

PROBLEMAS DE FLUJO DE MÍNIMO COSTE EN REDES NO DIRIGIDAS: CONDICIONES DE OPTIMALIDAD Y ANÁLISIS DE FORMULACIONES ALTERNATIVAS

A. Sedeño Noda, C. González-Martín & S. Alonso

Resumen

En este trabajo se estudian los problemas de flujo de mínimo coste sobre redes no dirigidas. Se plantea una formulación en la que los costos son arbitrarios. Se determinan las correspondientes condiciones de optimalidad que, conjuntamente con resultados que caracterizan las soluciones óptimas, permiten la introducción de un eficaz esquema de resolución que se aplica a un ejemplo. Por último, se realiza una discusión sobre una formulación alternativa del problema estudiado.

Palabras clave: Análisis de Redes, problemas de flujos de mínimo coste sobre redes no dirigidas, condiciones de optimalidad.

Abstract

In this paper, we address the undirected minimum cost flow problem with arbitrary arcs costs. We state the optimality conditions that together with some results characterizing the optimal solutions allow us to introduce an easy method for solving the undirected minimum cost flow problem with any kind of costs. Finally, we discuss on an alternative formulation of this problem.

Keywords: Network Analysis, undirected minimum cost flow problem, optimality conditions.

1. Introducción

Existe una relación extensa de problemas de comunicaciones, transporte, distribución, planificación, etc. cuya resolución se puede afrontar utilizando modelos de flujos en redes. Una recopilación de estos casos aparece en Ahuja et al. [1]. En este contexto, el problema de flujo de costo mínimo sobre una red dirigida (tal vez, el más importante de los problemas de flujos sobre redes) ha sido estudiado exhaustivamente por diversos autores (ver, por ejemplo, Ahuja et al. [1], Glover et al. [3], Murty [5] y Rockafellar [6]). El caso planteado sobre redes no dirigidas ha merecido, sin embargo, menos interés. Algunos autores como Ahuja et al. [1] y Chardaire y Lisser [2] estudian este último problema considerando que los costos son no negativos.

Recientemente, Sedeño et al. [7], incidiendo en la importancia del problema de flujo de coste mínimo sobre redes no dirigidas, completan el estudio para el caso en el que los costos son arbitrarios. Dicha importancia y la necesidad de estructurar adecuadamente las correspondientes condiciones de optimalidad, para poder resolver eficazmente el citado problema utilizando la metodología propia del análisis de flujos en redes, sirven como motivación para el presente trabajo. Una discusión respecto a formulaciones de modelos alternativos (como la realizada por Hu [4]) completa el estudio efectuado.

Después de esta introducción, en el apartado 2 aparecen la notación y terminología básicas que permiten una adecuada formalización del problema. En el apartado 3 se obtienen las correspondientes condiciones de optimalidad y algunos resultados relevantes que caracterizan las correspondientes soluciones. Estos resultados hacen posible la introducción de un eficaz esquema de resolución cuya aplicación aparece ilustrada en un ejemplo. Antes de la relación de referencias, en la sección 4 se realiza una discusión en la que se considera la

inconveniencia de una formulación alternativa del problema estudiado, apuntando la necesidad de añadir en ella condiciones que no aparecen especificadas explícitamente.

2. Notación y formulación matemática

La formulación usual del problema de flujo de mínimo coste en redes no dirigidas se establece a partir de una red dirigida simétrica $G = (V, A)$, siendo V el conjunto de n nodos y A el conjunto de m arcos. La simetría significa que $(i, j) \in A$ y $(j, i) \in A$. Esta red dirigida $G = (V, A)$ se obtiene a partir de la red no dirigida $G = (V, E)$ cuando se consideran las direcciones en ambos sentidos de los arcos en G . Por conveniencia en la notación, nos referiremos al arco no dirigido (conexión entre el nodo i y el nodo j) por $\{i, j\}$. Sea b_i la cantidad entera que representa la oferta/demanda del nodo i . Cada arco $(i, j) \in A$ y, su simétrico $(j, i) \in A$, tienen asociados los siguientes valores: u_{ij} , una cota superior sobre el flujo neto que pueden soportar los arcos (i, j) y (j, i) , simultáneamente, y, c_{ij} , el coste por unidad de flujo sobre el arco (i, j) o (j, i) en la función objetivo.

Finalmente, si y_{ij} denota la cantidad de flujo sobre el arco (i, j) , el *problema de flujo de mínimo coste en una red no dirigida con costes arbitrarios* (FMCND) se establece como sigue:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij} \\ & \text{sujeto a:} \\ & \sum_{\{j|(i,j) \in A\}} y_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in A\}} y_{ji} = b_i, \forall i \in V \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$y_{ij} + y_{ji} \leq u_{ij}, \forall \{i, j\} \in E \quad (1.2)$$

$$y_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in A \quad (1.3)$$

Las restricciones (1.1) son conocidas como *restricciones de conservación del flujo*, y las inecuaciones (1.2) son las *restricciones de capacidad*. Se puede observar que la propiedad de unimodularidad exhibida en los problemas de flujo de mínimo coste (FMC) con un único tipo de flujo no se satisface en este caso debido a la presencia de las restricciones (1.2). Así, aunque se manejen redes con capacidades enteras, el flujo óptimo podría no ser entero. El siguiente ejemplo muestra esta situación usando una red con sólo dos arcos, (i, j) y (j, i) , que comparten una capacidad igual a 4. En la Figura 1 se observa que la solución óptima los flujos son valores enteros múltiplos de $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{ccc} 3 & c_{ij} = -1 & -3 & y_{ij} = 3.5 \\ i & & j & i & j \\ & c_{ji} = -1 & & y_{ji} = 0.5 & j \end{array}$$

Figura 1. Solución óptima no entera para un problema de flujo de mínimo coste en una red no dirigida.

El anterior ejemplo nos indica, de una manera intuitiva que, en la solución óptima, todo arco con coste negativo debe satisfacer $y_{ij} + y_{ji} = u_{ij}$. Este resultado general, demostrado en [7], será alternativamente demostrado en este trabajo a partir de las condiciones de optimalidad del problema FMCND.

3. Condiciones de Optimalidad del problema FMCND

En esta sección, estableceremos las *condiciones de optimalidad* para el problema FMCND. Para ello, necesitamos formular el correspondiente *problema dual*. Dicho dual se obtiene asociando la variable π_i con la restricción (1.1) del nodo i y la variable w_{ij} con la restricción de capacidad (1.2) para cada arco no dirigido $\{i, j\} \in E$. Tiene la siguiente forma:

$$\text{maximizar } \sum_{i \in V} b_i \pi_i - \sum_{\{i, j\} \in E} w_{ij} u_{ij}$$

sujeto a:

$$\pi_i - \pi_j - w_{ij} \leq c_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A \quad (2.1)$$

$$w_{ij} = w_{ji}, \quad \forall \{i, j\} \in E \quad (2.2)$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad \forall \{i, j\} \in E \quad (2.3)$$

$$\pi_i \text{ no restringida en signo, } \forall i \in V \quad (2.4)$$

Definimos el *coste reducido*, para todo arco $(i, j) \in A$, como $\bar{c}_{ij}^\pi = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$. Nótese que $\bar{c}_{ij}^\pi + \bar{c}_{ji}^\pi = 2c_{ij}$ debido a que los arcos (i, j) y (j, i) tienen el mismo coste c_{ij} . Considerando las restricciones (2.1), (2.2), (2.3), las variables w_{ij} deben satisfacer $w_{ij} \geq \max\{0, -\bar{c}_{ij}^\pi, -\bar{c}_{ji}^\pi\}$. Además, el coeficiente asociado con la variable w_{ij} en la función objetivo del problema dual es $-u_{ij}$, y, por lo tanto, en cualquier solución óptima (maximal), w_{ij} toma el valor más pequeño posible. Esta última observación implica que $w_{ij} = \max\{0, -\bar{c}_{ij}^\pi, -\bar{c}_{ji}^\pi\}$, entonces, el problema dual consiste en determinar el vector π que verifica:

$$\text{maximizar } \sum_{i \in V} b_i \pi_i - \sum_{\{i, j\} \in A} \max\{0, -\bar{c}_{ij}^\pi, -\bar{c}_{ji}^\pi\} u_{ij} \quad (3)$$

Según el Teorema de Dualidad en Programación Lineal (ver por ejemplo Murty [5]), si el problema primal y dual son ambos factibles, entonces el valor óptimo de sus respectivas funciones objetivos coinciden. Así, en nuestro caso, las soluciones óptimas de esos problemas deben satisfacer:

$$\sum_{(i, j) \in A} c_{ij} y_{ij} = \sum_{i \in V} b_i \pi_i - \sum_{\{i, j\} \in E} \max\{0, -\bar{c}_{ij}^\pi, -\bar{c}_{ji}^\pi\} u_{ij} \quad (4a)$$

Debemos notar, también, que la siguiente relación se satisface:

$$\begin{aligned} \sum_{(i, j) \in A} c_{ij} y_{ij} - \sum_{i \in V} b_i \pi_i &= \sum_{(i, j) \in A} c_{ij} y_{ij} - \sum_{i \in V} \pi_i \left(\sum_{\{i, j\} \in A} y_{ij} - \sum_{\{j, i\} \in A} y_{ji} \right) = \\ &= \sum_{(i, j) \in A} c_{ij} y_{ij} - \sum_{(i, j) \in A} (\pi_i - \pi_j) y_{ij} = \sum_{(i, j) \in A} \bar{c}_{ij}^\pi y_{ij} \end{aligned} \quad (4b)$$

Así, de (4a) y (4b),

$$-\sum_{(i,j) \in A} \bar{c}_{ij}^* y_{ij} = \sum_{(i,j) \in E} \max\{0, -\bar{c}_{ij}^*, -\bar{c}_{ji}^*\} u_{ij}, \text{ es decir, } -\sum_{(i,j) \in E} (\bar{c}_{ij}^* y_{ij} + \bar{c}_{ji}^* y_{ji}) = \sum_{(i,j) \in E} \max\{0, -\bar{c}_{ij}^*, -\bar{c}_{ji}^*\} u_{ij} \quad (5)$$

Ahora bien, ambos lados de la ecuación (5) tienen m términos y cada término de la derecha es no negativo. Como $y_{ij} + y_{ji} \leq u_{ij}$ y $\max\{0, -\bar{c}_{ij}^*, -\bar{c}_{ji}^*\}$ es mayor o igual a $-\bar{c}_{ij}^*$ y $-\bar{c}_{ji}^*$, podemos concluir que cada término de la derecha es una cota superior del correspondiente término de la izquierda de la ecuación. Por lo tanto, los dos lados de la ecuación (5) son iguales únicamente cuando:

$$-(\bar{c}_{ij}^* y_{ij} + \bar{c}_{ji}^* y_{ji}) = \max\{0, -\bar{c}_{ij}^*, -\bar{c}_{ji}^*\} u_{ij}, \quad \forall \{i, j\} \in E \quad (6)$$

Ahora, consideremos los casos que pueden darse para todo arco dirigido $(i, j) \in A$ en una solución óptima:

(7a) $\bar{c}_{ij}^* > 0$ o $\bar{c}_{ij}^* > \bar{c}_{ji}^*$. En este caso, el lado derecho de (6) es $\max\{0, -\bar{c}_{ij}^* - \bar{c}_{ji}^*\} u_{ij} = \max\{0, -\bar{c}_{ij}^*\} u_{ij}$. Se

observa que si $y_{ij} > 0$, el lado izquierdo de (6) siempre será menor que el lado derecho. Por lo tanto, debe ser $y_{ij} = 0$.

(7b1) $\bar{c}_{ij}^* < 0$ y $\bar{c}_{ij}^* < \bar{c}_{ji}^*$. En este caso, el lado derecho de (6) es $-\bar{c}_{ij}^* u_{ij}$ y, por (7a), tenemos $y_{ji} = 0$. Por lo tanto, $y_{ij} = u_{ij}$.

(7b2) $\bar{c}_{ij}^* < 0$ y $\bar{c}_{ij}^* = \bar{c}_{ji}^*$. En este caso, el lado derecho de (6) es $-\bar{c}_{ij}^* u_{ij} = -\bar{c}_{ji}^* u_{ij}$ y por lo tanto, $y_{ij} + y_{ji} = u_{ij}$.

(7c) $0 < y_{ij} < u_{ij}$. En este caso, $\bar{c}_{ij}^* = 0$ y $\bar{c}_{ji}^* \geq 0$; pues, en otro caso, el lado izquierdo de (6) sería estrictamente menor que el lado derecho de (6).

A partir de (7), se obtienen las siguientes propiedades:

Lema 1. (Arcos con coste negativo) Si $c_{ij} < 0$, para cualquier arco $(i, j) \in A$, entonces $y_{ij} + y_{ji} = u_{ij}$ en toda solución óptima del problema FMCND.

Demostración Sea $(i, j) \in A$ cualquier arco con coste negativo, es decir, $c_{ij} < 0$. Nótese que $\bar{c}_{ij}^* + c_{ji}^* = 2c_{ij} < 0$ y, por lo tanto, $\bar{c}_{ij}^* < 0$ o $\bar{c}_{ji}^* < 0$ (o ambos). En otras palabras, uno de los siguientes tres casos debe ocurrir: (1) $\bar{c}_{ij}^* < 0$ y $\bar{c}_{ij}^* < \bar{c}_{ji}^*$; (2) $\bar{c}_{ij}^* < 0$ y $\bar{c}_{ij}^* = \bar{c}_{ji}^*$; (3) $\bar{c}_{ij}^* < 0$ y $\bar{c}_{ij}^* = \bar{c}_{ji}^*$. De las anteriores condiciones de optimalidad se tiene que, si ocurre (1) entonces $y_{ij} = u_{ij}$ (7b1) y $y_{ji} = 0$ (7a); si ocurre (2), entonces $y_{ji} = u_{ij}$ (7b1) e $y_{ij} = 0$ (7a); si se da (3) entonces $y_{ij} + y_{ji} = u_{ij}$ (7b2). En todos estos casos se satisface que $y_{ij} + y_{ji} = u_{ij}$. \square

Lemma 2. (Arcos con coste igual a cero) En cualquier solución óptima del problema FMCND, $\forall (i, j) \in A$ con $c_{ij} = 0$ se puede establecer $y_{ij} + y_{ji} = u_{ij}$.

$$-\sum_{(i,j) \in A} \bar{c}_{ij}^* y_{ij} = \sum_{\{i,j\} \in E} \max\{0, -\bar{c}_i^*, -\bar{c}_j^*\} u_{ij}, \text{ es decir, } -\sum_{\{i,j\} \in E} (\bar{c}_i^* y_{ij} + \bar{c}_j^* y_{ij}) = \sum_{\{i,j\} \in E} \max\{0, -\bar{c}_i^*, -\bar{c}_j^*\} u_{ij} \quad (5)$$

Ahora bien, ambos lados de la ecuación (5) tienen m términos y cada término de la derecha es no negativo. Como $y_{ij} + y_{ji} \leq u_{ij}$ y $\max\{0, -\bar{c}_i^*, -\bar{c}_j^*\}$ es mayor o igual a $-\bar{c}_i^*$ y $-\bar{c}_j^*$, podemos concluir que cada término de la derecha es una cota superior del correspondiente término de la izquierda de la ecuación. Por lo tanto, los dos lados de la ecuación (5) son iguales únicamente cuando:

$$-(\bar{c}_i^* y_{ij} + \bar{c}_j^* y_{ji}) = \max\{0, -\bar{c}_i^*, -\bar{c}_j^*\} u_{ij}, \quad \forall \{i, j\} \in E \quad (6)$$

Ahora, consideremos los casos que pueden darse para todo arco dirigido $(i, j) \in A$ en una solución óptima:

(7a) $\bar{c}_{ij}^* > 0$ o $\bar{c}_{ij}^* > \bar{c}_i^*$. En este caso, el lado derecho de (6) es $\max\{0, -\bar{c}_i^* - \bar{c}_j^*\} u_{ij} = \max\{0, -\bar{c}_i^*\} u_{ij}$. Se

observa que si $y_{ij} > 0$, el lado izquierdo de (6) siempre será menor que el lado derecho. Por lo tanto, debe ser $y_{ij} = 0$.

(7b1) $\bar{c}_{ij}^* < 0$ y $\bar{c}_{ij}^* < \bar{c}_i^*$. En este caso, el lado derecho de (6) es $-\bar{c}_i^* u_{ij}$ y, por (7a), tenemos $y_{ji} = 0$. Por lo tanto, $y_{ij} = u_{ij}$.

(7b2) $\bar{c}_{ij}^* < 0$ y $\bar{c}_{ij}^* = \bar{c}_i^*$. En este caso, el lado derecho de (6) es $-\bar{c}_i^* u_{ij} = -\bar{c}_j^* u_{ij}$ y por lo tanto, $y_{ij} + y_{ji} = u_{ij}$.

(7c) $0 < y_{ij} < u_{ij}$. En este caso, $\bar{c}_i^* = 0$ y $\bar{c}_j^* \geq 0$; pues, en otro caso, el lado izquierdo de (6) sería estrictamente menor que el lado derecho de (6).

A partir de (7), se obtienen las siguientes propiedades:

Lema 1. (Arcos con coste negativo) Si $c_{ij} < 0$, para cualquier arco $(i, j) \in A$, entonces $y_{ij} + y_{ji} = u_{ij}$ en toda solución óptima del problema FMCND.

Demostración Sea $(i, j) \in A$ cualquier arco con coste negativo, es decir, $c_{ij} < 0$. Nótese que $\bar{c}_i^* + c_{ij}^* = 2c_{ij} < 0$ y, por lo tanto, $\bar{c}_i^* < 0$ o $\bar{c}_j^* < 0$ (o ambos). En otras palabras, uno de los siguientes tres casos debe ocurrir: (1) $\bar{c}_i^* < 0$ y $\bar{c}_j^* < \bar{c}_i^*$; (2) $\bar{c}_i^* < 0$ y $\bar{c}_j^* < \bar{c}_i^*$; (3) $\bar{c}_i^* < 0$ y $\bar{c}_j^* = \bar{c}_i^*$. De las anteriores condiciones de optimalidad se tiene que, si ocurre (1) entonces $y_{ij} = u_{ij}$ (7b1) y $y_{ji} = 0$ (7a); si ocurre (2), entonces $y_{ji} = u_{ij}$ (7b1) e $y_{ij} = 0$ (7a); si se da (3) entonces $y_{ij} + y_{ji} = u_{ij}$ (7b2). En todos estos casos se satisface que $y_{ij} + y_{ji} = u_{ij}$. \square

Lemma 2. (Arcos con coste igual a cero) En cualquier solución óptima del problema FMCND, $\forall (i, j) \in A$ con $c_{ij} = 0$ se puede establecer $y_{ij} + y_{ji} = u_{ij}$.

Algoritmo para el problema FMCND

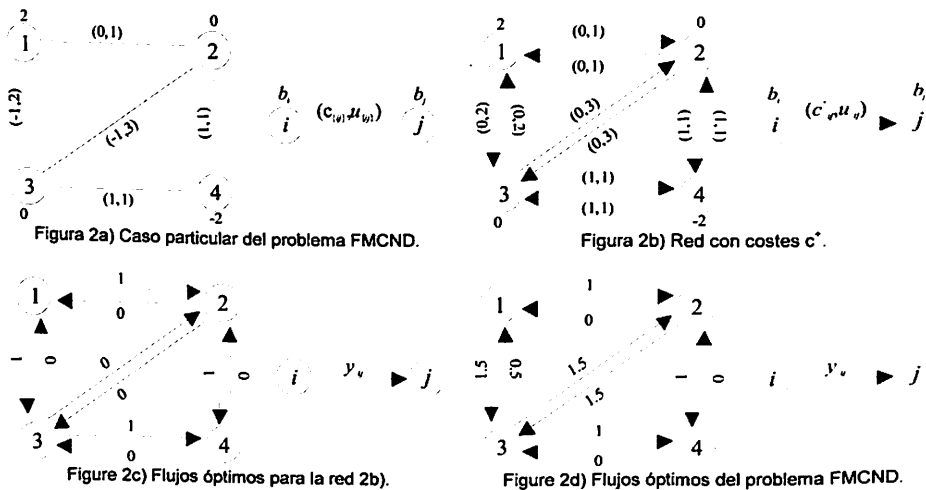
Reemplazar c_{ij} por $c_{ij}^+ \forall (i, j) \in A$, y considerar u_{ij} como la cota superior del flujo sobre los arcos (i, j) y (j, i) :

Sea y^* una solución óptima del problema anterior obtenida usando cualquier algoritmo para el problema de flujos de mínimo coste;

Si $\delta_{ij} = u_{ij} - (y_{ij}^* + y_{ji}^*) \forall \{i, j\} \in E^-$, hacer $y_{ij}^* = y_{ij}^* + \frac{1}{2}\delta_{ij}$ y $y_{ji}^* = y_{ji}^* + \frac{1}{2}\delta_{ij}$;

3.1 Un ejemplo.

El siguiente ejemplo muestra el proceso de resolución del problema FMCND. La Figura 2a) es un caso particular del problema FMCND. Debemos notar que existen arcos con coste negativo. La red $G = (V, A)$ con los costes c^+ es mostrada en la Figura 2b). En esta red todos los costes de los arcos son no negativos. En la Figura 2c) se muestra una solución óptima para el problema de flujo de mínimo coste de la Figura 2b) (se observa que existen soluciones óptimas alternativas). Finalmente, la Figura 2d) muestra los flujos óptimos para el problema FMCND. Notamos que, por ejemplo, el flujo del nodo 2 al nodo 3 coincide con el flujo de 3 a 2 siendo su valor 1.5. Una situación similar ocurre entre los nodos 1 y 3.



4. Discusión sobre una formulación alternativa del problema FMCND

En la literatura referente a los problemas de flujos en redes no dirigidas de uno (p. e. [1]) o varios tipos de flujos (p. e. [4]), el problema de flujo de mínimo coste para redes no dirigidas se formaliza a partir de una red dirigida antisimétrica $G' = (V, A')$ donde $A' \subset A$ sólo contiene uno de los arcos (i, j) (j, i) ; es decir, si $(i, j) \in A' \Rightarrow (j, i) \notin A'$. Esta formulación usa la variable de decisión x_{ij} que denota la cantidad de flujo que circula sobre el arco (i, j) y que no está restringida en signo; es decir, si el valor de x_{ij} es negativo para el arco $(i, j) \in A'$, se interpreta que el flujo viaja en el sentido opuesto a la dirección del arco. Teniendo esto en cuenta, el problema FMCND se establece de la manera siguiente:

$$\text{minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} |x_{ij}|$$

sujeto a:

$$\sum_{\{j|(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in A\}} x_{ji} = b_i, \forall i \in V \quad (8.1)$$

$$|x_{ij}| \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A' \quad (8.2)$$

Comprobaremos que esta formulación no es equivalente a la formulación inicial planteada en este trabajo. Para ello consideremos el cambio de variables:

$$|x_{ij}| = y_{ij} + y_{ji}, \quad x_{ij} = y_{ij} - y_{ji}$$

que implica que $y_{ij} = \frac{1}{2}(|x_{ij}| + x_{ij})$, $y_{ji} = \frac{1}{2}(|x_{ij}| - x_{ij})$.

Además, este cambio de variables obliga a que $y_{ij}y_{ji} = 0$, es decir, en toda solución factible, el flujo y_{ij} o el flujo y_{ji} debe ser cero. Realizando este cambio de variables, con la notación que venimos utilizando, tendríamos el siguiente problema de flujo de mínimo coste:

$$\text{minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{\{j|(i,j) \in A\}} y_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in A\}} y_{ji} = b_i, \forall i \in V \quad (9.1)$$

$$y_{ij} + y_{ji} \leq u_{ij}, \forall \{i,j\} \in E \quad (9.2)$$

$$y_{ij}y_{ji} = 0, \forall \{i,j\} \in E \quad (9.3)$$

Como las variables y_{ij} y y_{ji} no pueden ser distintas de cero simultáneamente (*flujos no solapados*), cuando el coste de éstas sea negativo, no se cumple la propiedad indicada en el Lema 1 en la que, entre dos vértices i y j pueden circular flujos en ambos sentidos. En otras palabras, la formulación alternativa propuesta en esta sección es válida únicamente cuando se impone la restricción adicional de que los flujos son no solapados.

Referencias

- [1] R. Ahuja, T. Magnanti and T. J. B. Orlin, Network Flows, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [2] P. Chardaire, and A. Lisser, Simplex and interior point specialized algorithms for solving non-oriented multicommodity flow problems, Operations Research 50 (2) (2002), 260-276.
- [3] F. Glover, D. Klingman and N. V. Philips, Network models in Optimization and their applications in practice, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.
- [4] T. C. Hu, Multi-Commodity Network Flows, Operations Research 11 (1963) 344-360.
- [5] K. Murty, Network programming, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [6] R. Rockafellar, Network flows and monotropic optimization, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.
- [7] A. Sedeño-Noda, C. González-Martín and S. Alonso, Solving the undirected minimum flor cost problem with arbitrary costs, Networks 45 (1) (2005), 1-3.