respecto a la medida de área, son de Fatou, y la existencia de límite radial en un punto $\zeta \in \partial\mathbb{B}^n$ implica que también se tiene límite no tangencial en ese punto ζ. Además, si u es una función holomorfa y acotada en $\mathbb{B}^2$ entonces $\zeta \in A(u,\lambda)$ cuando, y sólo cuando, $\lim_{r\to 1^-} u(r\zeta) = \lambda$. Este resultado sigue siendo válido, como probaron O. Letho y K.I. Virtanen [26], para funciones analíticas normales en $\mathbb{B}^2$.

Fue mencionado anteriormente que si u es una función armónica y acotada en $\mathbb{B}^2$, $\partial\mathbb{B}^2 \setminus \mathcal{F}(u)$ es un conjunto de medida cero. Sin embargo, sin la acotación de u nada puede decirse, en general, sobre la medida del conjunto de Fatou de u. Concretamente, G.R. MacLane [31] demostró que si w es una función definida en $[0,1)$, monótona creciente, positiva y que converge a infinito cuando $r \to 1^-$, existe una función u armónica en $\mathbb{B}^2$ tal que

$$|u(z)| \leq w(|z|), \ |z| < 1,$$

y que para cada $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$\limsup_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = +\infty \ y \ \liminf_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = -\infty.$$

Por tanto, es claro que, en este caso, $\mathcal{F}(u) = \emptyset$ ([31, Theorem 1]).

Es en este punto cuando G.R. MacLane sugiere que el comportamiento frontera de algunas clases de funciones puede ser entendido de una mejor manera considerando no sólo límites radiales, sino también límites asintóticos.

J.L. Fernández y J.G. Llorente [18] analizaron el comportamiento en la frontera $\partial\mathbb{B}^2$ de $\mathbb{B}^2$ de una clase de funciones armónicas con un crecimiento radial controlado. Concretamente consideraron las funciones que siguen.

Sea $0 \leq \alpha < 1$. Una función armónica real u en $\mathbb{B}^2$ está en $\mathcal{M}_\alpha$ si existe $C > 0$ tal que

$$u(z) \leq C(1 - |z|)^{-\alpha}, \ \ z \in \mathbb{B}^2.$$

Para las funciones en $\mathcal{M}_\alpha$ en [18] se probó la siguiente propiedad.

Proposición 6 *([18, Theorem 1]). Si $0 \leq \alpha < 1$ existe una constante $C_\alpha > 0$, que depende únicamente de α, tal que si $u \in \mathcal{M}_\alpha$ e I es un arco de $\partial\mathbb{B}^2$, entonces $|\mathcal{F}(u) \cap I| > 0$ o $\mathcal{M}_{1-\alpha}(A(u, +\infty)) \geq C_\alpha |I|^{1-\alpha}$.*

Como una consecuencia de la Proposición 6 fue obtenido el Corolario que sigue, relativo a funciones holomorfas sobre $\mathbb{B}^2$.

Corolario 7 *([18, Corollary 2]). Si* $0 \leq \alpha < 1$ *existe una constante* $C_\alpha > 0$, *que depende únicamente de* α, *tal que si* f *es una función holomorfa en* $\mathbb{B}^2$, *y* $0 < |f(z)| \leq C(1-|z|)^{-\alpha}$, *para cada* $z \in \mathbb{B}^2$, *con* $C > 0$, *entonces para cada arco* I *de* $\partial\mathbb{B}^2$ *se tiene que,* $|\mathcal{F}(f) \cap I| > 0$ *o* $M_{1-\alpha}(A(f,\infty)) \geq C_\alpha |I|^{1-\alpha}$.

En relación con este último resultado señalamos el siguiente debido a B. Berman [9].

Proposición 8 . *Si* f *es una función holomorfa en* $\mathbb{B}^2$ *y* $log|f(z)| \leq C(1-|z|)^{-\alpha}$, *para cada* $z \in \mathbb{B}^2$, *donde* $C > 0$ *y* $0 < \alpha < 1$, *entonces para cada arco* I *de* $\partial\mathbb{B}^2$ *se tiene que* $|\mathcal{F}(f) \cap I| > 0$ *o* $M_{1-\alpha}(A(f,\infty)) > 0$.

Recordamos ahora la noción de α-capacidad. Sea $0 \leq \alpha < 2$. Si μ es una medida positiva en $\mathbb{C}$, se define la integral de energía $I_\alpha(\mu)$ como sigue

$$I_\alpha(\mu) = \int_{C^2} \phi_\alpha(|x-y|) d\mu(x) d\mu(y),$$

donde

$$\phi_\alpha(t) = \begin{cases} log\frac{1}{t}, & \text{si } \alpha = 0 \\ t^{-\alpha}, & \text{si } 0 < \alpha < 2 \end{cases}$$

Sea F un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. La α-capacidad de F, $cap_\alpha(F)$, viene dada por

$$cap_\alpha(F)^{-1} = \inf\{I_\alpha(\mu) : \mu \text{ es una probabilidad en } F\}.$$

Si E es un subconjunto cualquiera de $\mathbb{C}$, la α-capacidad de E, $cap_\alpha(E)$, se define por

$$cap_\alpha(E) = sup\{cap_\alpha(F) : F \subset E, \ \ F \ compacto\}.$$

Obsérvese que cap_0 representa la capacidad logarítmica a la que nos hemos referido con anterioridad en esta conferencia. La dimensión de Hausdorff puede ser definida también a partir de capacidades.

La Proposición 6 tiene un análogo para capacidades.

Proposición 9 *([18, Theorem 2]). Sea* $0 < \alpha < 1$. *Existe una constante positiva* C_α, *que sólo depende de* α, *tal que si* u *es armónica en* $\mathbb{B}^2$ *y satisface*

$$\int \frac{|u(z)|^2}{(1-|z|)^\alpha} dx dy < \infty,$$

entonces, para cada I arco en $\partial\mathbb{B}^2$, $|\mathcal{F}(u) \cap I| > 0$ o

$$cap_{1-\alpha}(A(u,+\infty) \cap I) \geq C_\alpha |I|^{1-\alpha}.$$

G.R. MacLane introdujo en [32] una clase de funciones que denotaremos por $\mathcal{A}$, y que está constituida por aquellas f holomorfas no constantes en $\mathbb{B}^2$ para las cuales $A(f)$ es denso en $\partial\mathbb{B}^2$. G.R. MacLane obtuvo importantes resultados en relación con el comportamiento frontera de las funciones en la clase $\mathcal{A}$. En particular, el que recogemos a continuación es un análogo, en términos de límites asintóticos, del teorema de Fatou local ([13, Chapter IV]).

Proposición 10 *([32, Theorem 11]) Sean $f \in \mathcal{A}$ y J un arco abierto de ∂B^2. Si $A(f,\infty) \cap J = \emptyset$, entonces $|A(f) \cap J| > 0$.*

Como muestra [32, Theorem 3] dado un arco $J \subset \partial\mathbb{B}^2$, existen funciones $f \in \mathcal{A}$ tales que

$$|A(f) \cap I| < |I|,$$

para cada I subarco abierto de J. K.F. Barth, P.J. Rippon y L. Sons [7] recientemente han mejorado de una forma esencial el resultado recogido en la última proposición.

Proposición 11 *([7, Theorem 1]) Si $f \in \mathcal{A}$ y J es un arco abierto $\partial\mathbb{B}^2$ tal que $A(f,\infty) \cap J = \emptyset$, entonces $|\mathcal{F}(f) \cap J| > 0$.*

G.R. MacLane [32, p. 35-37] dio una condicion suficiente sobre el módulo máximo

$$M(f,r) = max\{|f(r\zeta)| : \zeta \in \partial\mathbb{B}^2\}, \ r \in [0,1),$$

para que una función holomorfa f no constante esté en $\mathcal{A}$. El mostró ([32, Theorem 14]) que si

$$\int_0^1 (1-r)\log^+ M(f,r)dr < \infty,$$

y f es holomorfa y no constante en $\mathbb{B}^2$, entonces $f \in \mathcal{A}$. Posteriormente, R.J.M. Hornblower [23, Theorem 1] mejoró el resultado de G.R. MacLane probando que $f \in \mathcal{A}$ siempre que f es holomorfa y no constante en $\mathbb{B}^2$ y

$$\int_0 \log^+ \log^+ M(f,r)dr < \infty.$$

R.J.M. Hornblower ([23] y [24]) estudió la clase análoga a la de MacLane para funciones subarmónicas en $\mathbb{B}^2$. Concretamente estableció que si u es subarmónica en $\mathbb{B}^2$, entonces $A(u)$ es denso en $\partial\mathbb{B}^2$ si, y sólo si, u no tiene arcos de Koebe. Cuando una función u es subarmónica en $\mathbb{B}^2$ y tiene estas propiedades, diremos que está en $\mathcal{A}_s$. También se probó en [23], como una consecuencia de [27, Theorem XLIII], que si u es subarmónica en $\mathbb{B}^2$ y

$$\int_0^1 \log^+ B(u,r)dr < \infty,$$

donde $B(u,r) = \sup\{u(r\zeta) : \zeta \in \partial\mathbb{B}^2\}$, $0 \leq r < 1$, entonces $u \in \mathcal{A}_s$. Más tarde, P.J. Rippon [36] dio una prueba diferente basada en una estimación de medida armónica en un dominio D definido como sigue. Sean, para cada $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = 2^{-n}$ y $X_n > 0$, de manera que $\sum_{n=0}^{\infty} X_n = 1$. Definimos $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$, y

$$\phi(X) = \begin{cases} Y_0 = 1, & |X| < X_0 \\ Y_n, & S_{n-1} \leq |X| < S_n, \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

El dominio D de Rippon viene dado por

$$D = \{Z = X + iY : 0 < Y < \phi(X), \ -1 < X < 1\}.$$

Como comentaremos más adelante, en la obtención de nuestros resultados, dominios "escalonados" como el que acabamos de definir desempeñan un importante papel.

Sea $n \geq 2$. Podemos dar una generalización natural de la clase de MacLane a la bola unidad $\mathbb{B}^n$ de $\mathbb{R}^n$. Si u es subarmónica en $\mathbb{B}^n$ diremos que u está en $\mathcal{A}_s$ cuando $A(u)$ es denso en $\partial\mathbb{B}^n$. El estudio de esta clase de funciones fue comenzado por P.J. Rippon [38] (véase también [37]). Surgen con el aumento de la dimensión dificultades topológicas, que no son, en absoluto, triviales de resolver, cuando se pretende extender a $\mathbb{B}^n$ los resultados que habían sido obtenidos sobre $\mathbb{B}^2$ ([23], [24] y [36]).

En [38] se introduce la noción de función oscilatoria cerca de un disco frontera. Para cada $\zeta \in \partial\mathbb{B}^n$ y $\rho > 0$ consideramos los conjuntos

$$D(\zeta,\rho) = \{x \in \mathbb{B}^n : |x - \zeta| \leq \rho|x + \zeta|\}$$

y

$$C(\zeta,\rho) = \{x \in \partial\mathbb{B}^n : |x - \zeta| \leq \rho|x + \zeta|\}.$$

Se dice que un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ es sólido si $\mathbb{R}^n_\infty \setminus E$ es conexo, donde $\mathbb{R}^n_\infty$ denota la compactificación unipuntual de Alexandrof de $\mathbb{R}^n$.

Una función u definida sobre $\mathbb{B}^n$ es oscilatoria cerca del disco frontera $C(\zeta, \rho)$, con $\zeta \in \partial\mathbb{B}^n$ y $\rho > 0$, si existen dos sucesiones $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{L_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos sólidos, conexos y compactos de $\mathbb{B}^n$ tales que

(i) $K_m \subset K_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$,

(ii) $L_m \subset L_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$,

(iii) Para cada $r \in (0, 1)$, existe $m \in \mathbb{N}$ para el cual

$$D(\zeta, \rho) \cap \{|x| < r\} \subset K_m \cap L_m,$$

(iv) Existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, siendo $\alpha < \beta$ y

$$u(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in D(\zeta, \rho) \cap (\cup_{m=0}^{\infty} \partial K_m) \\ \beta, & x \in D(\zeta, \rho) \cap (\cup_{m=0}^{\infty} \partial L_m) \end{cases}$$

Es claro que si u es oscilatoria cerca de $C(\zeta, \rho)$, para ciertos $\zeta \in \partial\mathbb{B}^n$ y $\rho > 0$, entonces la restricción de u a $D(\zeta, \rho)$ no tiene valores asintóticos en $C(\zeta, \rho)$, ya que cualquier camino en $D(\zeta, \rho)$ que termine en un punto de $C(\zeta, \rho)$ debe intersectar, salvo a lo sumo en un número finito, a ∂K_m y ∂L_m. El inverso, cuando la función u es continua, es también cierto ([38, Theorem]). Una consecuencia importante de este hecho es la siguiente.

Proposición 12 *([38, Corollary 2]) Sea u una función subarmónica y continua en $\mathbb{B}^n$. Si*

$$\int_0^1 \log^+ B(u, r)dr < \infty,$$

entonces u tiene un valor asintótico en cada $C(\zeta, \rho)$, $\zeta \in \partial B^n$ y $\rho > 0$.

Los resultados recogidos en la Proposiciones 11 y 12 han sido considerablemente mejorados por J.L. Fernández, J. Heinonen y J.G. Llorente [17]. Estos autores analizaron el problema sobre la bola de $\mathbb{R}^n$ y sobre el semiespacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Preferimos enunciar la propiedad correspondiente a $\mathbb{R}^{n+1}_+$ porque ése fue el punto de partida de la investigación que abordamos en [8]. Las definiciones dadas en un principio (valor asintótico, conjunto de Fatou,...) se entienden de forma natural cuando la bola $\mathbb{B}^n$ es sustituida por el semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Proposición 13 *([17, Theorem 1']) Sea u subarmónica real en $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Definimos*

$$M(t) = \sup\{u(x,y) : |x| \leq 1, t \leq y < 1\},\ 0 < t < 1.$$

Si u satisface la condición de Hornblower

$$\int_0^1 \log^+ M(t)dt < \infty,$$

entonces, para cada bola B en $\mathbb{R}^n$, contenida en $\mathbb{B}^n$, se tiene que

$$|\mathcal{F}(u) \cap B| > 0 \text{ o } A(u, +\infty) \cap B \neq \emptyset.$$

Aquí $|.|$ denota la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$.

Nótese que este resultado es una versión subarmónica y n-dimensional del presentado en la Proposición 11. La propiedad análoga para la bola de $\mathbb{B}^n$ fue establecida en [17, Theorem 1].

De la Proposición 13 se deduce, bajo adecuadas condiciones para la función u, que $A(u)$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

El punto de partida de nuestro estudio, en colaboración con J.C. Fariña y J.G. Llorente, sobre los valores asintóticos de las subsoluciones de operadores diferenciales elípticos es, como se dijo, el resultado recogido en la Proposición 13. Probamos en [8] que una propiedad de aquella naturaleza es válida en un marco mucho más general. Después de un análisis detallado de la elaborada prueba de la Proposición 13 recogida en [17], extraemos los elementos fundamentales de la misma. Esto nos permite extender la Proposición 13 a ciertos espacios armónicos de Brelot (véanse, por ejemplo, [10] y [14]). Posteriormente observamos que, como caso particular de nuestro resultado general, obtenemos la propiedad correspondiente a [17, Theorem 1'] para las subsoluciones del operador de Laplace-Beltrami para el semiespacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$ y para las subsoluciones de operadores uniformemente elípticos en forma divergente y en dominios Lipschitz.

Precisamos a continuación la clase de espacios armónicos a la que restringimos nuestro estudio.

Sea (X,d) un espacio métrico no acotado. Suponemos también que (X,d) satisface las propiedades topológicas que siguen:

(i) Las bolas cerradas son compactas,

(ii) La adherencia de cualquier bola abierta es la correspondiente bola cerrada,

(iii) Las bolas abiertas son conexas.

Nótese que bajo estas hipótesis (X, d) es un espacio métrico, localmente compacto, completo y conexo.

Sea $Y = X \times (0, \infty)$. Y es considerado como un subconjunto de $X \times [0, \infty)$. Los puntos de Y los denotaremos usualmente como pares (x, y) donde $x \in X$ e $y > 0$. Fijados x_0 y $r > 0$, como es habitual, escribimos

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}.$$

Si $0 \leq h_1 \leq h_2$, representamos por $C(x_0, r, h_1, h_2)$ al cilindro $B(x_0, r) \times (h_1, h_2)$. Cuando $h_1 = 0$ y $r = h_2$ para simplificar escribimos $C(x_0, r)$ en lugar de $C(x_0, r, 0, r)$.

Introducimos también una clase especial de dominios que llamamos "torres" y que recuerdan los dominios considerados por P.J. Rippon [36] y a los cuales hicimos referencia anteriormente.

Sean $x_0 \in X$, $r > 0$ y $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tales que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$. Definimos los números

$$S_0 = 0 \text{ y } S_k = \sum_{j=1}^{k} a_j, \; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

y la función

$$\phi(t) = 2^{-k}, \; S_k \leq t < S_{k+1} \text{ y } k \in \mathbb{N}.$$

La torre centrada en x_0 y de tamaño r (asociada a la sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$) viene dada por

$$\Upsilon(x_0, r) = \left\{(x, y) \in Y : 0 < y < r\phi\left(\frac{d(x, x_0)}{r}\right)\right\}.$$

Si $C(x_0, r, h_1, h_2)$ es un cilindro, llamamos aristas de $C(x_0, r, h_1, h_2)$ a los conjuntos $S(x_0, r) \times \{h_i\}$, $i = 1, 2$. Las aristas de una torre $\Upsilon(x_0, r)$ son los conjuntos $S(x_0, rS_k) \times \{r2^{-k}\}$ y $S(x_0, rS_k) \times \{r2^{-(k-1)}\}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Cuando hablemos de dominios regulares nos estaremos refiriendo a las torres y a los cilindros.

Dotamos a Y de una estructura particular de espacio armónico.

Sea $\mathcal{H}$ un haz armónico sobre Y, esto es, para cada subconjunto U abierto de Y, existe un espacio vectorial $\mathcal{H}(U)$ de funciones reales y continuas sobre U que verifican las dos propiedades siguientes

(i) Si U y V son abiertos de Y y $U \subset V$, entonces $u_{|U} \in \mathcal{H}(U)$, cuando $u \in \mathcal{H}(V)$,

(ii) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una colección de subconjuntos abiertos de Y. Si $u \in \mathcal{H}(U_i)$, $i \in I$, entonces $u \in \mathcal{H}(\cup_{i\in I} U_i)$.

Suponemos también que $\mathcal{H}(U)$ contiene a las funciones constantes en U, para cada U abierto de Y.

Llamaremos a las funciones de $\mathcal{H}(U)$ $\mathcal{H}$-funciones sobre U (funciones armónicas sobre U).

Entre las condiciones que imponemos a nuestro espacio armónico $(Y, \mathcal{H})$ distinguimos dos tipos: las primeras dos son usuales dentro de la teoría axiomática del potencial, y las restantes son de un carácter más cuantitativo, y están en relación con el problema que nos planteamos. Al enunciar cada una de las propiedades comenzamos con la letra A (de axioma) y un número de orden. Presentamos a continuación dichas propiedades.

A.1.- (Propiedad de convergencia de Brelot) El límite de una sucesión creciente de $\mathcal{H}$-funciones sobre un subconjunto abierto y conexo U de Y es una $\mathcal{H}$-función sobre U, siempre que sea finita en algún punto de U.

A.2.- (Problema de Dirichlet) Para cada $\Omega \subset Y$ regular, existe un sistema $\{w_\Omega^p\}_{p\in\Omega}$ de medidas Borel de probabilidad sobre $\partial\Omega$ tales que, para cada función f medible Borel y acotada sobre $\partial\Omega$, la función

$$w_\Omega f(p) = \int_{\partial\Omega} f(\zeta) dw_\Omega^p(\zeta), \ p \in \Omega,$$

es una $\mathcal{H}$-función sobre Ω, y $w_\Omega f(p) \to f(\zeta)$, cuando $p \to \zeta$, siempre que ζ es un punto de continuidad de f.

Como puede observarse la medida w_Ω^p cuando Ω es regular y $p \in \Omega$ hace el papel de la medida armónica sobre $\partial\Omega$ desde p, cuando tratamos con funciones armónicas usuales. Además, si Ω es regular, para cada $p, q \in \Omega$, las medidas w_Ω^p y w_Ω^q son mutuamente absolutamente continuas.

Podemos garantizar que $(Y, \mathcal{H})$ es un espacio armónico de Brelot ([10]).

Definamos ahora las funciones subarmónicas asociadas al haz armónico $\mathcal{H}$ en el modo habitual.

Sea $\Omega \subset Y$ abierto. Decimos que $u \in \mathcal{S}(\Omega)$, en palabras, u es subarmónica en Ω, si:

(i) $u < +\infty$, u no es idénticamente $-\infty$ en ninguna componente de Ω, y u es semicontinua superior en Ω, y

(ii) si V es un subconjunto abierto de Ω tal que $\overline{V} \subset \Omega$ y $h \in \mathcal{H}(V) \cap C(\overline{V})$ es tal que $u \leq h$ en ∂V, entonces $u \leq h$ en V.

No es difícil ver que $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}$.

A.3.- (Littlewood) Sean $x_0 \in X$ y $r > 0$. Supongamos que $u \in \mathcal{S}(C(x_0, r))$ y que u está acotada superiormente en $C(x_0, r)$. Entonces existe $\lim_{y \to 0^+} u(x, y) = u^*(x)$, w-c.t. $x \in B(x_0, r)$ (casi todo $B(x_0, r)$ respecto a la medida $w^p_{C(x_0,r)}$, con $p \in C(x_0, r)$). Además, si $u^* \leq 0$, w-c.t. $B(x_0, r)$ y $\limsup_{p \to \zeta} u(p) \leq 0$, para cada $\zeta \in \partial C(x_0, r) \setminus \overline{B}(x_0, r)$, entonces $u \leq 0$ en $C(x_0, r)$.

Esta propiedad A.3 es una versión de un conocido Teorema de Littlewood y resulta fundamental en el establecimiento de nuestro resultado. Además, de las condiciones que imponemos es la que exige más trabajo comprobar en cada caso particular.

A.4.- Si $\Omega \subset Y$ es un dominio regular, entonces las aristas de Ω tienen medida "armónica" cero, esto es, $w^p_\Omega(E) = 0$, para cada $p \in \Omega$, cuando E es una arista de Ω.

El siguiente axioma lo llamamos condición de Carleson, porque es así como usualmente aparece una propiedad de este tipo en la literatura.

A.5.- (Condición de Carleson) Se tiene

$$\sup\{w^{(x,y)}_{C(x,r)}(S(x,r) \times [0,r]) : 0 < y < r, x \in X, r > 0\} < 1.$$

Finalmente, requerimos que las funciones $u \in \mathcal{S}(C(x_0, r_0))$, $x_0 \in X$ y $r_0 > 0$, satisfagan la siguiente propiedad.

A.6.- Si $u \in \mathcal{S}(C(x_0, r_0))$, $x_0 \in X$ y $r_0 > 0$, y $x \in X$ y $r > 0$ son tales que $C(x, r) \subset C(x_0, r_0)$, entonces para cada $p \in C(x, r)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, siendo $u(p) > \lambda$, existe un subconjunto $\Omega_{\lambda,r} \subset C(x, r) \cap \{u > \lambda\}$ de manera que

(i) $p \in \Omega_{\lambda,r}$,

(ii) La función v definida por

$$v = \begin{cases} u, & \text{sobre } \Omega_{\lambda,r} \\ \lambda, & \text{sobre } C(x,r) \setminus \Omega_{\lambda,r} \end{cases}$$

está en $\mathcal{S}(C(x,r))$, y

(iii) $\Omega_{\lambda,r}$ es conexo por arcos.

Señalamos que si $u \in \mathcal{S}(C(x_0,r_0))$ es continua en $C(x_0,r_0)$ entonces u satisface la propiedad A.6 cuando las bolas en (X,d) sean conexas por arcos. Por otra parte, si $(Y,\mathcal{H})$ verifica A.1-A.5 y además cumple el axioma D (de dominación [22]) y existe un potencial positivo sobre Y, entonces, si $u \in \mathcal{S}(C(x_0,r_0))$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p \in C(x,r)$, con $u(p) > \lambda$, definiendo $\Omega_{\lambda,r}$ como la componente fina de $C(x,r) \cap \{u > \lambda\}$ que contiene a p, $\Omega_{\lambda,r}$ satisface (i) y (ii) en A.6. Para que se verifique (iii) es suficiente que los dominios finos sean arcoconexos.

Estamos ya en condiciones de enunciar nuestra versión general de la Proposición 13.

Proposición 14 *([8, Theorem 1.1]) Supongamos que $(Y = X\times(0,\infty),\mathcal{H})$ es un espacio armónico verificando todas las propiedades expuestas en los párrafos anteriores. Sea B_0 una bola abierta en X y definamos $C = B_0 \times (0,R)$. Si $u \in \mathcal{S}(C)$ y*

$$\int_0^R \log^+ M(t)dt < \infty,$$

donde $M(t) = \sup\{u(x,y) : x \in B_0, t \leq y < R\}$, $t \in (0,R)$, entonces para cada bola $B \subset B_0$ se tiene que

$$w_C^p(\mathcal{F}(u) \cap B) > 0,\ p \in C,\ o\ A(u,+\infty) \cap B \neq \emptyset.$$

En Y, $\mathcal{F}(u)$ y $A(u)$ tienen el significado natural.

El interés fundamental de la formulación general que presentamos en la Proposición 14 es que nos permite analizar importantes casos particulares, en relación con ciertos operadores diferenciales. En particular podemos aplicar nuestros resultados a las subsoluciones del operador de Laplace-Beltrami sobre el semiespacio superior $\mathbb{R}_+^{n+1}$ y a las subsoluciones de operadores uniformemente elípticos de segundo orden en forma divergente y en dominios Lipschitz.

Si consideramos sobre $\mathbb{R}_+^{n+1}$ la métrica hiperbólica

$$d^2s = y^{-2}(d^2x + d^2y),$$

el Laplaciano "natural" para esta métrica es conocido como operador de Laplace-Beltrami Δ_h y su expresión es

$$\Delta_h = y^{n+1}Div(y^{1-n} \bigtriangledown u).$$

Las soluciones del operador Δ_h son llamadas por L.V. Ahlfors [1], quien estudió muchas de sus propiedades, funciones hiperarmónicas.

Si definimos, para cada U subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathcal{H}(U)$ como el espacio de soluciones de Δ_h sobre U, el espacio armónico $(\mathbb{R}^{n+1}_+, \mathcal{H})$ satisface los seis axiomas anteriormente presentados. Para probar un teorema de Littlewood hiperarmónico para cilindros, que es la propiedad que requiere mayor esfuerzo verificar, adaptamos algunos argumentos de A. Ancona [2] desarrollados en su estudio sobre las soluciones de la ecuación de Weinstein en $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Señalamos que en [28] fue establecido un teorema de Littlewood para las subsoluciones del Laplaciano asociado a un espacio simétrico de rango 1. Este resultado no incluye la versión del teorema, relativa a cilindros, que requerimos. La propiedad especificada en el axioma 6 se establece apelando a la topología fina asociada a las funciones subhiperarmónicas en abiertos de $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

La Proposición 14 toma para este caso particular la forma que sigue.

Proposición 15 *([8, Theorem 1.2]) Sea $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ de radio R y u una función subhiperarmónica en $B_0 \times (0, R)$. Si*

$$\int_0^R \log^+ M(t)dt < \infty,$$

donde $M(t) = \sup\{u(x, y) : x \in B_0, t \leq y < R\}$, $t \in (0, R)$, entonces para cada bola $B \subset B_0$ se verifica que

$$|\mathcal{F}(u) \cap B| > 0, \ o \ A(u, +\infty) \cap B \neq \emptyset.$$

Aquí es posible sustituir la medida hiperarmónica por la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, ya que ambas tienen los mismos conjuntos de medida nula.

La Proposición 14 puede ser también aplicada a las subsoluciones de una clase de operadores elípticos sobre dominios Lipschitz.

Sea, para cada $i, j = 1, ..., n+1$, $a_{i,j}$ una función real en $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Suponemos que $a_{i,j} = a_{j,i}$, $i, j = 1, ..., n+1$, y que existe $\lambda > 0$ para la cual

$$\lambda^{-1}|\zeta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j \leq \lambda|\zeta|^2, \ x, \zeta \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Consideramos el operador diferencial en forma divergente

$$L = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

y un dominio $\Omega = \{(x,s) : x \in \mathbb{R}^n, s > \phi(x)\}$, donde ϕ es una función real lipschitziana definida en $\mathbb{R}^n$.

Definimos $Y = X \times (0, \infty)$, donde X representa el grafo de ϕ, y asociamos a Y el haz $\mathcal{H}$ de soluciones débiles del operador L sobre abiertos de Ω. El espacio armónico $(Y, \mathcal{H})$ satisface los axiomas A.1-A.6. También en este caso, el establecimiento de un teorema de Littlewood sobre cilindros para subsoluciones del operador L requiere un cuidadoso trabajo. Ahora empleamos un procedimiento inspirado en el que desarrolló S. Zhao [41] en su estudio sobre el comportamiento frontera de funciones subarmónicas en dominios NTA.

Como consecuencia de la Proposición 14 obtenemos la siguiente

Proposición 16 *([8, Theorem 1.6]) Sean $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ una bola de radio R y $u \in \mathcal{S}(C)$, donde $C = \{(x,s) : x \in B_0,\ \phi(x) < s < \phi(x) + R\}$. Supongamos que*

$$\int_0^R \log^+ M(t)dt < \infty,$$

donde $M(t) = \sup\{u(x,y) : x \in B_0, t \le y < R\}$, $t \in (0,R)$. Entonces para cada bola $B \subset B_0$ se tiene que

$$w_L(\{(x,\phi(x)) : x \in B \text{ y } \lim_{y \to 0^+} u(x, \phi(x) + y) \text{ existe y es finito}\}) > 0$$

o $A(u, +\infty) \cap B \neq \emptyset$. Aquí w_L denota la medida L-armónica sobre $\partial\Omega$.

La medida L-armónica sobre $\partial\Omega$ puede ser singular respecto a la medida de área (véase, por ejemplo, [11]), pero si L es el Laplaciano euclídeo la medida armónica y la de área son mutuamente absolutamente continuas cuando el dominio es Lipschitz ([15]). De esto se deduce que la Proposición 16 es, en ese caso, una extensión a dominios Lipschitz de la Proposición 13.

A partir de nuestro trabajo [8] una cuestión natural a plantearse es si resultados similares a los allí establecidos valen cuando se consideran otra clase de operadores diferenciales.

Podemos comenzar preguntándonos si puede obtenerse una versión de la Proposición 13 ([17, Theorem 1']) para subsoluciones de la ecuación del calor, o más generalmente, para subsoluciones de operadores diferenciales parabólicos. Si analizamos la demostración de las Proposiciones 14 y 15, observamos al menos dos ingredientes fundamentales: estimaciones que involucran a la medida armónica y un teorema de Littlewood.

Teniendo presente que es la conocida como frontera parabólica la determinante en la solución del problema de Dirichlet para la ecuación del calor, podemos obtener para la medida calórica (que es como en este contexto se conoce a la medida armónica) las estimaciones necesarias. Sin embargo, no es posible establecer en este caso un Teorema de Littlewood en la forma adecuada. J-M.G. Wu [40, Theorem 2'] dio una versión para dicho teorema que era la que se necesitaba. Desafortunadamente, R. Kaufman y J-M.G. Wu corrigieron el resultado anterior presentando [25, Example 2] un potencial calórico w en $\mathbb{R}^2_+$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\lim sup_{t\to 0^+} w(x,t) = +\infty$. Basta repasar la prueba de las Proposiciones 14 y 15, para observar que para la ecuación del calor el argumento empleado en la obtención de aquellos resultados no es aplicable. Creemos que se puede establecer una propiedad como las recogidas en [8] y [17] para subsoluciones de la ecuación del calor, aunque su prueba requerirá diseñar una nueva estrategia.

Como fue comentado anteriormente, P.J. Rippon estableció en [38, Corollary 2] (Proposición 12) un resultado sobre la existencia de valores asintóticos no tan fuerte como el debido a J.L. Fernández, J. Heinonen y J.G. Llorente [17, Theorem 1]. Cabe plantearse probar el resultado correspondiente para funciones subparabólicas. En la demostración de la Proposición 12 resulta fundamental una propiedad establecida por Y. Domar [16] donde se dan condiciones suficientes para que el supremo de una familia de funciones subarmónicas sea semicontinua superior y, por tanto, subarmónica. Antes de abordar la versión parabólica de la Proposición 12 deberán obtenerse condiciones suficientes (tipo Hornblower, por ejemplo) que garanticen que el supremo de una colección de funciones subparabólicas sea también subparabólica.

En la Proposición 15 recogemos la propiedad correspondiente al [17, Theorem 1'] para funciones subhiperarmónicas en el semiespacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$. La Profesora J-M.G. Wu nos ha planteado si podría obtenerse un resultado similar para funciones subhiperarmónicas en dominios Lipschitz de $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Hasta el momento no hemos podido establecer un teorema de Littlewood válido para subsoluciones en dominios Lipschitz del operador de Laplace-Beltrami asociado a $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Recordamos que si $\alpha \geq 0$, la α-medida de Hausdorff de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se define por

$$m_\alpha(E) = \lim_{\delta \to 0^+} \{\inf \sum_i r_i^\alpha\},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los recubrimientos de E por familias $\{B(p_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ de bolas abiertas, siendo $r_i < \delta$, $i \in \mathbb{N}$. Un conjunto E se dice que tiene α-medida σ-finita si es una unión numerable de conjuntos de α-medida finita.

Denotamos por Φ la clase de funciones $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ lipschitzianas y que satisfacen

$$\int_{-1}^{1} \frac{\phi(t)}{t^2} dt < \infty.$$

Una función g definida sobre $\mathbb{B}^2$ se dice ([20, p. 98]) que tiene Φ-límite a en $\zeta \in \partial\mathbb{B}^2$ si existe $\phi \in \Phi$ tal que $g(z) \to a$, cuando $z \to \zeta$, con $z \in \mathbb{B}^2$ y $Re(z\zeta^{-1}) < 1 - \phi(Im(z\zeta^{-1}))$.

Si γ representa un arco en $\partial\mathbb{B}^2$ denotamos por S_γ el sector $\{r\zeta : r \in (0,1)\ y\ \zeta \in \gamma\}$.

S. Gardiner [20, Theorem 1] probó lo que sigue

Proposición 17 *([20, Theorem 1]). Sean $\beta \in (-1,1)$, $\frac{2}{1-\beta} \leq p < \infty$ y f una función holomorfa en $\mathbb{B}^2$, para la cual $(1-|z|)^\beta log^+|f(z)| \in L^p(S_\gamma)$. Si $A(f,\infty) \cap \gamma$ tiene $(2-(1+\beta)p')$-medida σ-finita entonces f tiene Φ-límite finito sobre un subconjunto de γ de medida lineal positiva.*

Las definiciones anteriormente especificadas tienen sentido en dimensiones superiores a 2. Ello sugiere plantearse la cuestión correspondiente al resultado anterior de S. Gardiner, cuando la función holomorfa f es sustituida por una función subarmónica u en la bola unidad de $\mathbb{R}^n$ que satisface una condición de integrabilidad del tipo $(1-|x|)^\beta u^+(x) \in L^p(S_\gamma)$ (véase [21, p. 812]). Este problema aún no ha sido tratado.

Para terminar quiero agradecer al académico numerario José Manuel Méndez Pérez sus palabras de contestación a este discurso. Una vez oí decir a Juan Cruz, el último premio Canarias de Literatura, que en su profesión muchos desayunaban egos revueltos. También en nuestra profesión ocurre esto con mucha frecuencia. He tenido mucha suerte al contar desde el principio de mi andadura universitaria con la ayuda y la guía del Profesor Méndez donde se aunan en grado sumo la calidad científica y la generosidad. En cualquier actividad de la vida, y en la Universidad también, se encuentran algunos Niágaras que cruzar, sin su apoyo hace tiempo que me hubiera quedado en alguna orilla.

References

[1] **L.V. Ahlfors**, *Moebius transformations in several dimensions*, Lecture Notes, School of Mathematics, University of Minnesota, 1981.

[2] **A. Ancona**, *Théoréme de Fatou et frontiére de Martin pour une classe d'opérateurs elliptiques dans un demi-espace*, C.R. Acad. Sci. Paris, 290 (3) (1980), 401-404.

[3] **J. Anderson, J. Clunie y Ch. Pommerenke**, *On Bloch functions and normal functions*, J. Reine Angew. Math., 270 (1974), 12-37.

[4] **J. Anderson y L. Pitt**, *The boundary of Bloch functions and univalent functions*, Michigan Math. J., 35 (1988), 313-320.

[5] **F. Baghemil**, *Curvilinear cluster sets of arbitrary functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 41 (1955), 379-382.

[6] **F. Baghemil**, *Ambiguous points of a function harmonic inside a sphere*, Michigan Math. J., 4 (1957), 153-154.

[7] **K.F. Barth, P.J. Rippon y L. Sons**, *Angular limits of holomorphic and meromorphic functions*, J. London Math. Soc., 42 (2) (1990), 279-291.

[8] **J.J. Betancor, J.C. Fariña y J.G. Llorente**, *Axiomatic potential theory, asymptotic values and elliptic differential operators*, aparecerá en Potential Analysis.

[9] **B. Berman**, *Angular limits and infinite asymptotic values of analytic functions of slow growth*, Illinois J. Math., 34 (1990), 845-858.

[10] **M. Brelot**, *Lectures on potential theory*, IV (rev. edu. 1967), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

[11] **L. Caffareli, E. Fabes y C.E. Kenig**, *Completely singular elliptic-harmonic measures*, Indiana Univ. Math. J., 30 (6) (1981), 917-924.

[12] **J.J. Carmona y Ch. Pommerenke**, *Twisting behaviour of conformal mapping*, J. London Math. Soc., (2) 56 (1997), 1, 16-36.

[13] **E.F. Collingwood y A.J. Lohwater**, *The theory of cluster sets*, Cambridge University Press, London, 1966.

[14] **C. Constantinescu y A. Cornea**, *Potential theory on harmonic spaces*, Springer-Verlag, 1970.

[15] **B. Dahlberg**, *On the existence of radial boundary values for subharmonic functions in a Lipschitz domain*, Indiana Univ. Math. J., 27 (3) (1978), 515-526.

[16] **Y. Domar**, *On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function*, Ark. Mat., 3 (1954/8), 429-440.

[17] **J.L. Fernández, J. Heinonen y J.G. Llorente**, *Asymptotic values of subharmonic functions*, Proc. London Math. Soc., 73 (2) (1996), 404-430.

[18] **J.L. Fernández y J.G. Llorente**, *A note on the boundary behaviour of harmonic functions*, J. London Math. Soc., 46 (1992), 295-300.

[19] **J.L. Fernández y A. Nicolau**, *Boundary behaviour of inner functions and holomorphic mappings*, Math. Annalen, 310 (1998), 3, 423-445.

[20] **S. Gardiner**, *Angular limits of holomorphic functions which satisfy an integrability conditions*, Mh. Math., 114 (1996), 97-106.

[21] **W.K. Hayman**, *Subharmonic functions, II*, London Math. Soc., Monograph 20, Academic Press, San Diego, 1989.

[22] **R.M. Hervé**, *Recherches axiomatiques sur le théorie des fonctions surharmoniques et du potential*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 12 (1962), 415-471.

[23] **R.J.M. Hornblower**, *A growth condition for the MacLane class $\mathcal{A}$*, Proc. London Math. Soc., 23 (3) (1971), 371-384.

[24] **R.J.M. Hornblower**, *Subharmonic analogues of MacLane's classes*, Ann. Pol. Mat., 26 (1972), 135-146.

[25] **R. Kaufman y J-M.G. Wu**, *Parabolic potential theory*, J. Diff. Equations, 43 (1982), 204-234.

[26] **O. Letho y K.I. Virtanen**, *Boundary behaviour and normal meromorphic functions*, Acta Math., 97 (1957), 47-65.

[27] **N. Levinson**, *Gap and density theorems*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 26 (1940).

[28] **T.J. Lyons, K.B. MacGibbon y J.C. Taylor**, *Projections theorems for hitting probabilities and a theorem of Littlewood*, J. Func. Analysis, 59 (1984), 470-489.

[29] **N.G. Makarov**, *Smooth measures and the law of iterate logarithm*, Math. USSR Izvestija 34 (1990), 455-463.

[30] **N.G. Makarov**, *Probability methods in the theory of conformal mappings*, Algebra i Analiz (Russian) 1 (1989), 3-59.

[31] **G.R. MacLane**, *Holomorphic functions, of arbitrarily slow growth, without radial limits*, Michigan Math. J., 9 (1962), 21-24.

[32] **G.R. MacLane**, *Asymptotic values of holomorphic functions*, Rice University Studies, 49, 1 (1963).

[33] **J.E. MacMillan**, *Boundary behaviour of a conformal mapping*, Acta Math., 123 (1969), 43-67.

[34] **Ch. Pommerenke**, *Boundary behaviour of conformal mappings*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1991.

[35] **P.J. Rippon**, *Ambiguous points of functions in the unit ball of Euclidean space*, Bull. London Math. Soc., 15 (1983), 336-338.

[36] **P.J. Rippon**, *Boundary behaviours of subharmonic functions*, Thesis, London, 1977.

[37] **P.J. Rippon**, *Asymptotic values of continuous functions in Euclidean spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 111 (1992), 309-318.

[38] **P.J. Rippon**, *Towards a higher dimensional MacLane classes*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 119 (1996), 4, 665-671.

[39] **S. Rohde**, *The boundary behaviour of Bloch functions*, J. London Math. Soc., (2) 48 (1993), 488-499.

[40] **J-M.G. Wu**, *On parabolic measures and subparabolic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 251 (1979), 171-185.

[41] **S. Zhao**, *Boundary behaviour of subharmonic functions in nontangential accesible domains*, Studia Math., 108 (1) (1984), 25-48.