# *EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES Y ECUACIONES POLINOMICAS EN 1º DE B.U.P. : Un enfoque diferente al usual .*

*Cástor Molina Iglesias*
*I.B. "Poeta Viana"*
*Santa Cruz de Tenerife*

## 1. INTRODUCCION

Se da aquí una presentación del tema, diferente de la que se acostumbra a dar en los textos ordinarios de 1º de B.U.P., en la que no se hace uso ni mención de los números complejos para, en cambio, insistir en aspectos geométricos del Algebra que potencien la intuición del alumno.

Fundamentalmente, esta presentación aporta una visión coherente con el tema, aplicándose los mismos métodos al estudio de todas las funciones y ecuaciones, con grado creciente de dificultad, hasta llegar a un resultado general y verdaderamente importante : el teorema fundamental del Algebra en forma real.

Entre las particularidades de este enfoque destacan las siguientes :

.. Se refuerza el concepto de coordenadas.

.. Se introduce al alumno a los cambios de variable (traslaciones de ejes y cambios de escala).

.. Uso constante de la regla de Ruffini (esquema de Horner) ,ya sea para dividir, para calcular valores numéricos o para cambio de variable por traslación en los polinomios.

.. Avance de ideas como continuidad, crecimiento y derivabilidad, en forma muy simplificada - para lo que se ha usado la formulación simétrica en lugar de la usual -, durante el estudio de las funciones cuadrática y cúbica.

.. Estudio paralelo de las inecuaciones en X de grados 1 y 2.

.. Apreciación de la necesidad de usar otros métodos (gráficos, de aproximación numérica), para la búsqueda de las raíces de las ecuaciones de grado superior a 2.

.. Significación geométrica de la multiplicidad de una raíz.

.. Noticia sobre los polinomios de grado n arbitrario(forma de la gráfica según la paridad de n y descomposición factorial).

Por motivos obvios, aquí sólo se dará la presentación en su esqueleto, sin entrar en las motivaciones ni en las aplicaciones, cuyo número es ilimitado para los polinomios. No obstante, pienso que, habida cuenta de lo mal preparados que vienen nuestros alumnos en lo que respecta a la Geometría, convendría que se compensase esta deficiencia, en la medida de lo posible, con problemas de índole algébrico-geométrica, como, por ejemplo el siguiente : "Calcular la altura del arco que intersecta una cuerda en un círculo, conocidos ésta y el diámetro del círculo" . Una simple aplicación de semejanza de triángulos conduce aquí a una ecuación de 2º grado, que el alumno ha de resolver e interpretar luego geométricamente las soluciones.

De todos modos, corresponde a cada profesor marcarse unos objetivos y, en función de ellos, elegir una didáctica determinada, marcar el ritmo, buscar los ejercicios y problemas, las motivaciones, las aplicaciones, etc., contando con el material humano disponible, que no siempre es el mismo.

Creo que a los alumnos de 1º de B.U.P. hay que hacerles entrar en el universo matemático en la forma más concreta, pero, al mismo tiempo, general, posible. La geometrización del Algebra puede ayudarles mucho en este aspecto.

La calculadora permite hoy resolver fácilmente el problema de representar una curva formando su tabla de valores,pero, ¿en qué intervalo darle los valores? Si el intervalo no contiene el centro de simetría de la parábola o la cúbica,la gráfica dibujada nos dirá poco sobre su forma; es necesario el estudio general.

Por otro lado,algunos conceptos que se introducen en 2º,como es la continuidad,allí ya en su forma más general,¿no es preferible que el alumno los haya palpado antes,aunque sea en una forma más intuitiva,y en casos muy simples?. Esto es lo que se ha pretendido aquí al introducir algunas nociones primitivas del cálculo infinitesimal.

Los números complejos no se han usado en este trabajo porque no aportan nada esencial al tratamiento,sino más bien confunden al alumno. Así,por ejemplo,las soluciones imaginarias de $f(x)=0$ se representan en el plano de Gauss;pero no se pueden representar,al interpretarlas como cortes con el eje X de $y=f(x)$,en el plano ordinario. Creo que tal vez en 2º de B.U.P. es cuando se deberían ver los complejos en forma binómica, y así habría más continuidad con la forma trigonométrica que se estudia en 3º. En 1º se ven los números reales por primera vez y a ellos debemos limitarnos durante todo el curso.

## 2. TRASLACIONES PARALELAS DE LOS EJES DE COORDENADAS

Consideremos la recta real,es decir,una línea recta en la que se han particularizado dos puntos 0 y 1,quedando determinados los demás puntos mediante un número real x, su abscisa ,en este sistema de referencia. Sea "i" un valor particular de x.

¿Qué ocurre si,conservando la escala,trasladamos el orígen 0 y la unidad 1 a los puntos i e i+1,respectivamente? Llamemos t a la abscisa del punto x en la nueva graduación de la recta.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| t-abscisas | $-i$ | $-i+1$ | 0 | 1 | $t = -i+x$ |
| x- abscisas | 0 | 1 | $i$ | $i+1$ | $x$ |

A través de diversos ejemplos,el alumno,conocida x,calculará t y viceversa, hasta llegar a la conclusión de que se cumple siempre la fórmula de transformación:

$$t = x - 1 \quad ó \quad x = t + 1$$

Por ejemplo, se puede tomar la edad de un alumno cualquiera si hubiese nacido "i" años antes o "i" años después; problemas de cambios de fechas de la era cristiana a la musulmana (suponiendo que los años musulmanes tuvieran el mismo número de días); problemas de distancias kilométricas entre ciudades; de conversión de grados Celsius a Kelvin; etc.

Una vez que el alumno haya comprendido los cambios de abscisas por traslación "conservando la escala", se le puede introducir en el cambio general de coordenadas (x,y) por traslación paralela de los ejes, conservando la escala, llevando el origen al punto (i,j), que estará regido por las fórmulas:

$$t = x - i \quad ; \quad s = y - j$$

para las nuevas coordenadas (t,s).

## 3. LA FUNCION LINEAL

La escala Farenheit de temperatura tiene su origen en -32 $^{o}$C pero, además, la "escala", esto es, el tamaño del intervalo unidad, es 5/9 del tamaño del intervalo unidad de la escala Celsius. La fórmula de transformación de $^{o}$C a $^{o}$F es:

$$f = 32 + 9/5\ t$$

Ejemplos como éste, o procedentes de la Geometría, Economía, etc., nos servirán para introducirnos en el estudio de la función

$$y = f(x)\ ,\ \text{donde}\ f(x) = ax + b\ ,\ (a \neq 0)$$

Efectuando un cambio de abscisa $t = x - i$, ¿se simplificará el estudio de la función? Veamos que sí:

$$f(t+i) = a(t+i) + b = at + f(i)$$

Notemos que esto mismo se podría haber hecho sin más que dividir f(x) entre x-i (=t), para lo que podríamos usar el esquema de Ruffini, y obtener:

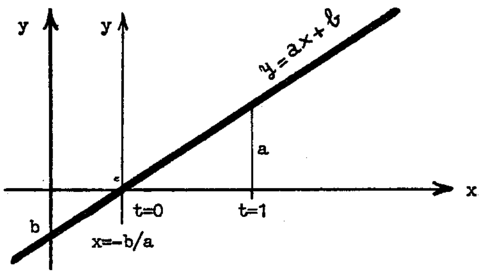
$$f(x) = a(x-i) + f(i)$$

En particular, para $i=-b/a$ resulta $f(i) = 0$, de donde:

$$y = f(t - b/a) = at$$

Así, la transformación de coordenadas $(x,y)$ en $(t,y)$, con $t=x+b/a$, convierte el estudio de $y = ax + b$ en el de $y = at$. Pero esta última relación expresa la proporcionalidad directa entre las dos magnitudes "t" e "y", y, por tanto, su gráfica es una línea recta pasando por el origen $t=y=0$.

Referida a los ejes primitivos $(x,y)$, la recta no pasa por el origen, sino por $(-b/a\ ,\ 0)$ y por $(0,b)$.




Notemos que "a" mide el ángulo que forma la recta con el eje horizontal y, aunque no hay una proporcionalidad directa entre ambos, si el ángulo aumenta(disminuye) también "a" aumenta(disminuye). Llamaremos a "a" pendiente o inclinación de la recta.

Así, en la ecuación $y = ax + b$ , "a" es el coeficiente angular y "b" es el coeficiente de posición.

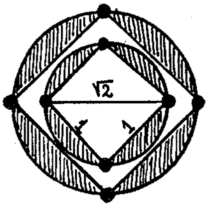
Conviene en este punto relacionar esto con los problemas reales de la pendiente de una carretera, y que el alumno observe que si $(x_1,y_1)$ y $(x_2,y_2)$ son dos puntos de la recta, entonces

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

y que el signo de "a" determina el crecimiento o decrecimiento de y respecto a x.

## 3. LA FUNCION CUADRATICA

Consideremos un cuadrado de área unidad y su círculo circunscrito y,por tanto, de diámetro $\sqrt{2}$. Si aumentamos el radio del círculo en x,¿cómo aumentará la diferencia entre las áreas del círculo circunscrito al cuadrado y éste,en sus distintos tamaños? Esto nos lleva,llamando "y" a dicha diferencia,a escribir:




$$y = \pi(\sqrt{2}/2 + x)^2 - (1 + 2x/\sqrt{2})^2$$

que,después de desarrollada,queda

$$y = (\pi - 2)x^2 + \sqrt{2}(\pi - 2)x + \pi/2 - 1$$

o bien

$$y = 1'14159..x^2+1'61445..x+0'570796..$$

Este,como muchos otros,es un ejemplo de situación geométrica llevando a la formulación de una dependencia cuadrática entre dos magnitudes:longitud y área. A través de situaciones concretas,motivaremos el estudio de la función cuadrática general $y = f(x)$, donde

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ ,(a\neq 0).$$

Procedamos,de nuevo,como en el caso lineal,a intentar un cambio de abscisa $t=x-i$,a ver si en las nuevas coordenadas se simplifica el estudio de la gráfica de nuestra función. Notemos que se trata de escribir $f(x)$ como un polinomio en $x-i$ ,es decir,en t.

Por división repetida,mediante Ruffini,se obtienen los coeficientes(obsérvense los restos):

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ i) & & ai & ai^2+bi \\ \hline & a & ai+b & \boxed{f(i)} \\ i) & & ai & \\ \hline & a & \boxed{c(i)} & \end{array}$$

donde:

$$f(x)=(x-i).c(x) + f(i)$$
$$c(x)=(x-i).a + c(i)$$

y,por sustitución de $c(x)$ en $f(x)$,resulta:

$$f(x) = a.(x-i)^2 + c(i).(x-i) + f(i)$$

Es evidente que tomando en particular $i=-b/2a$,resulta $c(i)=0$,lo que nos permite escribir,para la sustitución $t=x-i=x + b/2a$,lo siguiente:

$$y = f(t - b/2a) = at^2 + f(i)$$

Si llamamos $j=f(i)$,entonces,efectuando el cambio de ordenada por traslación, $s=y-j$,tenemos,finalmente,que la traslación paralela de los ejes,llevando el origen a $(i,j)$,lo que transforma nuestras coordenadas $(x,y)$ en $(t,s)$,permite escribir la ecuación $y=f(x)$ en la forma más simple:

$$s = at^2$$

Esta función toma el mismo valor en $-t$ que en $t$,luego su gráfica será simétrica respecto del eje s. En consecuencia,la gráfica de $y=f(x)$ será simétrica respecto al eje $x-i$ $(=-b/2a)$.

Por otro lado,$(0,0)$ es un punto de la gráfica de $s=at^2$,y signo(s)= =signo(a) si $t\neq 0$. Así,el origen $t=s=0$ es el punto más bajo(mínimo) o el más alto(máximo) de la gráfica de $s=at^2$,según sea,respectivamente,$a>0$ ó $a<0$. Consecuentemente,lo mismo se podrá decir para el punto $(i,j)$,llamado vértice de la curva $y=f(x)$.

Para fijar ideas,en lo sucesivo supondremos $a>0$,habida cuenta de la simetría existente entre las gráficas de $y=f(x)$ e $y=-f(x)$,respecto del eje horizontal.

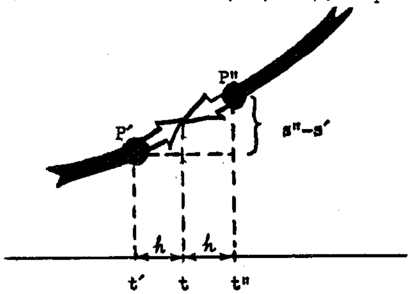
Por la simetría de $s=at^2$,podemos suponer t no negativo. Tomemos dos puntos de la gráfica de esta función,digamos $(t', s')$ y $(t'',s'')$, en el cuadrante $(+,+)$. Podemos suponer que $t'<t''$. Sea t el punto medio del segmento que determinan y 2h su amplitud. Entonces

$$s'' - s' = a(t+h)^2 - a(t-h)^2 = 4ath > 0 ,$$

luego vemos que la gráfica de $s=at^2$ es creciente,si nos limitamos a los reales no negativos. Por simetría,será decreciente en el semieje $t \leqslant 0$. Todo esto se traslada ahora a la gráfica de $y=f(x)$,diciendo que esta función será decreciente en la semirrecta $x \geqslant i$ y decreciente en $x \leqslant i$.

Vamos a estudiar ahora la curva,gráfica de $s=at^2$,en lo que respecta a su continuidad. En el lenguaje usual,"continuo" significa lo que se hace o transcurre sin interrupción. Para el alumno,la curva es continua si todas sus partes están unidas entre si y podemos unir dos puntos cualesquiera de ella mediante un trazo que no nos obligue a levantar el lá piz del papel.

Llamemos, como arriba, $P'=(t',s')$ y $P''=(t'',s'')$, con $t < t''$, a dos puntos de la gráfica de $s=at^2$. Por sencillez, llamaremos $t$, $2h$, al punto medio, amplitud del intervalo $(t',t'')$, respectivamente.




Los puntos $P'$ y $P''$ están "indicados" o "etiquetados" por sus respectivas abscisas. Por su arbitrariedad, la curva será continua si al aproximarse a cero $t''- t'=2h$, entonces $P'$ tiende a confundirse con $P''$, esto es, si la distancia entre ambos, medida por la longitud del segmento $P'P''$, tiende a anularse. Por la desigualdad triangular:

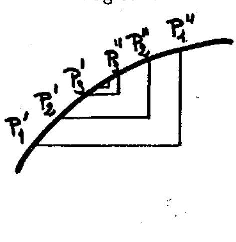
$$\text{long } \overline{P'P''} < | t'' - t'| + | s'' - s'|=2h+s''-s'$$

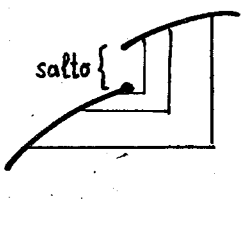
Vemos que para que el primer miembro de la desigualdad tienda a anularse cuando h tiende a 0, es suficiente que $s''- s'$ verifique esa misma condición. Pero,

$$s''- s'= 4ath \quad \text{tiende a 0 si h tiende a 0 ;}$$

luego nuestra curva es continua.

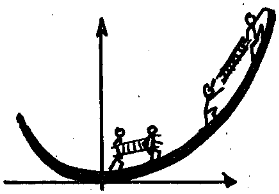
En realidad, nuestra definición de continuidad, funciona aquí, porque estamos tratando con funciones definidas en toda la recta y que, además, son monótonas a trozos. Así, las únicas situaciones posibles son las que ilustran estas figuras:



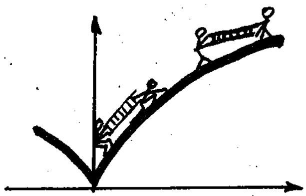



Ya verá el alumno en 2º de B.U.P., al estudiar nuevas clases de funciones, la necesidad de mejorar esta definición que ahora vale. Incluso aquí, se ha evitado el concepto de continuidad en un punto, que es un poco más difícil, y se ha considerado la curva globalmente. Tampoco se ha tenido en cuenta un aspecto más dinámico de la continuidad : el relativo a "dos puntos que se aproximan el uno al otro en la curva".

Por último, queremos ver si la forma de nuestra curva es la del tipo mostrado en la figura (I) o la del de la (II) :



(I)



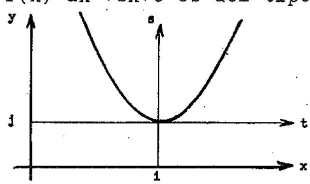
(II)

El alumno puede imaginar dos hombres, materializados por dos puntos P′ y P′′ de la curva, portando una escalera (segmento-cuerda $\overline{P'P''}$), y preguntarse cómo varía la pendiente (inclinación) de la escalera a medida que los hombres suben por la curva, de izquierda a derecha, limitándonos, como siempre, por razones de simetría, al semieje $t \geq 0$. Evidentemente, en (I) aumenta la pendiente y en (II) disminuye.

Formalizando esto, con las notaciones anteriores, tenemos:

$$\text{pend. de } \overline{P'P''} = \frac{s''-s'}{t''-t'} = \frac{4ath}{2h} = 2at$$

Vemos que la pendiente aumenta con t; luego la curva es del tipo (I). De este modo, y resumiendo todo lo anterior, llegamos a la conclusión de que la gráfica de $y=f(x)=ax^2+bx+c$ es del tipo:




El caso a<0 se obtiene, como hemos dicho, tomando la figura simétrica de $y=-f(x)$ respecto al eje t.

## 5. LA ECUACION DE 2º GRADO

La función cuadrática $y= ax^2+bx+c$ corta siempre al eje y en el punto único (0,c). El estudio de los posibles puntos de corte con el eje x lleva a la búsqueda de las soluciones de y=0, es decir, de $ax^2+bx+c=0$.

Pero, usando el cambio de abscisa $t=x-i$ $(i=-b/2a)$, como se vio anteriormente, podemos limitarnos a buscar las soluciones de

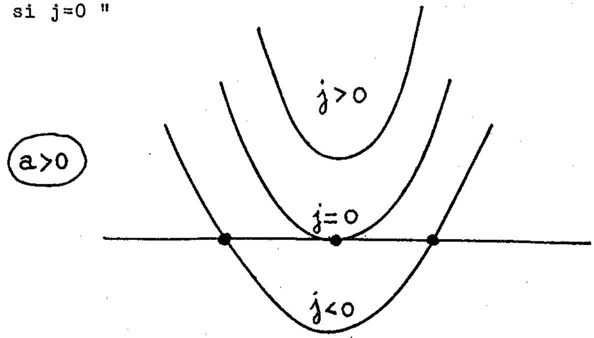
$$at^2 + j = 0 \quad (\text{ vértice : } (i,j) )$$

de donde se obtiene

$$t^2 = - j/a$$

De aquí sacamos un primer criterio de resolubilidad, con un significado geométrico evidente :

" LA ECUACION DE 2º GRADO TIENE SOLUCION SI Y SOLO SI $\operatorname{sign}(a) \neq \operatorname{sign}(j)$ o si $j=0$ "




Calculemos el valor de $j = ai^2 + bi + c$, con ayuda del esquema de Ruffini:

$$\begin{array}{r|ccl}
 & a & b & c \\
-b/2a=i) & & -b/2 & -b^2/4a \\
\hline
 & a & b/2 & \lfloor (4ac-b)^2 / 4a = j
\end{array}$$

Volviendo a la ecuación $at^2 + j = 0$, resulta:

$$t^2 = -j/a = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

y vemos que "UNA CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE DE RESOLUBILIDAD ES QUE EL NUMERO $D = b^2 - 4ac$ SEA NO NEGATIVO "

Se llama a D el discriminante de la ecuación $ax^2+bx+c=0$.

Si $D \geqslant 0$ ,como $t= x - i = x + \frac{b}{2a}$ , tenemos

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{D}{4a^2} \quad \text{,de donde}$$

$$x = ( -b \pm \sqrt{D} ) /2a \qquad (*)$$

también escrita a menudo en la forma

$$x = i \pm \sqrt{i^2-(c/a)} \qquad ( i = -b/2a )$$

que expresa bien a las claras la simetría de las raíces respecto de la abscisa del vértice.

Si llamamos $x_1,x_2$ a las raíces de la ecuación cuadrática,obtenidas mediante esta última fórmula,es claro que se cumple que:

$$x_1 + x_2 = 2i = - b/a$$

$$x_1 \cdot x_2 = i^2 - (i^2- \frac{c}{a}) = c/a$$

Estas relaciones,que expresan la suma y producto de las raíces en función de los coeficientes,o,mejor,los coeficientes,en el caso a=1, como polinomios simétricos de las raíces,se llaman relaciones de Viéte. Y es curioso que ya los seléucidas (cfr. Neugebauer,p.40,41,149,150) y los antiguos babilonios planteaban problemas de 2º grado en esta forma y,linealizando el sistema de Viéte,obtenían las soluciones en una forma equivalente a la fórmula (*) que,según Colerus,p.134,se debe a los árabes.

## 6. LAS INECUACIONES DE 1º Y 2º GRADO

Se supone que el alumno ya conoce la relación de orden en la recta real y su compatibilidad con las operaciones algebraicas racionales. Sin menoscabo de que use estas propiedaes para resolver inecuaciones de grado 1,y la descomposición factorial junto con la regla de los signos para resolver inecuaciones de grado 2,se puede hacer,simultáneamente casi,el estudio geométrico de las inecuaciones $f(x) \lesseqgtr 0$ , donde f(x) es un polinomio de grado 1 ó 2, dibujando aproximadamente la curva $y = f(x)$ y estudiando el signo de y para los intervalos o semirrectas determinados por las raíces de la ecuación $f()=0$.

## 7. LA FUNCION CUBICA

Vamos a estudiar ahora la función $y=f(x)$, donde

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

y, como en casos anteriores, ensayaremos un cambio de variable $t=x-i$, con el objeto de simplificar la ecuación que determina los puntos de la gráfica de esta función y así poder llevar a cabo más fácilmente su estudio.

Como ejemplos de funciones cúbicas, el alumno tiene todas aquellas que relacionan dimensiones lineales de un cuerpo como la esfera o el cubo con su volumen. Por ejemplo, el estudio de cómo varía el costo en pesetas del material necesario para construir un depósito esférico de acero, en función de su espesor, si el precio en el mercado de la tonelada de acero es de A ptas.

Para expresar $f(x)$ como un polinomio en $t=x-i$, usaremos las divisiones sucesivas por Ruffini, con lo que resulta, como en los casos lineal y cuadrático, que :

$$f(t+i) = at^3 + \bar{c}(i)t^2 + c(i)t + f(i)$$

Evidentemente, si tomamos $i = -b/3a$, se obtiene $\bar{c}(i)=0$ y, para este valor particular de i, podemos escribir:

$$y = at^3 + c(i)t + j \quad , \text{ donde } j=f(i)$$

Si efectuamos también el cambio de ordenada definido por $s=y-j$, se obtiene por último:

$$s = at^3 + c(i)t \qquad (*)$$

que es la ecuación de la gráfica de $y=f(x)$ referida a unos ejes paralelos a los $(x,y)$, cuyo origen está en $(i,j)$.

Si sustituimos en (*) t por -t , s se cambia en -s ; luego la gr<u>á</u>fica de esta función es simétrica respecto del origen t=s=0 ,es decir, la gráfica de y=f(x) es simétrica respecto del punto (i,j).

Vamos ahora a limitar nuestro estudio al semiplano $t\geq 0$. También, para fijar ideas,nos limitaremos en lo sucesivo a a>0 ,lo cual,como hemos dicho anteriormente,no supone ninguna pérdida de generalidad,habida cuenta de la simetría entre y=f(x) e y=-f(x).

Empecemos por estudiar el crecimiento. Sea $t'<t''$ y llamemos t al punto medio del intervalo que determinan,y 2h a su amplitud. Entonces:

$$s''- s'= a(t+h)^3 + c(i)(t+h) - a(t-h)^3 -c(i)(t-h) =$$

$$= 2h(3at^2 + ah^2 +c(i))$$

El polinomio cuadrático entre paréntesis tiene su vértice en t=0; por tanto,su signo,y el de $s''-s'$,será negativo entre 0 y su raíz positiva (si existe) $t_h$ y será positivo a partir de $t_h$.

Pero, $t_h = \sqrt{(-ah^2 - c(i))/3a}$ disminuye al aumentar h; por tanto,el extremo superior de todos estos valores es precisamente

$$t_o = \sqrt{-c(i)/3a}$$

Si $t'< t''$ son dos números no negativos menores que $t_o$ ,entonces:

$$t''^2 = (t+h)^2 < -\frac{c(i)}{3a} = t_o^2$$

De aquí se sigue que:

$$t^2 + 2ht + h^2 + \frac{c(i)}{3a} < 0$$

pero el producto del primer miembro por 3a>0 es una expresión asimismo negativa y que mayora a:

$$3at^2 + ah^2 + c(i)$$

lo que hace que esta última expresión y,por consiguiente,$s'- s''$ sean negativas.

Por el contrario, si $t'<t''$ son ambos mayores que $t_o$, entonces su punto medio t será mayor que $t_h$, cualquiera que sea h, y $s''-s'$ será positiva.

En consecuencia, la función (*) es decreciente entre 0 y $t_o$; creciente, a partir de $t_o$. En particular, si $t_o=0$, será creciente siempre.

¿Qué ocurre si $t_o$, es decir, si ningún $t_h$ existe? Entonces, claramente, ha de ser c(i) positivo o nulo; pero en estas condiciones, como se ve enseguida de la expresión para $s''-s'$, esta diferencia es siempre positiva, esto es, (*) es creciente siempre.

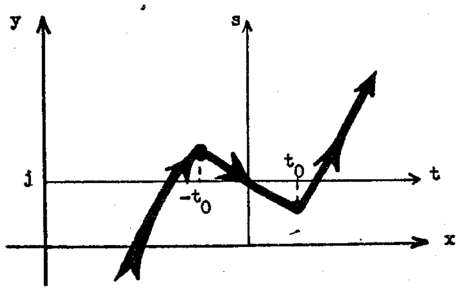
Vamos a buscar una expresión para $t_o$, en función de los coeficientes a,b,c,d de f(x). Un simple cálculo, con ayuda del esquema de Ruffini, nos permite calcular la expresión para c(i) = c(-b/3a). Resulta :

$$t_o = \frac{\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$$

Por simetría, (*) decrece entre $-t_o$ y $t_o$; crece fuera de este intervalo (recuérdese que suponemos a positivo). Por tanto, la función y=f(x) decrece entre $i-t_o$ e $i+t_o$ y crece fuera de ahí. Notemos que $i\pm t_o$ son las raíces, si existen, del polinomio cuadrático

$$3ax^2 + 2bx + c$$

Podría ser conveniente, quizás, en este momento (y comparando con la función cuadrática $y=ax^2+bx+c$, que cambia su sentido de crecimiento precisamente en -b/2a, raíz de 2ax+b), dar al alumno la regla práctica de derivada de un polinomio -sin hablar de derivadas-, como una especie de regla mnemotécnica.



En cuanto a la continuidad de esta curva en un punto $(t,s)$ cualquiera, procedemos como en el caso de la función cuadrática, poniendo $t' = t-h$, $t''=t+h$ y analizando la diferencia

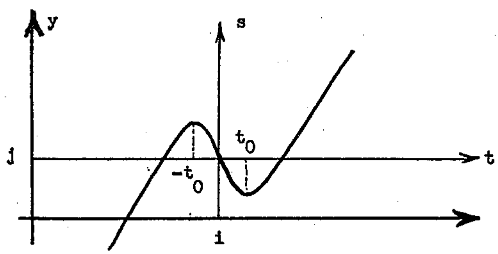
$$s'' - s' = 2h(3at^2 + ah^2 + c(i))$$

que vemos tiende a cero cuando h tiende a cero. Es decir, su gráfica es una curva continua.

Por último, para analizar la forma de la curva en las proximidades de $t_o$ (recordemos las gráficas tipo I y tipo II consideradas en el estudio de la función cuadrática), consideramos la pendiente del segmento $P'P''$ que une dos puntos de la curva situados en el semiplano $t \geqslant 0$ referidas las abscisas al punto medio t de $t'$ y $t''$ y a la amplitud 2h de este intervalo. Formamos el cociente:

$$\text{pend. de } \overline{P'P''} = \frac{s''-s'}{t''-t'} = 3at^2 + ah^2 + c(i)$$

donde h es arbitrariamente pequeño y se puede considerar el valor de $h^2$ incluso despreciable. Vemos que la pendiente aumenta con t; luego la curva es del tipo I mencionado, a la derecha de $t_o$. Si $0 < t < t_o$, entonces $s'' - s'$, y por tanto la pendiente, es negativa; así $c(i)$ es negativa y por tanto al aumentar t, el valor de la pendiente aumenta al ser negativo y disminuir su valor absoluto. En consecuencia, tanto a la derecha como a la izquierda de $t_o$, la forma de la gráfica es del tipo I.

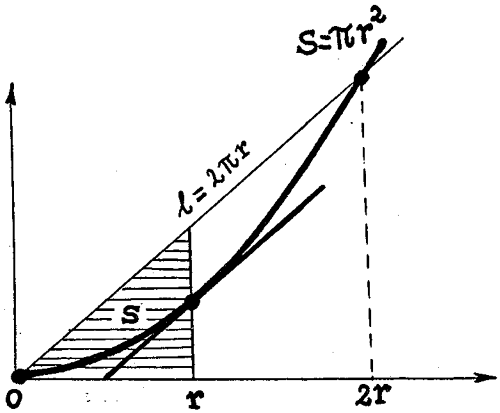


## 8. LONGITUDES.AREAS Y VOLUMENES

Consideremos la función cuadrática $s=\pi r^2$ $(r>0)$. Si formamos el cociente

$$\frac{\pi(r+h)^2 - \pi(r-h)^2}{2h} = 2\pi r \quad ,$$

el miembro de la izquierda es la relación del área de una corona circular a su grosor,pero en términos de la función área "s",representa la pendiente de la recta que une dos puntos situados simétricamente respecto del punto de abscisa r. Si h es muy pequeño,estos dos puntos tienden a confundirse con (r,s) y la recta secante que los une tiende a confundirse,por tanto,con la recta tangente en (r,s). Como el miembro de la derecha es constante respecto a h,vemos que $2\pi r$ ha de ser la pendiente de la recta tangente a "s" en r.




Esto que está viendo el alumno y que,sin duda,llamará su atención,especialmente cuando compruebe lo análogo para el cuadrado,no es sino la formulación geométrica de un caso particular del teorema fundamental del cálculo. Si llamamos "pendiente de una función en un punto" al valor de la pendiente de su recta tangente en ese punto,lo anterior se resume así : " La pendiente del área de un círculo es la longitud de su circunferencia ".

Todo lo visto le llamará aún más la atención cuando compruebe por si mismo que para $V = 4/3\ \pi r^3$ , se obtiene

$$\frac{V(r+h) - V(r-h)}{2h} = 4\pi(r^2 + \frac{h^2}{3})$$

de donde,al hacer tender h a 0,llegamos a la conclusión de que : "La pendiente del volumen de una esfera es el área de la superficie que la envuelve".

Estas ideas son muy simples,pero en ellas está el germen de resultados muy importantes en Matemáticas. Al mismo tiempo que el alumno se asoma a ellos,sirven,por su llamatividad,para atraer su atención y motivarle.

## 9. LA ECUACION CUBICA

La ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ expresa la condición que han de cumplir las abscisas de los puntos de corte de la función cúbica, estudiada anteriormente,con el eje x.

Como vimos,esta ecuación se puede poner en la forma equivalente más sencilla

$$at^3 + c(i)t + j = 0$$

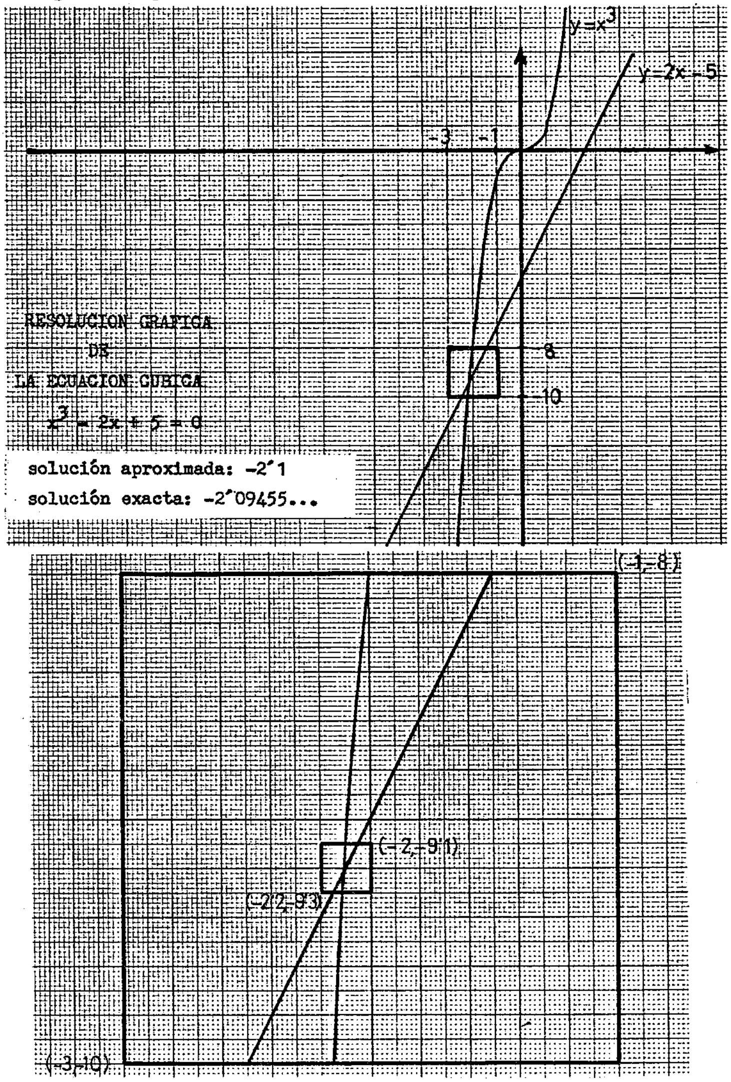
donde (i,j) era el centro de simetría de la curva,siendo $t = x-i$.

Dividiendo entre $a\neq 0$,se puede poner por último en la forma

$$t^3 + pt + q = 0$$

La resolución de esta ecuación por métodos algebraicos para llegar a una expresión de las raíces en términos de los coeficientes,en forma análoga a la obtenida para la ecuación cuadrática,nos lleva a la conocida fórmula de Cardano. Para calcular las raíces en esta forma,en el llamado "caso irreducible" es necesario el concurso de los números complejos en forma trigonométrica o polar,los que no estudiará el alumno hasta 3º de B.U.P. Se hacen,pues,necesarios,otros métodos de resolución aproximada,ya sean gráficos o numéricos.

Lo mejor es un método que sea la combinación de ambos,pues aunque los primeros nos servirían para calcular las soluciones con la precisión requerida-limitada por la obtención de raíces cúbicas-,por sucesivos aumentos de la zona de corte de la parábola cúbica $y=t^3$ con la recta $y=-pt-q$,como se muestra en el ejemplo siguiente,lo cierto es que lo engorroso del procedimiento hace que su utilidad sea fundamentalmente la de fijar el intervalo de búsqueda de la raíz. Usaremos,por tanto, el método gráfico para acotar las raíces.



Como métodos iterativos,de aproximación numérica de las raíces de la ecuación cúbica,tenemos los de aproximaciones sucesivas,que posiblemente conozca ya el alumno como algoritmo para calcular las raíces n-simas de un número real (Cfr. N.Ya. Vilenkin,p.57 y sgs.),pero quizás el más sencillo de aplicar y evidente intuitivamente para un alumno de 1º de B.U.P. es,sin duda,el algoritmo de subdivisiones sucesivas o método de encajamiento de Bolzano,normalmente justificado con rigor en el C.O.U.

En el uso práctico de estos métodos conviene observar que (Cfr. Fröberg,p.19) aunque $f(x)=0$ y $kf(x)=0$ tienen las mismas soluciones exactas,cuando se trabaja con soluciones aproximadas se sustituye $f(x)=0$ por $f(x)\simeq 0$ ,es decir,por $f(x)$ comprendido en un intervalo de tolerancia $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Así,si $x_1$ es solución de $f(x)=0$,es decir,si $f(x_1)$ está comprendido entre $-\varepsilon$ y $\varepsilon$,puede ocurrir,en cambio,que $kf(x_1)$ se salga de este intervalo y que $x_1$ no sea raíz de $kf(x)=0$,para el grado de precisión deseado.

En consecuencia,para la búsqueda de raíces por métodos aproximados se debe trabajar siempre con las ecuaciones originales.

Al aplicar el método de subdivisiones sucesivas se usará la regla de Ruffini para el cálculo de los valores numéricos de los polinomios. Si en lugar de efectuar sólo biparticiones,se usan,alternadamente, biparticiones seguidas de 5-particiones,el alumno manejará expresiones decimales más sencillas. Esto tiene interés sobre todo teniendo en cuenta que muchos alumnos usan calculadoras sin tecla de memoria.

Una vez determinada una raíz $x_1$ del polinomio cúbico,se divide éste por $x-x_1$ y se calculan las raíces,si las hubiere,del polinomio cuadrático resultante.

Se le puede mostrar al alumno,intuitivamente,a través de los diferentes gráficos,ilustrativos de todas las situaciones de signo o nulidad de p y q ,que la ecuación

$$t^3 + pt + q = 0$$

y,por tanto,la ecuación cúbica general tiene siempre solución. No obstante,volveremos a esto más adelante,viéndolo desde otros punto de vista: como caso particular de un polinomio general de grado impar.

## 10. CAMBIOS DE ESCALA

Mediante una traslación paralela de los ejes,esto es,mediante un cambio de coordenadas del tipo t=x-i , s=y-j, las ecuaciones

$$(a) \quad y = ax + b$$
$$(b) \quad y = ax^2 + bx + c$$
$$(c) \quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

se convierten,como vimos,en

$$(a') \quad y = at \quad ( \text{o} \quad s = at \text{ , con } j=0 )$$
$$(b') \quad s = at^2$$
$$(c') \quad s = at^3 + c(i).t$$

Estas ecuaciones representan la misma función en distintos ejes, o distintas funciones en el mismo eje. En este último punto de vista, las gráficas respectivas sólo se diferencian en su posición espacial, obtenida por traslación paralela,punto a punto,una de la otra,de magnitud la del segmento que une los puntos (0,0) e (i,j). Tal vez es éste un buen momento para hablarle al alumno de lo que es un vector o segmento dirigido,aunque su estudio se lleve a cabo en el curso siguiente.

Un cambio de escala (tamaño del intervalo unidad) en el eje de ordenadas,o sea,una transformación de semejanza,afecta sólo a las dimensiones verticales de la figura (se alarga o se aplasta según que la razón de semejanza sea mayor o menor que 1),no a su forma. Mediante el cambio de escala $s = |a|.S$ ,las ecuaciones de arriba se transforman en:

$$(a'') \quad Y = \pm t$$
$$(b'') \quad S = \pm t^2 \quad , \text{ si } |a| = \pm a$$
$$(c'') \quad S = \pm t^3 + \frac{c(i)}{|a|} t$$

Las diferencias de orientación (rectas de pendiente positiva o negativa;parábolas cuyo vértice es mínimo o máximo,etc),se traducen en otro cambio de coordenadas,que es la reflexión $S' = -S$ . Mediante ella, las ecuaciones referidas toman por fin y si fuese necesario,la forma:

$$(a^*) \quad Y' = t$$
$$(b^*) \quad S' = t^2$$
$$(c^*) \quad S' = t^3 \pm \frac{c(i)}{|a|}\, t$$

Vemos,pues,que,salvo su posición en el espacio,su tamaño y su orientación,todas las rectas y todas las parábolas tienen la misma forma;en cambio,no sucede lo mismo con las cúbicas. Así,por ejemplo,en el semieje $t \geq 0$ , las dos primeras,$(a^*)$ y $(b^*)$,son crecientes siempre; en la última,por el contrario,el segundo sumando hace que en unos casos sea siempre creciente,y en otros tenga un intervalo $(0,t_0)$ de decrecimiento.

## 11. RAICES MULTIPLES Y DESCOMPOSICION FACTORIAL

Consideremos de nuevo la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, y supuesto admite soluciones,podemos escribir,en virtud de la relación de Viéte,lo siguiente:

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)\,(x-x_2) \ ,$$

que es la descomposición factorial del polinomio cuadrático.

Si ambos factores lineales coinciden $(x_1=x_2)$,entonces la raíz $x_1$ se llama "doble" ; se verifica obviamente que el discriminante $D=0$ y $x_1=i$ . Es decir,si hay una raíz doble,ésta es la abscisa del vértice de la gráfica de la función cuadrática asociada y el vértice $(i,0)$ es el punto de contacto de la parábola con el eje x.

Hemos hecho observar que la ecuación cúbica $ax^3+bx^2+cx+d=0$ siempre tiene,al menos,una raíz real,que llamaremos $x_1$. Dividiendo por $x-x_1$, resulta

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x-x_1).\ c(x)$$

donde grad. $c(x) = 2$ y $c(x)$ tiene coeficiente principal a,pudiendo este polinomio tener una raíz real doble,dos raíces reales diferentes o no tener raíces reales. En este último caso la igualdad de arriba expresa la descomposición factorial del polinomio cúbico primer miembro. Si existen raíces reales $x_2, x_3$ de $c(x)=0$, entonces

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

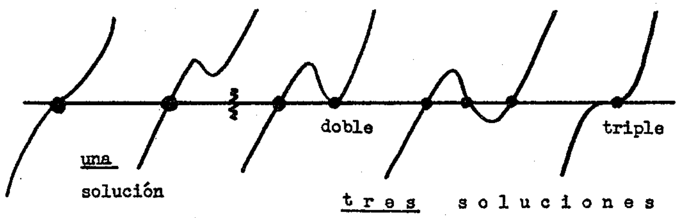
es la descomposición factorial del polinomio.

Si dos de estos factores coinciden entre si pero no con el tercero, la raíz correspondiente se llama doble, y si los tres factores coinciden se llama triple.

Las fórmulas de Viéte se escriben ahora así :

$$-b/a = x_1 + x_2 + x_3$$
$$c/a = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$
$$-d/a = x_1x_2x_3$$

De la primera de estas relaciones, vemos que si $x_1$ es una raíz triple, entonces $-b/a = 3x_1$ , de donde $x_1 = -b/3a = i$ . Así, si hay una raíz triple, estará localizada en el centro de simetría.




Notemos que de las tres raices del polinomio cúbico, supuesto que existan, una es posible que sea doble y distinta de la tercera, digamos $x_1 \neq x_2 = x_3$ . Entonces, $f(x) = (x-x_1).c(x)$ con $c(x)=a(x-x_2)^2$ y $x_2$ estará situada en el vértice de $y=c(x)$.

Todo polinomio cúbico tiene siempre al menos un factor lineal, es decir, siempre es reducible (descomponible en un producto de dos factores propios, esto es, de grado estrictamente menor).

Consideremos la ecuación cúbica $ax^3+bx^2+cx+d=0$ y sea $x_1$ una raíz real de dicha ecuación, que sabemos que siempre existe. Supongamos que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x-x_1)\ (ax^2 + px + q)$$

con $p^2-4aq < 0$. Entonces,ha de ser $aq > 0$ ,es decir, signo(a)=signo(q). Pero, $d=-x_1q$ ;luego signo($x_1$) = signo(-d/q) = signo(-d/a).

Por otra parte,si la ecuación cúbica tiene tres raíces reales,la última de las relaciones de Viéte ( $x_1x_2x_3 = -d/a$ ),nos dice que al menos una de las tres raíces,digamos la $x_1$,tiene el mismo signo que -d/a.

En consecuencia:

(i) Si a y d tienen signos opuestos,la ecuación cúbica tiene una raíz real positiva.

(ii) Si a y d tienen igual signo,la ecuación cúbica tiene una solución real negativa.

Esto nos da un criterio muy elemental de acotación de raíces,que usaremos,no obstante,en el estudio de la ecuación cuártica,en el apartado siguiente.

## 12. LA ECUACION CUARTICA

Consideremos la ecuación cuártica $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ a título de ejemplo de los polinomios de grado par superior a 2. Como en los casos estudiados con detalle anteriormente,la sustitución $t=x-i$, con $i=-b/4a$, permite eliminar el término de tercer grado y,dividiendo por a,obtener una ecuación equivalente más simple. Esta:

$$t^4 + pt^2 + qt + r = 0.$$

¿Se podrá descomponer el primer miembro en un producto de dos factores cuadráticos? Si así ocurriese,ambos factores habrían de tener sus términos de grado 1,de igual valor absoluto y signos opuestos,para que desapareciese el término cúbico en el producto. Ensayemos (Cfr. Fröberg,p.21-23 ; también Hoffman,p.5) la descomposición,atribuida a Descartes,siguiente:

$$t^4 + pt^2 + qt + r = (t^2 + ut + v)\ (t^2 - ut + w)$$

Igualando coeficientes después de efectuar el producto,obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} v + w - u^2 & = p \\ u(w-v) & = q \\ vw & = r \end{array}\right\}$$

Eliminando v,w resulta una ecuación cúbica en $k=u^2$ :

$$k^3 + 2pk^2 + (p^2-4r)k - q^2 = 0 .$$

Como su coeficiente principal y su término independiente son de signos opuestos,tiene una raíz real positiva. Esto nos permite obtener u,v,w, una tras otra.

Los polinomios cuadráticos de la descomposición del polinomio cuártico,pueden no tener raíces. Así,un polinomio cuártico puede no tener raíces reales,pero si las tiene,su número es par,contando su multiplicidad.

## 13. NOTICIA SOBRE LOS POLINOMIOS DE GRADOS 5.6...

Sea,en general,la función polinómica $y=f(x)$,donde

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_o$$

Sacando factor común el primer término,podemos escribir:

$$f(x) = a_n x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_o}{a_n x^n}\right)$$

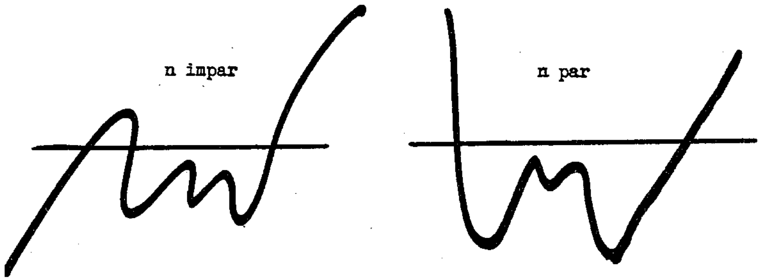
Todos los alumnos saben que una fracción es directamente proporcional a su numerador e inversamente proporcional a su denominador. En consecuencia,si x se hace muy grande,los términos entre paréntesis,excepto el primero,se hacen muy pequeños y todo el paréntesis es aproximadamente igual a 1.

Así pues,si x es muy grande, $f(x) \simeq a_n x^n$.

En particular,si n es impar,$f(-x)$ y $f(x)$ tendrán signos opuestos. Pero el alumno admitirá el hecho (demostrado para $n\leq 3$),que se cumple y se le demostrará en 2º con toda generalidad,de que la gráfica de toda función polinómica es una línea continua. Por otra parte, es un hecho intuitivamente claro, que una línea continua que une un punto del semiplano superior con otro del inferior, por fuerza habrá de cortar la línea (eje x) de separación entre ambos.

De lo antedicho surge la conclusión obvia : "Todo polinomio de grado impar tiene, al menos, una raíz real".

Como método de búsqueda, sirve, en cualquier caso, el algoritmo de las subdivisiones sucesivas del intervalo donde f(x) cambia de signo.




Un polinomio de grado par puede no cortar al eje x (como vimos en el caso del polinomio cuártico), pero si lo hace, lo cortará un número par de veces (contada la multiplicidad de la raíz). La causa es que, si $x_1$ es una raíz, entonces $f(x):(x-x_1)$ es un polinomio de grado impar.

Todo el estudio anterior conduce al teorema fundamental del Algebra, imposible de demostrar a este nivel, pero fácilmente aceptable por el alumno si se le ha motivado con un estudio como el previo. Creo que el enunciado preferible, en este curso, es en la forma real (Cfr. Birkhoff, p.761), debida a Euler :

" Todo polinomio con coeficientes reales se puede descomponer, salvo múltiplos numéricos, de modo único, en un producto de factores lineales y cuadráticos "

O, en términos de reducibilidad : " Los únicos polinomios, con coeficientes reales, irreducibles son los de grado 1 y los de grado 2 con discriminante negativo "

14. NOTA FINAL.- En cuanto al modo de obrar para conseguir, con

esta presentación del tema,los fines educativos deseados,depende mucho de la circunstancia particular de cada clase,habida cuenta la actual crisis educativa y la disparidad de niveles de los alumnos que comienzan el B.U.P. Tal vez en unas clases se pueda explicar con todo detalle, y en otras,en cambio,sólo pueda ser motivo de un seminario con los alumnos más aventajados.

No faltan multitud de ejemplos concretos de dentro y fuera de la Matemática que llevan a ecuaciones y funciones polinómicas,con los que no sólo hay que motivar al alumno,sino ayudarle a que sea capaz de matematizar el mundo que le rodea,de resolver problemas reales.

El estudio de la representación tabular con corrección,precisión y limpieza,no se ha de excluir. Previamente,el alumno determinará,con arreglo a algún criterio (por ejemplo,la simetría de la curva),el intervalo de valores de la variable;usará papel milimetrado y formará (fijado el paso $\Delta x$) la tabla de valores con ayuda de la regla de Ruffini y su calculadora manual;etc.

Todo el desarrollo del tema lleva su tiempo,pero los polinomios son las funciones más importantes,sin duda,en las Matemáticas,e interesa conocerlos y manejarlos perfectamente.

Más importante que dar muchos temas en cada curso,es dar unos pocos,pero darlos bien;profundizando en ellos en la medida de lo posible, acostumbrando al alumno a sacar provecho de las herramientas que conoce y no sobrecargándolo con el peso de innumerables conocimientos a los que luego no puede sacar una utilidad inmediata. No sirve de nada "oír hablar" de las cosas si no se las entiende;la erudición no acerca a la comprensión.

BIBLIOGRAFIA CITADA

GARRET BIRKHOFF - Current trends in Algebra - Amer. Math.Month - Sept. 1973 - pp. 760-782

EGMONT COLERUS - Breve historia de la Matemática - Ed. Doncel - Vol. I - Madrid,1972.

CARL ERIK FRÖBERG - Introducción al Análisis numérico - Ed. Vicens Vives Universidad - Barcelona, 1977.

J.E. HOFFMAN - Historia de la Matemática - Ed. U.T.E.H.A. -Vol. II (1961) - México.

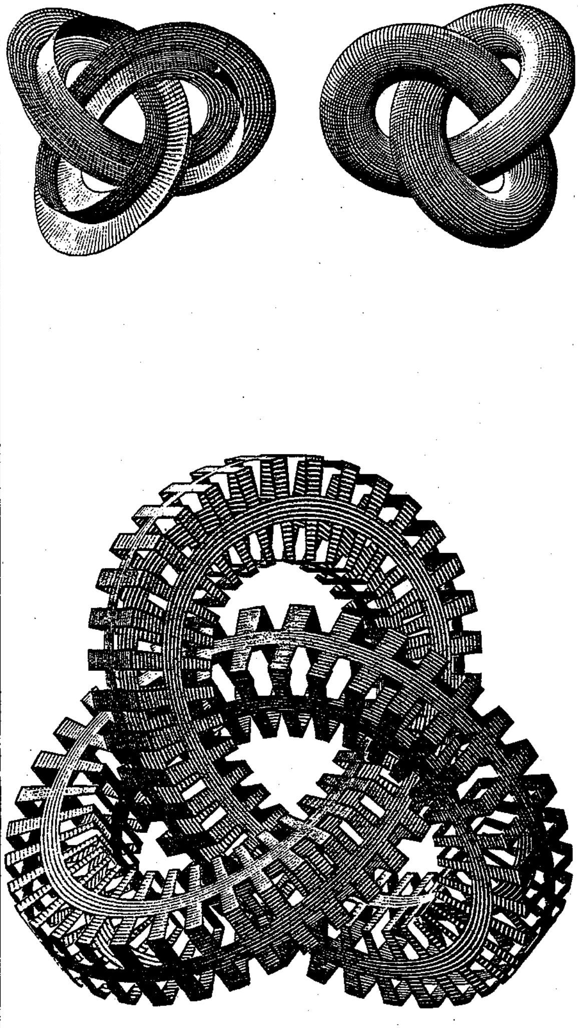
OTTO NEUGEBAUER - The exact sciences in antiquity - Dover Pub.- New York, 1969.

N. YA. VILENKIN - Método de aproximaciones sucesivas - Ed. MIR - Moscú, 1978.

# LECCIONES DE MATEMÁTICAS

# 3

SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



(NUDOS. Autor: M.C. ESCHER)

*Autores*

*Luis Balbuena Castellano*
*Pilar Cabrerizo Huerta*
*Juan Antonio García Cruz*
*Manuel García Mz. de Velazco*
*Juan Ramón Negrín Aguirre*
*José A. Ruperez Padrón*
*Arnulfo L. Santos Hernández*