Rev.Acad.Canar.Cienc., III (Núm. 1),45-64 (1991)

RESOLUCION GENERAL DEL PROBLEMA INVERSO DEL CALCULO DEL VARIACIONES : EL TEOREMA DE TONTI (1984)

J.-F. Pascual-Sánchez

Departamento de Matemática Aplicada Fundamental

Sección de la Facultad de Ciencias

Universidad de Valladolid, Spain

ABSTRACT: In this work, after a general introduction, I develop a synthetic exposition of the fundamental theorem of Tonti (1984), which solve with all generality (also for nonlinear problems) the Inverse Problem of Variational Calculus. This theorem allows to numerically aproximate the solution of nonlinear problems from a functional operator instead from the equation, using the Direct Methods of Calculus of Variations.

RESUMEN : En este trabajo se desarrolla, después de una introducción general, una exposición sintética del teorema fundamental de Tonti (1984). Este teorema resuelve con toda generalidad, (problemas no lineales incluídos) el Problema Inverso del Cálculo de Variaciones. El teorema de Tonti también permite aproximar numericamente la solución de problemas no lineales, partiendo de un operador funcional, en vez de partir de la ecuación, usando los Métodos Directos del Cálculo de Variaciones

Key words : Inverse problem, Operational Calculus of Variations, nonlinear operators, functionals, bilinear forms, integrating operators, direct methods.

Clasificación A.M.S.: 35

1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA VARIACIONAL INVERSO

Cualquier libro de Cálculo de Variaciones comienza con la frase típica:" Consideremos un funcional y a partir de él obtengamos las ecuaciones...", sin embargo, actualmente existe gran interés en el problema inverso: "Dada una ecuación, ¿ existe un funcional que admita a la ecuación como su ecuación de Euler-Lagrange? ".

En este tema efectuaremos un tratamiento autocontenido, desde el punto de vista mas general, del Problema Inverso del Cálculo de Variaciones, es decir, el problema de saber cuando admiten una formulación variacional, una ecuación o sistema de ecuaciones lineales o no lineales, ordinarias o en parciales, diferenciales, integrales, integrodiferenciales, de argumento retardado, con condiciones iniciales y/o de contorno homogéneas o no homogéneas.

Se demostrará, exponiendo los teoremas de Volterra (1887) [15] y de Tonti (1984) [13], que la existencia de formulación variacional, en los sentidos que discutiremos, es siempre posible y obtendremos el correspondiente funcional, el cual, si la solución es además extremo, nos permitirá conocer su comportamiento aproximado, vía los métodos directos del Cálculo de Variaciones.

Comenzamos con la exposición del problema. Dada una ecuación o sistema de ecuaciones por ejemplo, no lineales, con la notación $\mathcal{N}(u) = 0_V$, donde $\mathcal{N}$ es el operador formal, las preguntas que se efectúan son dos:

1) ¿ Existe un funcional que admite a la ecuación del problema como ecuación de Euler-Lagrange?. O en otras palabras, ¿cuales son las condiciones para que las soluciones de la ecuación, hagan a un funcional J [u] estacionario, i.e., sean sus puntos críticos?.

2) Cuando esas condiciones se verifiquen, ¿como se encuentra J [u] y como puede ser construido?.

El problema variacional inverso que hemos indicado es uno de los cuatro tipos posibles, a este se le denomina **Problema restringido formal**, ya que se considera el operador formal: $\mathcal{N}(u) = 0_v \;/\; \mathcal{N} : D(\mathcal{N}) \subset U \dashrightarrow V$, que actúa entre dos espacios vectoriales topológicos U y V y la solución del problema consiste en la búsqueda de la función "u" tal que la función $v = \mathcal{N}(u)$ se anule. Las funciones "u" y "v", que pueden estar valuadas en los reales,en complejos, en vectores o en tensores pueden ser consideradas como vectores en los espacios vectoriales de dimensión infinita U y V respectivamente y el operador $\mathcal{N}$, como un campo vectorial. Explotaremos esta analogía, en lo posible, con el cálculo vectorial en dimensión finita, para que los resultados sean pedagogicamente mas sencillos.

Además del problema formal, nos interesará sobre todo la resolución del **Problema Variacional inverso no formal**, que basicamente es un problema formal al que se añaden condiciones iniciales y/o de contorno, consideraremos en este caso la formulación variacional del problema siguiente:

$$N(u) = 0_V \quad \equiv \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}(u) = 0_V \\ u \in D(N) \subset D(\mathcal{N}) \subset U \ , \end{array} \right.$$

donde $N : D(N) \subset D(\mathcal{N}) \subset U \dashrightarrow R(N) \subset V$, siendo el dominio del operador no formal N, D(N), el dominio del problema, que es un subconjunto del espacio ambiente o espacio de funciones admisibles $D(\mathcal{N})$. Utilizaremos siempre en adelante, una letra historiada para denotar al operador formal y una estandar para denotar al nó formal.

Además de las formulaciones variacionales formal y no formal del problema inverso, existen en cada una de ellas dos tipos diferentes: en sentido restringido y en sentido generalizado.

Definición 1: Formulación Variacional Restringida

Dado un problema $N(u)= 0_V$, con $D(N) \subset U$ y $R(N) \subset V$, encontrar, si existe, un funcional $J[u]$ / $EL(u) = N(u)$ / $u \in D(N)$, i.e., tal que $\text{grad } J[u] = N(u)$. (EL denota ecuaciones de Euler-Lagrange).

Definición 2.- Formulación Variacional Generalizada

Dado el problema $N(u) = 0_V$, con $D(N) \subset U$ y $R(N) \subset V$, encontrar, si existe, un funcional $\hat{J}[u]$, cuyos puntos críticos sean las soluciones del problema y viceversa. O de otra forma, deducir si existe un problema $\hat{N}(u) = 0_V$ que tenga las mismas soluciones que N(u) y exista un $\hat{J}[u]$ tal que $\text{grad } \hat{J}[u] =$ $= \hat{N}(u)$.

El problema inverso en sentido generalizado, requiere solamente la coincidencia de la variedad crítica del funcional $\hat{J}$, con la variedad nula del operador N. El problema inverso en sentido restringido, requiere una relación más estricta entre N y

J, ya que N debe ser el gradiente de J con respecto, como veremos, a una determinada funcional bilineal, además en este último caso, el dominio de N coincide con el dominio de J.

2.- RESUMEN HISTORICO DEL PROBLEMA INVERSO

En primer lugar hay que señalar que, historicamente, ha habido dos ramas fundamentales, la que trata el problema formal y que utiliza sobre todo métodos de Geometría Diferencial (una referencia completa y reciente es [6]) y prolongaciones de variedades fibradas y la rama que trata el problema inverso no formal utilizando el método operacional y Análisis Funcional. El hecho curioso es que los desarrollos de ambas han estado completamente separados durante mas de ochenta años, debido a que los autores de una no citaban nunca a los de la otra y viceversa y a que publicaban en revistas de carácter puro, los de la rama formal, y de carácter aplicado y de ingeniería, los autores de la rama operacional no formal.

Curiosamente, en ambas vías se soluciona practicamente a la vez el problema inverso restringido para ecuaciones no lineales: en la vía formal, Hemholtz (1886) [2], tratando las ecuaciones de Newton, y en la operacional, Volterra (1887) [15]. Otros autores del inicio de la primera rama son Darboux (1894), Hirsch (1897). Autores de la vía operacional no formal son, además de Volterra (1887, 1913, 1930), Kerner (1933) y Vainberg (1954, 1964, 1973) [14].

Ambas vías fueron unificadas en 1969 por Tonti [11], a nivel de formulación restringida.

En cuanto al problema inverso generalizado, hay que decir, que se han usado fundamentalmente tres métodos:

1) El método del operador integrante, que transforma el problema en otro equivalente con las mismas soluciones, aunque la naturaleza analítica del problema puede cambiar.

2) El método del cambio de la forma bilineal, implícita en cualquier formulación variacional.

3) El método del cambio de la función incógnita "u", mediante dos maneras: a) Transformación diferencial de la función. Método del potencial alterno. b) Sumando la ecuación adjunta de la dada. Método de la ecuación adjunta o compuesto.

El problema generalizado formal se formula por Davis en 1928 y es estudiado por Douglas en 1941, siendo desarrollado por Lepage (1946), Havas (1957) y Edelen (1969). Todos estos autores utilizan el método del factor integrante (caso particular del de operador integrante).

El método de la ecuación adjunta para problemas formales, no lineales y generalizados fué desarrollado en 1949 por Dedecker y utilizado para resolver problemas inversos formales, lineales y restringidos, por Morse y Feschbach en 1953 [7].

A partir de 1964 y dentro del método operacional no formal, i.e., incluyendo las condiciones iniciales y/o de contorno, Gurtin estudió el problema generalizado para ecuaciones lineales de coeficientes constantes, en particular, obtuvo un funcional de acción para la ecuación de Fourier-Fick de difusión, utilizando el método del operador integrante. El campo de problemas resueltos fué ampliado por Magri [4] en 1974 a ecuaciones lineales de cualquier tipo y no solo las de coeficientes constantes, usando el método del cambio de la forma bilineal. Posteriormente, Telega en 1979 intentó generalizar el método del cambio del funcional bilineal para problemas no lineales, pero la clase de operadores en los que este método funcionaba era muy pequeña. Finalmente, Tonti en 1984 [13], resolvió el problema no formal generalizado para problemas no lineales, usando, en vez de factores integrantes como había efectuado Davis al formular el problema generalizado formal en 1928, un método más general: el del operador integrante.

En lo que sigue, explicitaremos los métodos comentados, exponiendo los dos teoremas fundamentales, el de Volterra (1887) [15] sobre el problema inverso no formal restringido y el de Tonti (1984) [13], sobre el problema inverso no formal generalizado. Usaremos siempre el mínimo posible de elementos de Algebra y de Análisis Funcional, en concordancia con un planteamiento didáctico del tema.

3.- NOTACION OPERACIONAL DEL CALCULO DE VARIACIONES

Como ya se ha dicho, se obtiene la resolución del problema $N(u)= 0_V$, cuando se conoce la variedad nula del operador no formal $N : D(N) \subset U \longrightarrow R(N) \subset V$, que actúa entre los espacios funcionales U y V, que, en principio, son solo espacios vectoriales topológicos de dimensión infinita y cuyo dominio D(N) supondremos que es una región convexa de U. Al operador lo consideraremos como un campo vectorial infinito dimensional.

Para proporcionar una formulación variacional al problema $N(u) = 0_v$, se necesita un funcional bilineal sobre el campo real, simétrico, valuado en los reales (independientemente de cual sea el campo de escalares de U y V) / $\langle\ ,\ \rangle$: $V \times U \to R$. Con la forma bilineal, se dice que los espacios U y V están en paridad o en dualidad. Además se requiere que la forma lineal sea separadora en V y en U, i.e., si $\langle v,u\rangle = 0$ para todo "u" perteneciente a un subconjunto denso de U, entonces necesariamente $v = 0_v$ y lo mismo para U.

<u>Definición 3</u>: <u>Adjunto de un operador lineal L</u>

Dada una determinada forma bilineal simétrica $\langle\ ,\ \rangle$ entre dos espacios lineales en dualidad, se denomina adjunto del operador lineal L, al operador L^* que satisface que $\langle Lu,v\rangle = \langle u,L^*v\rangle$, para todo "u" $\in D(L)$ y todo "v" $\in D(L^*)$.

<u>Definición 4</u> : <u>Simétrico de un operador lineal</u>

Un operador lineal L se dice simétrico respecto de la forma bilineal $\langle\ ,\ \rangle$, si $\langle Lu,v\rangle=\langle u,Lv\rangle$ o con otra notación, si $L \subseteq L^*$, para todo $u,v \in D(L)$ (en general $D(L) \subset D(L^*)$, i.e., L^* es una extensión de L). Si los dos dominios coinciden, entonces $L = L^*$ y L es autoadjunto. Es fácil comprobar que si un operador es simétrico, entonces también lo son su cuadrado y su inverso. Finalmente, hay que recordar que, en particular, en dimensión finita, las matrices son simétricas solo relativamente o con respecto a una determinada forma bilineal.

<u>Definición 5</u>: <u>Circulación de un operador N</u>

Definimos la circulación del operador N(U), con respecto a la forma bilineal $< \, , \, >$, a lo largo de un elemento de línea de D(N) (familia uniparamétrica de funciones de D(N)) definida por u: $[0,1] \longrightarrow D(N) \subset U \; / \; \lambda \longrightarrow u(x, \lambda)$ entre los puntos $u_0(x) = u(x,0)$ y $u_1(x) = u(x,1)$ como:

$$C = \int_{u_0}^{u_1} < N(u(\lambda)) \, , \, du(\lambda) >$$

<u>Definición 6</u>: <u>Funcional potencial J [u]</u>

Si la circulación no depende de la línea sino solamente de las funciones inicial y final, podemos considerar la circulación de N(u) a lo largo de líneas rectas, sin perder generalidad, del tipo $u(x, \lambda) = u_0(x) + \lambda (u(x) - u_0(x))$ y asociar a cada función $u \in D(N)$ un número real a través del funcional (campo escalar) $J[u] : D(N) \subset U \longrightarrow R$, definido como:

$$J[u] = J[u_0] + \int_0^1 < N(u_0 + \lambda (u - u_0)) \, , \, u - u_0 > d\lambda$$

Si el dominio del operador N contiene al elemento O_u, la anterior fórmula se puede simplificar, obteniendo la siguiente:

$$J[u] = J[O_u] + \int_0^1 < N(\lambda u) \, , \, u > d\lambda$$

Tomando $J[O_u] = 0$ y la forma bilineal canónica, se obtiene:

$$J[u] = \int_\Omega \int_0^1 N(\lambda u) \, u \; d\lambda \, d\Omega$$

donde Ω es el campo de las variables independientes. Al funcional J [u], se le denomina potencial del operador N(u) .

<u>Definición 7</u>: <u>Operador Lagrangiano</u>

Se denomina operador Lagrangiano al definido por la integral siguiente:

$$l(u) = u \int_0^1 N(\lambda u) \quad d\lambda .$$

Definición 8 : Diferencial de un operador N

Se denomina diferencial de Gâteaux (lineal) del operador N en el punto u y en la dirección ϕ, al operador lineal en ϕ, obtenido a través del límite definido por la topología del espacio V, siguiente:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{N(u + \epsilon \phi) - N(u)}{\epsilon} = D\,N(u, \phi) = N'_u \, \phi$$

En el caso particular de un operador lineal L, se obtiene que $L'_u \, \phi = L \, \phi$.

Definición 9 : Gradiente de un funcional J [u]

Dado el funcional $J[u] = \int_\Omega l(u) \, d\Omega$, se denomina gradiente de J [u] a otro funcional conteniendo la diferencial de Gâteaux del operador Lagrangiano, en la forma:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J[u + \epsilon \phi] - J[u]}{\epsilon} = \int_\Omega l'_u \, \phi \, d\Omega ,$$

que, después de una integración por partes, queda en la forma:

$$\langle N(u) , \phi \rangle = \int_\Omega N(u) \, \phi \, d\Omega$$

donde el dominio del operador lagrangiano, D(l) es tal que los términos de contorno se anulan y entonces diremos que el operador N(u) es el gradiente de J[u], i.e., N(u)= grad J[u].

La variación de J [u] a lo largo de δu, tangente a la línea es: $\delta J[u] = J'_u(u;\delta u)$.

Por lo tanto, si u_0 es una solución de $N(u) = 0_v$, entonces necesariamente $\delta J[u]\big|_{u_0} = 0$ y reciprocamente si $\delta J[u]\big|_{u_0} = 0$, entonces para variaciones arbitrarias δu, entonces $N(u_0) = 0$.

4.- PROBLEMA VARIACIONAL RESTRINGIDO NO FORMAL: TEOREMA DE VOLTERRA (1887)

Teorema de Volterra: Para que el operador (en general no lineal) $N : D(N) \subset U \dashrightarrow R(N) \subset V = U^*$, sea el gradiente de un funcional $J[u]$, es necesario que la circulación de $v=N(u)$, a lo largo de cualquier curva cerrada simple contenida en $D(N)$ sea cero. Tomando un paralelogramo infinitesimal la anulación de la circulación se expresa como:

$$N'_u \subseteq N'_u{}^* \qquad \text{ó} \qquad \langle N'_u \Phi, \varnothing \rangle = \langle N'_u \varnothing, \Phi \rangle,$$

o, dicho de otra forma, el operador lineal $N'_u(u;\ )$ debe ser simétrico respecto de una forma bilineal simétrica, real y no degenerada.

La condición anterior, es también suficiente, si el dominio de N, i.e., $D(N)$, es simplemente conexo.

Finalmente, si $u(\lambda)$ es una curva de u_0 a u, con $u(0)=u_0$ y $u(1) = u$, el funcional es:

$$J[u] = J[u_0] + \int_0^1 \langle N(u(\lambda)), \frac{\partial u(\lambda)}{\partial \lambda} \rangle \, d\lambda$$

Nótese que el teorema de Volterra es una aplicación al Cálculo de Variaciones del Lema de Poincaré y su recíproco.

Corolario: Para problemas lineales, $L\ u = f$, la condición del teorema del Volterra consiste en la simetría del operador lineal L, i.e., $L \subseteq L^*$.

Comentario: Hay que señalar que la condición de simetría de la derivada de Gâteaux del operador es relativa a una determinada forma bilineal y que, por lo tanto, si un determinado operador no es simétrico respecto de la forma canónica, tomando una forma bilineal apropiada, si lo será.

5.- FORMULACION VARIACIONAL NO FORMAL GENERALIZADA PARA PROBLEMAS LINEALES: METODO DEL CAMBIO DEL FUNCIONAL BILINEAL

Antes de caer en la cuenta de que un operador es potencial solo en sentido relativo, argumento que es considerado por Tonti (1973) [12], se usaban fundamentalmente dos métodos para la resolución del problema inverso generalizado de ecuaciones diferenciales lineales con problemas de valores iniciales y/o de frontera:

a) El método de los operadores formalmente autoadjuntos.

b) El método de la suma de la ecuación adjunta de Morse y Feschbach [7].

El inconveniente del primer método, que ha sido el primero historicamente y que se usa profusamente en Mecánica Analítica y en Teoría Clásica de Campos, es que siempre transforma un problema de valores iniciales en uno de contorno, aunque tiene como ventaja el que proporcione la ecuación diferencial formal del problema de valores iniciales.

El inconveniente del método de Morse y Feschbach es que no se puede conocer cual es el significado de la función adjunta ni de las condiciones de contorno adjuntas que introduce, aunque tiene como ventaja que se resuelven problemas inversos de problemas disipativos, por ej., la ecuación de difusión de Fourier-Fick, como si fueran conservativos (o conservadores).

Todos los problemas inversos generalizados de ecuaciones lineales, se resuelven mediante el método del cambio de la forma bilineal, la cual, como hemos visto, determina cualquier principio variacional.

Entre los muchos ejemplos que podríamos escoger, tomemos el que aparece en general en <u>Cinética Química</u>, i.e., un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, homogéneo y de coeficientes constantes, con condiciones iniciales homogéneas:

$$\frac{d}{dt} u_h(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kh}\, u_k(t)$$

con $u_h(0) = 0$ y $a_{kh} = a_{hk}$ y $u_k(t) \in C^1\,[0,T]$.

Este problema no admite una formulación variacional restringida, ya que el operador formal d/dt no es simétrico respecto de la forma bilineal normal ó canónica, sin embargo si que admite un principio variacional generalizado, si cambiamos el funcional bilineal y tomamos el convolutivo:

$$\langle u , v \rangle_c = \int_0^T u(T-t)\, v(t)\, dt$$

Por consiguiente, se verifica el teorema de Volterra con el funcional bilineal convolutivo.

El mismo método permite dar una formulación variacional generalizada a todas las ecuaciones integrales (Fredholm, Volterra, etc) e integrodiferenciales, con núcleo convolutivo.

6.- TRANSICION DE PROBLEMAS LINEALES A NO LINEALES

A través del operador de convolución, $C\,v(t) = v(T-t)$, el cual es simétrico respecto de la forma bilineal normal, se encuentran principios variacionales generalizados para operadores que sean simétricos respecto de la forma bilineal convolutiva. En general, Magri [4] para problemas lineales y Tonti (1984) [13] para problemas no lineales, han demostrado que, siempre existe un funcional bilineal de tal suerte, que cualquier operador no formal pueda satisfacer el teorema de Volterra.

La regla operativa es la siguiente: Dado cualquier operador invertible K (en general integral y de núcleo simétrico), se construye la forma bilineal real, simétrica, no degenerada $\langle v , u \rangle_K = \langle K v , u \rangle$, y si el operador del problema, N, es simétrico respecto de $\langle \; , \; \rangle_K$, entonces es simétrico respecto de la forma bilineal normal y se verifica el teorema de Volterra.

Este es un hecho general, el cambio de un funcional bilineal es equivalente a la premultiplicación por un operador invertible K . Pero mientras que para problemas lineales, la elección entre ambos métodos es una materia de preferencia, para resolver el problema inverso de problemas no lineales, es mas simple usar el método del operador integrante.

7.- FORMULACION VARIACIONAL NO FORMAL GENERALIZADA DE PROBLEMAS NO LINEALES:TEOREMA DE TONTI (1984)

Mientras que el método del <u>factor</u> integrante es válido para resolver ciertos problemas generalizados, no es válido en general. Sin embargo, el método del operador integrante siempre es válido. Para ver como se implementa este, tomamos la aproximación inductiva y observamos lo que sucede en el caso finito dimensional con los problemas inversos de las ecuaciones matriciales $Ax=b$. En este caso si la matriz adjunta A^* es invertible, entonces el operador A^*A es simétrico respecto de la forma bilineal normal y se puede construir un funcional, cuyos puntos críticos son las soluciones del problema matricial de partida.

En problemas funcionales siempre se puede aplicar una generalización de este método. Como ejemplo, tomemos un problema muy sencillo: Sea el operador lineal siguiente

$$d = \left\{ d/dt,\ u(0) = 0 \ ,\quad u \in C^1\ [0,T] \right\}$$

y el problema $du = f \ / \ f \in C^0\ [0,T]$, entonces el operador adjunto es $d^* = \left\{ -d/dt,\quad v(T) = 0,\quad v \in AC\ [0,T] \right\}$, donde AC denota continuidad absoluta.

Obviamente d^*d es un operador simétrico respecto de la forma normal, pero d^* no se puede aplicar a ambos miembros del problema ya que $f \notin D(d^*)$, al no verificarse que $f(T) = 0$.

El problema se soluciona aplicando primero al problema, un operador K simétrico respecto de la forma canónica e invertible en la forma: $K\,du= K\,f \ / \ K:R(\dot{d})\text{-->}D(d^*)$, por ejemplo

$$K\, f(\tau) = \tilde{f}(t) = \int_0^T k(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau \qquad y \quad k(T,\tau)=0$$

Aplicando ahora el operador adjunto d^* a ambos miembros, se obtiene $d^*Kdu = d^*Kf$. Este último problema tiene las mismas soluciones que el original si d^* y K son invertibles. Además, si K es simétrico entonces d^*Kd es también simétrico y se verifica el teorema de Volterra. Por lo tanto, se ha resuelto el problema generalizado para el problema original. Como hemos visto, el papel del operador K es el de modificar el rango de "d" haciéndolo "digestible" por el operador "d^*". El operador d^*K es el operador integrante.

A continuación, se extiende este método a problemas no lineales mediante el Teorema de Tonti.

<u>Teorema de Tonti (1984)</u> [13]

Consideremos dos espacios lineales U y V tales que un funcional bilineal simétrico, real y no degenerado $\langle v,u \rangle$ pueda ser definido; equipemos a los dos espacios con una norma que haga a $\langle\ ,\ \rangle$ continua en ambos argumentos. Sea el problema (en general no lineal) $N(u) = 0_v$, cuyo operador no formal

$N : D(N) \subset U \dashrightarrow R(N) \subset V = U^*$ es tal que:

1) La solución del problema existe y es única.

2) Su dominio D(N) es simplemente conexo.

3) Existe la derivada de Gâteaux (lineal) $N'_u(u;.)$ para todo $u \in D(N)$.

4) $D(N'_u)$ es denso en U.

5) El operador adjunto $N'^{*}_{u}(u;.)$ es invertible para todo $u \in D(N)$.

Sea un operador K que verifique las siguientes condiciones:

a) $R(N) \subset D(K)$.

b) $R(K) \subset D(N'^{*}_{u})$.

c) K es lineal, invertible, simétrico y definido positivo respecto de el funcional bilineal $< , >$.

Entonces para todo operador K que verifique las anteriores condiciones, el operador definido por:

$$\hat{N}(u) = N'^{*}_{u}(u, K\,N(u))$$

tiene las siguientes propiedades:

1) $D(\hat{N}) = D(N)$.

2) Los problemas $\hat{N}(u) = 0_v$ y $N(u) = 0_v$ tienen la misma solución.

3) $\hat{N}(u)$ es potencial (satisface el teorema de Volterra) y es el gradiente del funcional

$$\hat{J}[u] = \hat{J}[u_0] + 1/2 <N(u), KN(u)>,$$

el cual es mínimo para la solución del problema.

La demostración de este teorema se puede hacer de manera sencilla, pero no la explicitamos en este trabajo, por razones de espacio.

El Teorema de Tonti permite, bajo condiciones poco restrictivas, encontrar la formulación variacional generalizada de problemas no lineales, sin cambiar las condiciones iniciales y/o de frontera e incluso la clase funcional de las funciones que aparecen en el problema. Además, es siempre posible construir un funcional que sea mínimo en la solución del problema.

8.-COMENTARIOS FINALES Y PERSPECTIVAS

Para encontrar constructivamente a los operadores K, invertibles, simétricos y definidos positivos, que resuelvan el problema inverso generalizado, hay, hasta el momento, dos métodos diferentes:

1.- Operadores inversos de operadores diferenciales simétricos y definido positivos, i.e., operadores integrales, cuyo núcleo es la función de Green del operador diferencial. Desafortunadamente, este método tiene dos serios problemas. El primero es que las funciones de Green de operadores diferenciales parciales, se conocen unicamente para dominios muy simples. El segundo es que, incluso para dominios simples, las funciones de Green se expresan por series y en las aplicaciones numéricas se deben truncar estas series, con lo que el núcleo resultante es degenerado y K ,por lo tanto, no es invertible en todo el espacio funcional en el que se trabaje.

2.- Otros tipos mas generales de operadores integrales, por ejemplo:

$$K\, v(t) = \int_0^1 \exp\,(t\tau)\ \phi(t)\ \phi(\tau)\ v(\tau)\ d\tau$$

Finalmente, no resta sino señalar que, el comportamiento aproximado de la solución se puede obtener numericamente aplicando los Métodos Directos del Cálculo de Variaciones [5] y que como hemos visto, mediante el problema inverso generalizado lo verdaderamente importante no es una ecuación en si misma, ya que siempre se puede considerar otra diferente analiticamente, pero equivalente, i.e., que tenga las misma solución, sino el funcional.

La obtención aproximada de la solución de problemas no lineales unidimensionales (Korteweg de Vries, sine-Gordon, Burgers, Schrödinger no lineal, etc) y de problemas generales no lineales (Navier-Stokes, Boltzmann, Yang-Mills, Einstein, etc) a partir de un funcional mediante el Cálculo Variacional, está practicamente en sus inicios, pero, en nuestra opinión, no cabe duda que permitirá un gran desarrollo en las aplicaciones de los Métodos Directos.

AGRADECIMIENTO

Agradezco al Profesor Enzo Tonti de la Università di Trieste los envíos de sus trabajos.

REFERENCIAS

[1].- COLLATZ L., Functional Analysis and Numerical Mathematics, ed. Academis Press, (1966).

[2].- HELMHOLTZ H., J. für die Reine und Angew. Math.,(1886) 137-166, 213-222.

[3].- GURTIN M.E., Arch. Rational Mechanics Anal.,13,(1963) 179-197.

[4].- MAGRI F., Inter. J. Engng. Science, 12,(1974),537-549.

[5].- MICHLIN S.G., Variational Methods in Mathematical Physics, ed. Pergamon Press, (1964).

[6].- MORANDI G., FERRARIO C., LO VECCHIO G., MARMO G., RUBANO C., Phys. Reports, 188 , (1990), 147-284.

[7].- MORSE M., FESCHBACH H., Methods of Theoretical Physics, ed. Mc Graw-Hill, (1953).

[8].- MORREY C.B., Multiple integrals in the Calculus of Variations, ed. Springer,N.Y., (1966).

[9].- SCHAEFER H., Topological Vector Spaces, ed. Springer, (1978).

[10].- TAPIA R.A., NASHED M.Z. en Nonlinear Analysis and Applications, ed. L.B. Rall, ed. Academic Press, (1971).

[11].- TONTI E., Bull.Acad. Roy. de Belgique Scr. 5 LV, (1969), 137-165, 262-278.

[12].- TONTI E., Annali di Matematica Pura ed Applicata, XCV,(1973),331-360.

[13].- TONTI E., Inter. J. Engng. Science,22,(1984),1343-1371.

[14].- VAINBERG M.M., Variational Method and Method of monotone operators in the theory of non-linear equations,ed. J. Wiley &Sons,(1973).

[15].- VOLTERRA V., Rend.Acc.Lincei III,(1887),97-105,153-158

Recibido: 10 de Marzo de 1991