NUMEROS,12

DEMOSTRACION DE FORMULAS TRIGONOMETRICAS CON EMPLEO DE LA GEOMETRIA DEL TRIANGULO

Josep Aznar Garcia

INTRODUCCIÓN

Nos proponemos en esta nota deducir las expresiones para el seno y el coseno de la suma o diferencia de dos ángulos, mediante el empleo de la geometría del triángulo.

La idea, como es obvio, no surgió espontáneamente. Tiene su orígen en una lectura hecha en clase a alumnos avanzados de C.O.U, sobre un trabajo del matemático español del XIX, *VENTURA REYES y PROSPER*, en el que se calcula el desarrollo de $\cos(A \pm B)$ conectando la geometría plana con la del espacio.

La conexión se hace sin más que proyectar la arista de un tetraedro de lado unidad sobre el plano determinado por las otras dos, con lo cual, el volumen del tetraedro -que previamente se expresa en función de los tres ángulos- se anula, y, a partir de la relación obtenida, se llega a la fórmula en cuestión (*).

Lo sugerente de la demostración, unido al interés que despertó en los alumnos la exposición de la vida y la obra del citado matemático (**), nos hizo pensar a todos que quizá también seríamos capaces de crear algo nuevo sobre el tema. Expongamos, pues, lo que obtuvimos.

1. En un triángulo cualquiera de vértices A, B, C y lados a, b, c, cada lado es igual a la suma de las proyecciones de los otros dos sobre

La discusión es trivial ;veamos:

i) Si uno de los tres ángulos,por ejemplo el B,es obtuso,entonces $\cos B < 0$, $\operatorname{sen} B > 0$, $\cos A > 0$ y $\operatorname{sen} A > 0$. Además,ha de ser necesariamente $\cos(A+B) < 0$,y en la relación discutida tendremos que seleccionar la diferencia ya que,siendo $\cos A \cos B < 0$ y $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B > 0$, sólo así aseguramos el signo negativo de $\cos(A+B)$.

ii) Si los tres ángulos son agudos,los senos y los cosenos de A y B son positivos. Por otra parte,$\cos(A+B)$ podrá tomar valores positivos o negativos según que $A+B$ sea menor o mayor que un recto. Visto esto,también tendremos que escoger la diferencia para asegurar las posibilidades del signo de $\cos(A+B)$,ya que,si elegimos la suma,al ser positivos el producto de cosenos y el de senos,resultaría,en contra de la hipótesis de partida,que $\cos(A+B)$ sería siempre positivo.

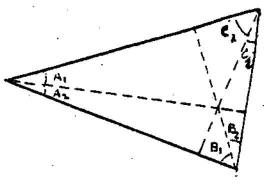
En conclusión,queda demostrado que

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

y,de aquí,se llega fácilmente a

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

2. Para resolver el caso de $\operatorname{sen}(A \pm B)$ intentamos repetir el procedimiento anterior al pie de la letra,pero,debido a la necesidad de descomponer cada uno de los tres ángulos del triángulo,la demostración se complicaba demasiado. Optamos entonces por ir exprimiendo al máximo cada una de las expresiones de partida,hasta llegar a darnos cuenta,finalmente,que con una de ellas se podía obtener el resultado deseado.



él, es decir

$$a = b \cos C + c \cos B$$
$$b = c \cos A + a \cos C$$
$$c = b \cos A + a \cos B$$

o, lo que es lo mismo

$$-a + b \cos C + c \cos B = 0$$
$$a \cos C - b + c \cos A = 0$$
$$a \cos B + b \cos A - c = 0$$

que considerado como un sistema homógeneo de tres ecuaciones con incógnitas a, b, c, y teniendo en cuenta el resultado conocido sobre la infinidad de triángulos definidos por tres ángulos, las soluciones no triviales del problema vendrán dadas por

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

determinante cuyo desarrollo por Sarrus, después de sustituir $\cos C$ por

$$\cos(\ 180-(A+B)\ ) = -\cos(A+B)\ ,$$

da la expresión

$$\cos^2(A+B) - 2 \cos A \cos B \cos(A+B) + \cos^2 A + \cos^2 B - 1 = 0$$

y resolviendo respecto a $\cos(A+B)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos A \cos B \pm \sqrt{\cos^2 A \cos^2 B - \cos^2 A - \cos^2 B + 1} = \\ &\ \cos A \cos B \pm \sqrt{\cos^2 A \cos^2 B + \operatorname{sen}^2 A - \cos^2 B} = \\ &\ \cos A \cos B \pm \sqrt{\cos^2 B\ (\cos^2 A - 1) + \operatorname{sen}^2 A} = \\ &\ \cos A \cos B \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 A - \cos^2 B \operatorname{sen}^2 A} = \\ &\ \cos A \cos B \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 A\ (1 - \cos^2 B)} = \\ &\ \cos A \cos B \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen}^2 B} = \\ &\ \cos A \cos B \pm \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \end{aligned}$$

Ahora, desde la misma geometría del triángulo, tendremos que seleccionar una de las dos soluciones para la expresión

$$\cos(\ A+ B\ ) = \cos A \cos B \pm \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

En el triángulo de la figura, donde $C=C_1+C_2$, $A=A_1+A_2$, $B=B_1+B_2$, si expresamos el lado c como suma de las proyecciones sobre él de los otros dos, resulta

$$c = b\ senC_2 + a\ senC_1$$

Por el teorema del seno ($a/senA = b/senB = c/senC$), podemos expresar a y b en función de c ; así:

$$a = \frac{senA}{senC}\,c \qquad b = \frac{senB}{senC}\,c$$

Sustituyendo en la primera expresión, simplificando y ordenando, resulta

$$sen\,C = senA\ senC_1 + senB\ senC_2$$

y, teniendo en cuenta la suplementariedad y complementariedad de ángulos, finalmente,

$$sen\ (A + B) = senA\ cosB + cosA\ senB \quad \text{c.q.d.}$$

y, en consecuencia,

$$sen\ (A - B) = senA\ cosB - cosA\ senB$$

Notas:

(*) La demostración está expuesta en:

AZNAR, JOSEP -Una nota de trigonometría de Ventura Reyes Prosper (1896)- Enseñanza de las Ciencias, nº 2, 1983.

(**) La bibliografía sobre este autor puede encontrarse en el trabajo anterior.