

# **Pipas, caballos, triángulos y significados. Contribución a una teoría problemática del significado conceptual, de Frege y Magritte, hasta nuestros días**

**Bruno D'Amore**

## **Summary**

In this paper we describe a proposal for a problematic interpretation of the concept of signification, taken from conceptual signification theory, not only in the field of mathematics, but also presenting examples of analogous behaviour from another field of study, that of figurative art. The aim is to show how a totally satisfactory signification theory has still not been constructed, while other fields of study continue to rediscover the basic stages of the epistemological domain.

## **Sunto**

In questo articolo si descrive una proposta di interpretazione problematica del concetto di significato, tratta dalla storia della teoria del significato concettuale, non solo nell'ambito della matematica, ma offrendo esempi di comportamento analogo tratto da un altro dominio di studio, quello dell'arte figurativa. Lo scopo è quello di mostrare come una teoria del significato del tutto soddisfacente non sia ancora stata costruita, mentre in altri campi di studio si ripercorrono le tappe fondamentali del dominio epistemologico.

## **Resumen**

En este artículo se describe una propuesta de interpretación problemática del concepto de significado, traída de la historia de la teoría del significado conceptual, no sólo en el ámbito de la matemática, sino también dando ejemplos de comportamiento análogo tomado de otro dominio de estudio, el del arte figurativo. La finalidad es la de mostrar como aún no se ha construido una teoría del significado del todo satisfactoria, mientras que en otros campos de estudio se recorren las etapas fundamentales del dominio epistemológico.

## **Résumé**

Dans cet article on décrit une proposition concernant une interprétation problématique du concept de signification, tiré de l'histoire de la signification conceptuelle, non seulement des mathématiques, mais en donnant des exemples de comportement similaire pris dans un autre domaine d'étude, celui de l'art figuratif. Le but est de montrer qu'il n'existe pas encore une théorie de la signification totalement satisfaisante, tandis que dans d'autres domaines d'étude on parcourt les étapes fondamentales du côté épistémologique.

## **Significado y su representación; el caso de la matemática**

Cuando se habla de «teoría del significado», el pensamiento corre rápidamente hacia la psicología, la semiótica, la lingüística o a la matemática.

*Números.*

*Volumen 61, junio 2005, páginas 3-18*

Pero no se debe pensar que este tipo de problemática interese sólo a estos sectores de investigación y de análisis. Toda disciplina que se respete, que desee poner en campo una reflexión sobre los objetos del propio conocimiento y del propio específico representar, antes o después se ve obligada a entrar en el meollo de la cuestión. Aún más si se sirve de «representaciones del significado» (locución que, por ahora, usamos de modo ingenuo), como se ve obligada a hacer la matemática (Duval, 1993; D'Amore, 2000, 2001a, b, 2002b, 2003a).

En matemática, en efecto, debido a que los «objetos» evocados no tienen naturaleza real (en un realismo ingenuo de carácter de cosa),<sup>1-2</sup> no se tiene otra alternativa sino aquella de recurrir a representaciones de estos al interior de una semiótica oportuna; es así como el matemático, mientras nombra y habla de objetos en el dominio de la matemática, de hecho elige, manipula y transforma sus representaciones en registros semióticos.<sup>3-4</sup>

<sup>1</sup> Aquí «objeto» se entiende en el sentido de «objeto real» o de «cosa», en el mismo sentido que Aristóteles en la *Metafísica* definió muy bien, donde afirma que la «cosa», en cuanto parte de lo real, es todo aquello que presenta las tres características siguientes: (1) tridimensionalidad, (2) accesibilidad sensorial múltiple (es decir, por más de un sentido a la vez) independiente de las representaciones semióticas y (3) posibilidad de separación material y de otras partes de la realidad, es decir de otras «cosas». Tal acepción se encierra en la palabra griega ὄντιον que la expresa. Pero se necesitó esperar a Renato Descartes para una distinción entre «Cosas corporales» y «Cosas que piensan» (*Méd.*, II), hasta Locke para tener el término «sustancia» (*An Essay Concerning Human Understanding*, 1690, II), 12, 6), acuñado y hecho propio de Berkeley con la acepción de «reales», para distinguirlas de aquellas «surgidas de la imaginación» a las cuales les espera el nombre de ideas «o imágenes de las Cosas que éstas copian o representan» (*Principles*, I, 33).

<sup>2</sup> Con «realismo ingenuo» (*Naïven Realismus*) entiendo lo así definido por G. Schuppe (*Grundriss der Erkenntnistheorie und Logik*, 1910), es decir aquello por lo cual se reconoce la independencia del objeto conocido del acto (psíquico) a través del cual este viene conocido. Esto tiene origen en un famoso artículo de G.E. Moore de 1903 (publicado en *Mind*, con el título: *La refutación del idealismo*) que se inspira en la posición de W. Hamilton (*Realismo Natural*) el cual atribuye este modo de pensar a la filosofía escocesa. Creo que todas estas posiciones son hijas del *Realismo empírico* de Kant.

<sup>3</sup> Estoy aquí haciendo referencia explícita a las tres «operaciones fundamentales de la semiótica» (Duval, 1993; D'Amore, 2002b, 2003a):

- elección de las características distintivas del objeto que se quiere representar;
- transformación de tratamiento, que permite
- transformar una representación semiótica en otra, al interior del mismo registro; transformación de conversión, que permite transformar una representación semiótica en otra, en un registro diverso.

## El caso del arte figurativo: pipas y caballos

Una situación análoga a la matemática, para muchos tal vez inesperada, la constituye el arte figurativo. Incluso si no se quiere complicar la cuestión y se asume, en modo fuertemente a-crítico e históricamente superado, que el arte es el estudio de las interpretaciones de las representaciones figurales problemáticas de los objetos o de los fenómenos de la naturaleza, surge, de modo evidente, que cada representación en el mundo figural alude a un objeto o a un fenómeno, pero es distinto de éstos. Al final, todo producto artístico es, él mismo, un objeto o un fenómeno de la naturaleza.



Así, aparece inmediatamente necesaria y reveladora la obra de reflexión sobre la naturaleza del lenguaje del arte y sobre el sentido de la relación entre significado y representación, del pintor surrealista René Magritte (1898-1967).

En ocasiones, sus reflexiones se constituían, a su vez, en verdaderas y auténticas obras de arte, como la muy conocida *Ceci n'est pas une pipe* (Esto no es una pipa), que Magritte realizó en diversas versiones entre 1929 y 1946.



<sup>4</sup> Nótese que, ya en la filosofía del Renacimiento, se evidenciaban tres sentidos de la representación: la idea misma en el sentido más general, la imagen de la idea y el objeto mismo al cual la idea alude o se refiere; esta tripartición que, en su origen, se atribuye a Ochkam (*Quodl.*, IV, 3), está presente en la base de las especulaciones de Descartes sobre la noción de idea como «cuadro» o como «imagen» de la cosa (*Méd.*, III), lo que llevó a Leibniz a su concepción de monade como representación del universo (*Mon.*, 60).

Más allá del desconcierto que creó con la exposición de su obra, analizada con la mirada crítica y aguda de hoy, el sentido de esta obra, voluntariamente divulgada, es del todo evidente: lo que el observador ve NO es, de hecho, una pipa, sino una representación, una alusión, una evocación, no el objeto en sí.

En ocasiones, por el contrario, Magritte amaba elaborar verdaderos y propios estudios teóricos, como el igualmente famoso *Les mots et les images* (1929) que, aún siendo, como decía, un estudio teórico, también viene expuesto como obra.

### LES MOTS ET LES IMAGES

Un objet ne tient pas tellement à son nom qu'on ne puisse lui en trouver un autre qui lui convienne mieux



Il y a des objets qui se passent de nom :



Un mot ne sert parfois qu'à se désigner soi-même :



Un objet rencontre son image, un objet rencontre son nom. Il arrive que l'image et le nom de cet objet se rencontrent.



Parfois le nom d'un objet tient lieu d'une image



Un mot peut prendre la place d'un objet dans la réalité :



Une image peut prendre la place d'un mot dans une proposition :



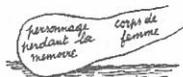
Un objet fait supposer qu'il y en a d'autres derrière lui :



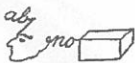
Tout tend à faire penser qu'il y a peu de relation entre un objet et ce qui le représente



Les mots qui servent à désigner deux objets différents ne montrent pas ce qui peut séparer ces objets l'un de l'autre



Dans un tableau, les mots sont de la même substance que les images



On voit autrement les images et les mots dans un tableau :



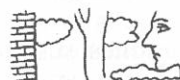
Une forme quelconque peut remplacer l'image d'un objet



Un objet ne fait jamais le même office que son nom ou que son image



Or, les contours visibles des objets, dans la réalité, se touchent comme s'ils formaient une mosaïque :



Les figures vagues ont une signification aussi nécessaire aussi parfaite que les précises :



Parfois, les noms écrits dans un tableau désignent des choses précises, et les images des choses vagues :



Ou bien le contraire :

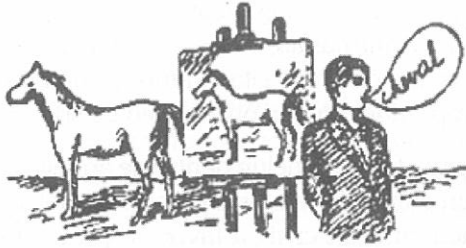


René MAURITTE.

Analizando este estudio, tal vez el particular más famoso y discutido es el relativo a la imagen del caballo, cuya evidencia es total.

Aparece un caballo, su representación pictórica y su enunciación verbal (dentro del registro semiótico: «lenguaje oral»). Pero, no debemos olvidar que el caballo que aparece a la izquierda del recuadro es a su vez un dibujo

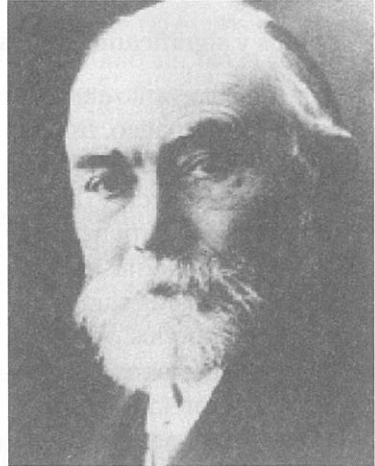
...



## Gottlob Frege y el significado en matemática

Este análisis del lenguaje pictórico llama a la obra del lógico y matemático alemán Gottlob Frege (1848- 1925).

Junto a otras obras inmortales, Frege escribió un artículo relativo a la naturaleza y al sentido de la matemática y de su lenguaje: *Über Sinn und Bedeutung* (publicado en 1891) que fue una verdadera bomba en el mundo de la reflexión matemática y contribuyó a abrir el camino al replanteamiento crítico de esta disciplina bajo el nombre de *Crisis de los fundamentos* y que llevó al modo actual de concebir la matemática (D'Amore, Matteuzzi, 1975).



En el citado artículo, que fue motivo después de una polémica durante años con G. Peano (1858-1932) (D'Amore, Matteuzzi, 1975), Frege proponía, de forma radical, una distinción entre «concepto» y «objeto», donde el primero es una expresión no completa con características únicamente funcionales, y el segundo tiene el papel de argumento. Por ejemplo, un número se identifica con el objeto denotado por un concepto, o sea con la extensión de dicho concepto.<sup>5</sup>

En otra de sus célebres obras, *Die Grundlagen der Arithmetik-Eine logisch-matematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, publicada en Breslavia en 1884, en la pag. 59, Frege afirma: «La atribución de un número contiene siempre una afirmación alrededor de un concepto. El hecho resulta particularmente claro con el número 0. Cuando se dice «el planeta Venus tiene

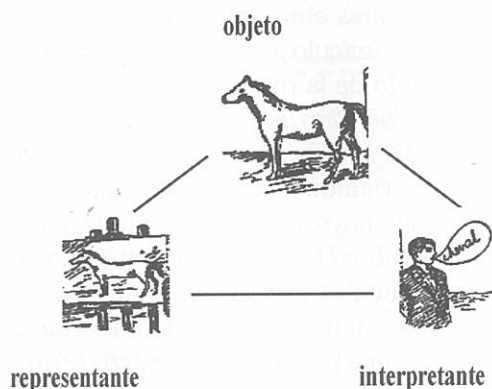
<sup>5</sup> La distinción y después la organización conceptual que tiene que ver con la dialéctica entre «intensión» y «extensión» fue lanzada en sentido moderno por G.W. Leibniz (1646-1716); Leibniz prefirió siempre la primera visión que no tuvo éxito en matemáticas (D'Amore, Matteuzzi, 1975. Véase también D'Amore 2001b).

0 satélites», no es precisamente algún satélite o una unión de satélites acerca de lo que se pueda afirmar algo. Es en cambio al concepto «satélite de Venus» al que la acepción antes citada atribuye una propiedad (es decir, aquella de no comprender ningún objeto bajo de sí)<sup>6</sup>.

Esta posición, que no dudo en incluir dentro de aquellas que hoy se llaman «realistas», tuvo un gran éxito en los años setenta del siglo XX, pero, en la actualidad se encuentra en crisis a favor de posiciones «pragmáticas» (D'Amore, 2001a, b; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001).

### Caballos y significados, antes y después de Frege

Desde 1883, por tanto *antes* de Frege, el matemático, físico y filósofo estadounidense Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) había ya comenzado a servirse de esquemas de forma triangular para estudiar las relaciones entre los objetos y sus representaciones, usando la terna: interpretante – representante – objeto; parece interesante encontrar una descripción de la reflexión de Magritte según el esquema de Peirce:



Quien desee, puede crear una propia interpretación ternaria del «caballo» de Magritte, usando el triángulo de:

- Gottlob Frege: Sinn (sentido) – Zeichen (expresión) – Bedeutung (determinación), publicado en 1892, como ya lo había precisado, o aquél más reciente de:
- C.K. Ogden, I.A. Richards: referencia – símbolo – referente (publicado en 1923).

<sup>6</sup> La historia específica al rededor del significado del número es de gran interés, tanto para los matemáticos como para los filósofos, pero aquí la evito, dado que no la considero propia de este escrito; interesó a Henry Poincaré (1854-1912), Giuseppe Peano (1858-1932), Richard Dedekind (1831-1916), Bertrand Russell (1872-1970), sólo por citar algunos. En cierto sentido, la polémica sobre el sentido y sobre el significado del concepto de número, no ha sido jamás apaciguada.

## Arte y significado, después de Magritte

Deteniéndonos aún por un momento en el mundo del arte figurativo, hago mía la tesis sostenida por el gran crítico de arte Filiberto Menna (1975), para quien la «línea analítica del arte moderno» tuvo un gran artífice en los estudios y en las reflexiones de Magritte. «(...) Magritte propone un desprendimiento de la imagen y de la palabra, entre la definición visual (la imagen de la pipa) y la definición verbal (la leyenda «Ceci n'est pas une pipe», «Esto no es una pipa»), eliminando el papel afirmativo tradicionalmente atribuido al cuadro en virtud de la presencia (implícita o explícita) de una acotación (...). Del arte y del cuadro en particular, él nos dice que no es posible predicar la verdad o la falsedad y para demostrar este asunto afronta la cuestión de los fundamentos gnoseológicos establecidos por las leyes de la teoría de la identidad (...)» (Menna, 1975, pp. 58-59).

La idea de Magritte tuvo un gran séquito (aún hoy no extinto) entre los artistas de todo el mundo, especialmente entre aquellos que, en los años 60'-80', fueron los artífices de la corriente llamada «conceptualismo científico»,<sup>7</sup> entre los cuales recuerdo al estadounidense Joseph Kosuth, citando dos de sus obras más famosas.

### *Neon Electrical Light English Glass Letters White Eight (1965)*

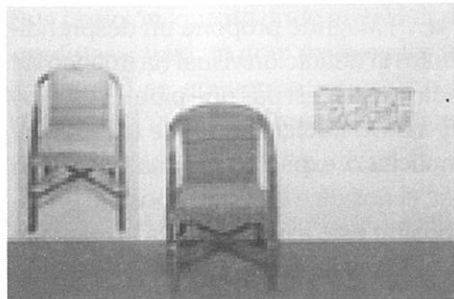


«El contenido de esta obra es el descrito en el título», en el sentido *exacto* de esta frase. Se trata, de una referencia autónoma. En otras palabras, el

<sup>7</sup> En los años 70' y 80' yo mismo dediqué gran atención a esta corriente artística que se inspiró decididamente en el mundo de la ciencia, en general, y de la matemática en particular, promoviendo varias iniciativas expositivas y presentando diversos análisis críticos, referidos tanto al movimiento en sí como a los artistas que lo seguían.

«sentido» es la referencia a sí misma, como sucede con la mayor parte de los signos de la matemática.

### *One and three chairs* (1965)



Esta obra consiste en un objeto (una silla), la fotografía de dicha silla y la definición de «silla» tomada de un diccionario; lo que nos obliga a traer en mente una síntesis de las obras de Magritte y de Frege al mismo tiempo. ¿Se trata (de la representación) de «una» o de «tres» sillas?<sup>8</sup>

### **Esquemas ternarios del significado**

Volvamos a las interpretaciones del significado conceptual.

Los esquemas «triangulares» pretenden reunir «el estudio semiótico del contenido» (Eco, 1975, p. 89), pero fallan una vez que intentan definir un modo unívoco (para todos los lenguajes y para todos los códigos) lo que debería entenderse por «significado» de un «significante» (lo que es de extrema importancia, si se quiere entender tanto la matemática, como el arte).

Ahora, la posición más ingenua e inmediata es aquella donde el significado del significante es el mismo objeto al cual se hace referencia. Esta posición lleva a una falacia (la «falacia extensional») (Eco, 1975, p. 93 y siguientes) que, si es verdad que mete en crisis todas las teorías de los códigos que tienen necesidad de extensiones relativas a objetos relacionados con lo real, no molesta a la matemática donde los objetos son definibles en forma extensiva, sin necesidad de alguna referencia a la realidad objetiva empírica (me parece que el mismo discurso, cambiando lo que haya que cambiar, vale para el arte figurativo).

No es casual que el lógico matemático Frege se permitiera considerar el

---

<sup>8</sup> Para tener referencias posteriores sobre el arte figurativo de la época, se puede ver el catálogo de una importante muestra internacional sobre este tema (D'Amore, Menna, 1974), las actas de un congreso de estudio que reunía matemáticos y críticos de arte (D' Amore, Speranza, 1977), la historia del arte de aquel período (1970-1990), escrita por Giorgio Di Genova (1993), uno de los máximos estudiosos en este campo.



*Bedeutung* en sentido estrictamente extensivo, dado que él pensaba exclusivamente en la matemática y no en la lengua natural.<sup>9</sup>

Una de las esquematizaciones a tres términos, más recientes y de mayor notoriedad, es ciertamente, la de Gérard Vergnaud (1990).<sup>10</sup> Por lo menos en el campo de la didáctica y de las reflexiones epistemológicas, sobre todo en lo que concierne a la matemática. Según este célebre autor francés,<sup>11</sup> el punto decisivo de la conceptualización del real (y en didáctica de la matemática) es el pasaje de los *concepts – como – instrumentos* a los *concepts – como – objetos*, y una operación lingüística esencial en esta transformación es la nominalización.

Es entonces fundamental dar una definición pertinente y eficaz de *concepto*. Según Vergnaud:

concepto C es una terna de conjuntos  $C=(S, I, S)$ , tal que:

- **S** es el conjunto de las situaciones que dan sentido al concepto (el *referente*)
- **I** es el conjunto de los invariantes (definidos por él y ejemplificados en otras obras) sobre las cuales se basó la operatividad de los esquemas (el *significado*)
- **S** es el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus procesos, las situaciones y los procesos de tratamiento (el *significante*).

Según Vergnaud, estudiar cómo se desarrolla y cómo funciona un concepto significa considerar, cada vez, estos tres planos separadamente y en mutua relación recíproca.

### Esquemas binarios del significado

Recientemente, Raymond Duval (1993) sustituyó el esquema ternario por un esquema binario, aquél que se expresa con la pareja: significado – objeto o también con la pareja signo – objeto; el hecho es que en Duval el término «significado» reagrupa los diversos significantes del mismo objeto; por

---

<sup>9</sup> Interesantes consideraciones de tipo didáctico se obtuvieron aplicando las ideas de Frege a la semántica del álgebra; se puede ver una presentación con ejemplos en Arzarello, Bazzini e Chiappini (1994), p. 36 y siguientes.

<sup>10</sup> Una amplia discusión de las tesis de Vergnaud se encuentra en D'Amore (1999).

<sup>11</sup> Véase mi voz sobre G. Vergnaud en la Enciclopedia Pedagogica (D'Amore, 2002a).

tanto los términos «significado» y «signo» son, en cierto sentido, intercambiables.

Es obvio que, si se pone el acento sobre la pareja (*signo - objeto*), todas las representaciones triádicas (de C.S. Peirce, de G. Frege, de C.K. Ogden y I.A. Richards, de G. Vergnaud, ...) caen en defecto.

La conceptualización pasa entonces a través del signo que expresa el objeto mismo.

El caso de la matemática es, peculiar; al menos por tres motivos:

- todo concepto matemático tiene reenvíos, como ya se ha dicho, a «no-objetos»; por tanto, la conceptualización no es y no puede ser basada en significantes que se apoyan en la realidad concreta; en otras palabras, en matemáticas no son posibles reenvíos ostensivos;
- todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no existen «objetos» que se puedan exhibir en su lugar o en su evocación; <sup>12</sup> por tanto, la conceptualización debe pasar, necesariamente, a través de registros representativos que, por varios motivos, si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos;
- en matemáticas se habla más en general de «objetos matemáticos» y no de conceptos matemáticos, dado que se estudian preferiblemente objetos y no conceptos; «la noción de objeto es una noción que no se puede no utilizar desde el momento en el cual nos interrogamos sobre la naturaleza, sobre las condiciones de validez o sobre el valor del conocimiento» (Duval, 1998).

Es absolutamente necesario subrayar que el término «concepto», en Duval, no nos lleva a las mismas exigencias y al mismo uso que hacen de esto Piaget, Kant, Vergnaud, Vygotsky, Chevallard...

En la dirección trazada por Duval, la noción de concepto, preliminar o de cualquier manera prioritaria en casi todos los autores, pasa a un segundo plano, mientras la noción que asume un carácter prioritario es la pareja (*signo - objeto*).

En Duval (1996) se cita un pasaje de Vygotsky en el cual sustancialmente se declara que no existe concepto sin signo:

«Todas las funciones psíquicas superiores están unidas por una característica común superior, la de ser procesos mediadores, es decir de incluir en su estructura, como parte central y esencial del proceso en su conjunto, el

---

<sup>12</sup> Recuerdo aquí la definición de «cosa» dada citando a Aristóteles páginas arriba.

empleo del signo como medio fundamental de orientación y de dominio de los procesos psíquicos... La lista central [del proceso de formación de los conceptos] es el uso funcional del signo, o de la palabra, como medio que permite al adolescente someter a su poder las propias operaciones psíquicas, de dominar el curso de los procesos psíquicos...» (Vygotsky, 1962; en edición francesa, 1985, en las páginas 150, 151, 157).

[A propósito de esta cita de Vygotsky o, mejor, aprovechándola, es necesario hacer una rápida consideración a propósito de la palabra «signo», sugerida en conversaciones e intercambio de ideas personales con Raymond Duval, en cuanto, él afirma, que para algunos estudiosos de la didáctica se vislumbra una reducción del *signo* a los *símbolos convencionales* que connotan directamente y aisladamente los objetos. Lo cual es reductivo].

Con referencia a De Saussure (1915) (que Vygotsky conocía bien dada su formación lingüística), no existe signo fuera de un «sistema de signos». Por ejemplo, las palabras no tienen significado sino en el interior del sistema de un idioma (de aquí los problemas bien conocidos de las traducciones). Cuando en Duval (y por tanto, aquí) se habla de «registro de representación semiótica» nos referimos a un sistema de signos que permite colmar las funciones de comunicación, tratamiento y objetivización, y no nos referimos en cambio, a las notaciones convencionales que no forman sistemas. Por ejemplo, la numeración binaria, o aquella decimal, forman un sistema; pero no lo forman las letras o los símbolos que se utilizan para indicar las operaciones algebraicas.

Tal vez, convendría ahora traducir a Vygotsky introduciendo en el lugar de la palabra «signo» la locución «sistema de signos».

Nótese también que, desde este punto de vista, y contrariamente a la opinión difusa, un sistema semiótico no es un instrumento: éste es constitutivo del funcionamiento mismo del pensamiento y del conocimiento. Sólo un código que viene usado para recodificar un mensaje ya expresado, puede ser un instrumento.

Dado que en este artículo estoy haciendo un paralelismo entre las situaciones de la matemática y aquellas del arte figurativo, aunque no se trate del objetivo principal de este trabajo, el lector puede releer el precedente apartado 7, buscando analogías entre los dos campos. Quien lo ha hecho, comenta haber encontrado impresionantes situaciones comunes, compartidas o sólo análogas, en el ámbito de una teoría del significado conceptual.

Como una vez era difuso concluir, se deja como ejercicio al lector este análisis...

## La naturaleza compleja y problemática del significado conceptual y de sus representaciones

Se puede huir de la problemática del significado conceptual, con ironía, como hacía Magritte; o buscar capturar la esencia de la relación entre el significado conceptual y la/las representación/ciones, como intentó hacer Frege y los otros estudios de esquemas destinados a recoger tal esencia, en general, independientemente de los códigos; ó asimilar el significado conceptual al conjunto de los signos representantes, evocadores de lo representado, pero en semióticas específicas...

Me parece que el resultado será el mismo; lo que surge con fuerza es que la naturaleza del significado conceptual es un hecho *complejo y problemático*.

*Complejo* significa que no es definible ni unívoco, dado que integra varias actividades humanas y que en cada una de ellas asume identidades específicas diversas, dependiendo del contexto; puede incluso suceder que existan de hecho analogías interpretativas (y en este estudio estoy buscando relacionar el dominio de la matemática con el del arte figurativo), pero no es posible evidenciar más que analogías. No existe una teoría general unívoca del significado conceptual.

*Problemático* significa que la naturaleza del significado conceptual no se sobrepone a reduccionismos que reenvían a modelos preexistentes (Speranza, 1997). Toda tentativa de categorización abre nuevas interpretaciones y, por tanto, la necesidad de nuevos modelos, siempre más profundos. Las respuestas a preguntas sobre la naturaleza del significado conceptual, en conclusión, no son jamás definitivas y, si no son autoreferentes, abren el camino a nuevas preguntas.

Vimos también que la/las representación/ciones del significado conceptual no puede/pueden ni siquiera ser ostensiva/s, por lo menos, en las dos actividades creativas humanas sobre las cuales aquí he reflexionado, matemática y arte figurativo. Como máximo, las representaciones pueden recurrir a signos de naturaleza semiótica diversa y pretender coincidir con ellos (existen los famosos ejemplos que presenta Duval en el campo de la matemática y de varios artistas en el campo del arte figurativo, como Kosuth, y otros que aquí no he querido recordar para abreviar). Por tanto, también la representación del significado conceptual tiene características de complejidad y problematicidad.

Inspirándonos en la distinción que se hace en epistemología de la matemática entre posiciones realistas y pragmáticas (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2001a, 2003b), debemos estar dispuestos a reconocer una doble analogía entre absolutismo y realismo, y entre problematización y

pragmatismo. Sobre esta base, la naturaleza compleja y problemática de la teoría del significado conceptual cambia según el contexto, lo que la hace difícil de «capturar» con los clásicos sistemas que tienen éxito en las posiciones realistas: la lógica, por ejemplo, o una semántica *a priori*.

Esto nos debe conducir forzosamente a las «prácticas humanas» (Godino, Batanero, 1994) reconociendo el hecho que, como subraya Luis Radford, el conocimiento está ligado indisolublemente a las actividades en las que se empeñan los sujetos (Radford, 1997, 2003a, b), y esto debe ser considerado en relación estrecha con las instituciones culturales del contexto social cada vez considerado (Crombie, 1995, p. 232).

Radford enfatiza la especificidad de los ambientes en los cuales, en la historia, se ha desarrollado la investigación científica: «Una simple mirada a las diversas culturas en la historia muestra que cada una de éstas ha tenido intereses científicos propios. Además, cada cultura ha desarrollado modalidades propias para definir y delimitar la forma y el contenido de los objetos de la propia investigación» (Radford, 1997, p. 30); yo creo que lo mismo se puede decir, exactamente, para el arte figurativo, sin necesidad de forzar la mano. Y esto ilustra claramente el sentido que he querido dar a los adjetivos *complejo* y *problemático* que he usado en este texto. Los resultados de la matemática y del arte figurativo son productos, artefactos humanos, indisolubles de la sociedad cultural que los ha producido y estrechamente determinados por la práctica humana gracias a la cual fueron realizados.

Así, más que una teoría del significado de algo general que comprende estos productos, existe, por el contrario, el significado específico de éste algo en aquel determinado contexto en el cual está inmerso. La complejidad y la problematicidad se reducen así al hecho local y relativo específico, al producto de la creatividad humana en un determinado contexto, también éste específico.

## Bibliografía

- Arzarello F.; Bazzini L.; Chiappini G. (1994): *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Quaderno 6, Progetto Strategico del CNR «Innovazioni didattiche per la matematica». Pavía. [Resumen del IX Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de la Matemática. Pisa. 5-7 noviembre 1992].
- Crombie A.C. (1995): "Commitments and Styles of European Scientific Thinking". *History of Sciences*. 33, 225-238.

- D'Amore V. (1999): *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Traducción en curso].
- D'Amore B. (2000): «Concetti» e «oggetti» in Matematica. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma*. (6) 3, 143-151.
- D'Amore B. (2001a): "Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos". *Uno*. 27, 2001, 51-76.
- D'Amore B. (2001b): *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2002a): Gérard Vergnaud. Voce sull'*Enciclopedia Pedagogica*. Appendice A-Z. 1508-1509. Brescia: La Scuola Ed.
- D'Amore B. (2002b): "La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución". *TED*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 11, 63-71.
- D'Amore B. (2003a): "La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée". *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.
- D'Amore B. (2003b): *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [En idioma español: México D.F.: Reverté-Cinvestav]
- D'Amore B. (2004): "Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución". *Uno*. 35, 90-106.
- D'Amore B.; Fandiño Pinilla M.I. (2001): "Concepts et objects mathématiques". En: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Chipre): Intercollege Press Ed. [Actas del «Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Universidad de Chipre, 22 junio - 6 julio 2001. 111-130].
- D'Amore B.; Matteuzzi M. (1975): *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.
- D'Amore B.; Menna F. (1974): *De Mathematica*. Roma: L'Obelisco. [Libro - catálogo de una muestra internacional]
- D'Amore B.; Speranza F. y otros (1977): *Alcuni aspetti della critica analitica. Rapporti tra critica analitica e ricerca nelle arti visive*. Bologna: Galería

- de arte moderno. [Actas de un congreso, el acta de nacimiento de la línea del *arte exacto* que dio vida a una gran cantidad de muestras].
- De Saussure F. (1915): *Cours de linguistique générale*. París y Lausanne: Payot. [5a edic. 1960].
- Di Genova G. (1993): *Storia dell'arte italiana del 900*. Bologna: Bora.
- Duval R. (1993): "Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée". *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.
- Duval R. (1996): "Il punto decisivo nell'apprendimento della matematica. La conversione e l'articolazione delle rappresentazioni". En: D'Amore B. (ed.) (1996). *Convegno del decennale*. 11-26. Bologna: Pitagora.
- Duval R. (1998): "Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet". *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163.
- Eco U. (1975): *Trattato di semiotica generale*. Milán: Bompiani.
- Godino J.D.; Batanero C. (1994): "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". *Recherches en didactiques des mathématiques*. 14, 3, 325-355.
- Menna F. (1975): *La linea analitica dell'arte moderna*. Milán: Einaudi.
- Radford L. (1997): "On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics". *For the Learning of Mathematics*. 17(1), 26-33.
- Radford L. (2003a): "On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance". *Educational Studies in Mathematics*. 52(2), 123-150.
- Radford L. (2003b): "On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought". En: Anderson M. y otros. (Eds.). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. 49-79. Ottawa: Legas.
- Speranza F. (1997): *Scritti di epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.

Vergnaud G. (1990): "La théorie des champs conceptuels". *Recherches en didactique des mathématiques*. 10, 133-169.

Vygotsky L.S. (1962): *Thought and language*. Cambridge, MIT Press. [Se trata de un resumen tomado de la ed. original en lengua ruso, reunida en artículos publicados en Moscú en 1956].

Trabajo desarrollado en el ámbito del programa de Investigación de la Universidad de Bologna: «Aspectos metodológicos (teóricos y empíricos) de la formación inicial y en servicio de los maestros de matemáticas de todo nivel escolar», dentro del programa de Investigación Nacional: «Dificultades en la enseñanza / aprendizaje de la matemática: desarrollo de instrumentos para observar, interpretar e intervenir», financiado por el MIUR (Ministerio Italiano de la Instrucción, Universidad e Investigación) en el período 2005-2006.

Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla

Bruno D'Amore. NRD - Departamento de Matemática - Universidad de Bologna - Italia. ASP - Alta Escuela Pedagógica - Locarno - Suiza. MESCU - Universidad Distrital Fr. José de Caldas - Bogotá - Colombia