

La “i lógica” de Carroll. Silogismos

Jorge Fernández Herce
Mercedes González Menorca

“Ninguna pesadilla es agradable;
Las experiencias desagradables no se buscan
¿.....?”

Permítasenos el juego de palabras del título ante un maestro de estas cuestiones. Vamos a hablar de Silogismos y, en realidad un silogismo es una “Y” lógica entre dos proposiciones. Por otra parte, la obra de Carroll está salpicada de ilógica lógica y de juegos de palabras constantes.

A pesar de que no pensamos hablar aquí de “*Alicia*”, parece inevitable escribir algo sobre Carroll sin nombrar a su personaje por excelencia. Estas líneas van a llevarnos a su vertiente lógica y, concretamente, a los silogismos de su “*Symbolic Logic. Part. I. Elementary*”¹. Pero hemos elegido como presentación ése, y no otro cualquiera de ellos, porque pensamos que, en efecto, su obra y más concretamente sus *Alicias*, son verdaderamente una pesadilla casi Kafkiana. Parece un sacrilegio decir algo en contra de “*Alicia en el país de las maravillas*” o “*Alicia a través del espejo*”, pero, es fácil coincidir con lo que Jaime de Ojeda relata en el prólogo de sus traducciones al castellano de estas obras. Alicia pierde en la traducción mucho de su contenido de “vivencias sabrosas, de evocaciones misteriosas y de introspección cultural”. No sucede así en los relatos de lógica a los que vamos a hacer referencia los cuales han sido refundidos en un volumen de carácter divulgativo y no científico.

Iremos extractando aquí algunos aspectos relevantes de los Libros I a V de la Lógica Simbólica, para llegar a los silogismos, clasificándolos totalmente y reduciéndolos a un algoritmo diferente a lo que Carroll describe. Los dejaremos en un juego, tal vez, demasiado elemental². No vamos a buscar tampoco nosotros una pureza lógica ni tan siquiera seguir paso a paso el mismo discurso de Carroll. Iremos entresacando para llegar pronto a una simplificación de los casos que él presenta como posibles y a una tremenda reducción de la casuística para clasificarlos.

¹ La segunda parte no apareció jamás

² Obviamente, a Carroll le leen y admiran por lo que escribió y cómo lo escribió.

Pero antes de centrarnos en ello vamos a citar nuevamente los prólogos de Jaime de Ojeda en los que se pregunta “¿por qué es Alicia en el País de las Maravillas un libro tan leído y tan citado en el mundo anglosajón³?”. Él mismo no sabe contestar a la pregunta, quizá nosotros tampoco, pero aquí estamos dedicándole un ejemplar de esta revista *Números* a un hombre que ha pasado a la historia, fundamentalmente, por ese personaje y su ilógica y no por sus aportaciones a la lógica simbólica.

Del Libro I “Las Cosas y sus Atributos”

“El Universo contiene Cosas y las Cosas tienen Atributos”. Las cosas podríamos identificarlas con sustantivos (Pesadillas, experiencias, perros,...) y los atributos con adjetivos (pesadas, duras, azules,...). Como parece claro, una cosa puede tener varios atributos y un atributo pertenecer a más de una cosa.

A partir de esta situación tan intuitiva, nace como casi siempre, la intención de clasificar. De la manera más abierta posible, se define **Clase** como un grupo o conjunto de Cosas que se selecciona del Universo. El requisito indispensable para que la Clase esté bien definida es que seamos capaces de determinar con absoluta precisión qué Cosas pertenecen a ella y cuales no. Ésto conlleva que la definición de una Clase establece una diferenciación (Las Cosas de esa clase y las demás que no están en ella).

A partir de aquí vamos a empezar a retomar una notación paralela de modo que, lo que nace de forma natural, el NO, lo manejemos de modo ligeramente distinto. Es evidente que si tenemos una Clase, aparece una dicotomía entre los elementos que están en ella porque poseen una determinada diferencia y los que NO están en ella, que carecen de esa diferencia. Vamos a ver la situación con una notación en positivo para hacer perder el valor psicológico del NO:

Si a una clase la denotamos A, llamamos Z a la Clase que resulta de tomar aquellas cosas que no están en la primera. Del mismo modo, si a una clase la llamamos Z, A será la clase de los elementos que no están en Z. Similarmente utilizaremos las parejas de letras (B , Y) , (C , X)⁴.

Planteamos así la notación porque, aunque es evidente que una clase es la

³ Valga como ejemplo un libro tan distante de Alicia como “Redes para todos” de Mark Gibbs, en el que hay varias citas del tipo:

“[...] un sistema que podía transferir datos alrededor de 15000 caracteres por segundo.

Eso es como transferir el contenido de Alicia en el país de las maravillas y A través del espejo (un total de más de 304000 caracteres) en 20,7 segundos”

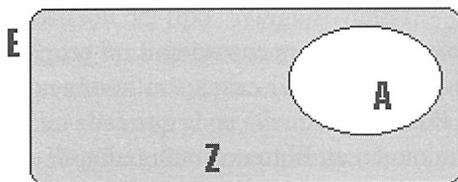
⁴ Esta decisión va a ser usada en todo su sentido cuando estemos dando el método de solución de silogismos

negación de la otra, el lenguaje hace que una sea vista en positivo y la otra en negativo y resulta aparentemente distinto el tomar la supuestamente negativa como positiva y la positiva con negativa.

	Positivo	Negativo
Caso 1	Las cosas verdes	Las cosas que no son verdes
Caso 2	Las cosas que no son verdes	Las cosas verdes

Si en vez de manejar el Universo de las Cosas nos restringimos a una Clase determinada, de la que hacemos nuestro Universo particular, las argumentaciones anteriores siguen valiendo. P. ej., restringiéndonos a la Clase Libros:

	Positivo	Negativo
Caso 1	Los libros verdes	Los libros que no son verdes
Caso 2	Los libros que no son verdes	Los libros verdes



Representándolo en unos diagramas, tendríamos (ver figura) un Universo E, una clase (conjunto) A y su "complementaria" Z:

Resulta importante tener presente la siguiente definición para cuando abordemos por fin los silogismos, pues la volveremos a utilizar:

Cuando una Clase la dividimos en otras varias⁵, cualquier clase así obtenida es *codivisional* con cualquier otra obtenida mediante la misma división.

Ej.: Si la clase de "los hombres" la dividimos en "hombres amarillos" que llamaremos A y "hombres no amarillos" que llamaremos Z. Se tiene que:

A es codivisional consigo misma
A es codivisional con Z = Z es codivisional con A
Z es codivisional consigo misma

Del Libro II "Las Proposiciones"

Se dice *Proposición en forma normal* a toda afirmación sobre dos clases, que llamaremos Sujeto y Predicado (globalmente Términos), de una de las siguientes formas:

⁵ Para lo que nosotros vamos a manejar nos bastaría con una división en dos

*Algunos*⁶ miembros de la clase Sujeto son miembros de la Clase Predicado.

Ningún miembro de la clase Sujeto es miembro de la clase predicado.

Todos los miembros de la clase Sujeto son miembros de la clase Predicado.

Por ejemplo:

“*Algunos* hombres son blancos”

“*Ningún* hombre es azul”

“*Todos* los hombres son amarillos”

Rondando estas definiciones hay un intento de Carroll para enseñar al lector cómo establecer una Proposición en forma Normal, así como unas definiciones de lo que llama Proposiciones de Relación y Existencia. Aquí, como ya se venía detectando hasta ahora, el lenguaje natural parecer hacer distinto lo que no lo es tanto:

Proposición de Existencia⁷: Aquella cuyo sujeto es la clase tomada como Universo

Ej: “Los hombres existen” es en realidad un proposición del tipo “*Algunos*” que se traduce en “*Algunas* cosas son hombres”.

Proposición de Relación: Aquella en la que cada uno de sus términos (sujeto y predicado) connota un atributo no connotado por el otro⁸.

Vamos a explayarnos un poco en los últimos conceptos para desenmarañar algunos laberintos de lenguaje y algunas cuestiones no muy claras partiendo de la siguiente notación:

	E: Universo
A: Clase de los hombres	Z: Clase de las Cosas que no son hombres
B: Clase de las cosas amarillas	Y: Clase de las cosas no amarillas

- a) Haciendo mención expresa a la arbitrariedad de las reglas prefijadas, considera que se entenderá que toda proposición del tipo *Algunos*, presupondrá la existencia de elementos de la clase sujeto y de la clase predicado⁹. Si “*Algunos* hombres son amarillos”, presupondrá por con-

⁶ Matiza aquí Carroll que *Algunos* significa uno ó más. Sobre *Ningún* y *Todos* es claro su significado

⁷ La mencionamos como curiosidad pues en nuestra argumentación no emplearemos este concepto.

⁸ Se eliminan aquí proposiciones que remite a su Parte II (que nunca apareció) cuyo ejemplo él mismo menciona: “*Algunos* perros son perdigueros”. La clase perdigueros conlleva implícito el ser perro luego esta clase estaría incluida en la clase de los perros.

⁹ Este supuesto es fundamental en todo el desarrollo posterior

venio que la clase de los hombres tiene Cosas y que la clase de Cosas amarillas también tiene cosas.

- b) La definición de proposición de relación conlleva más de un interrogante porque parece llevarnos a algunas lagunas. Como luego se mencionará, al hablar del diagrama bilateral, parece que quiere evitar la situación en la que las dos clases que se manejan, verifiquen alguna de las relaciones $A\bar{I}B$ ó $B\bar{I}A$, es decir, que una de las clases esté contenida en otra. Sin embargo, es obvio que partir de cualquier proposición de la forma "Todos" conlleva necesariamente una relación de ese tipo:

"Todos los hombres son amarillos" implica necesariamente que $A\bar{I}B$.

- c) A las Proposiciones de relación del tipo "Todos", les dedica especial atención para concluir que son equivalentes, es decir, que proporcionan exactamente la misma información que una Proposición del tipo "Algunos" y una Proposición del tipo "Ningún" juntas:

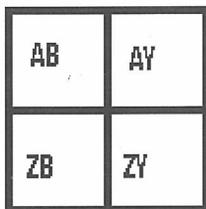
Está claro que "Todos los hombres son amarillos" conlleva el que "Algunos hombres son amarillos" y, por el convenio fijado, ésto supone que hay Cosas hombres y Cosas amarillas. Del mismo modo, "Todos los hombres son amarillos" conlleva que "Ningún hombre es Cosa no amarilla".

Por contra, si partimos de que "Algunos hombres son amarillos" y de que "Ningún hombre es Cosa no amarilla", se sigue que "Todos los hombres son amarillos".

Observemos que el convenio adoptado en B nos es fundamental para la determinación de la equivalencia.

Del Libro III "El diagrama bilateral"

Lo que Carroll llama Diagrama bilateral no es en realidad mas que un diagrama clásico de conjuntos sólo que representado de forma más simétrica:



E: Universo (Todo el cuadro)

A: Banda Superior

B: Banda Izquierda

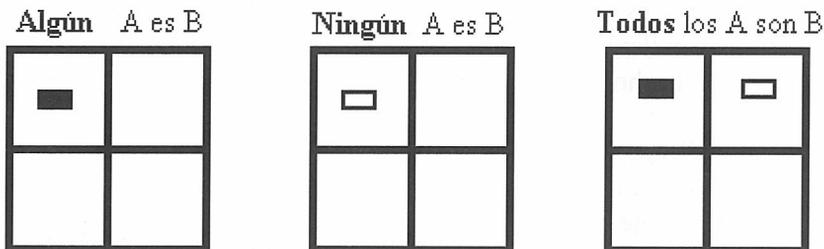
Z: Banda Inferior

Y: Banda Derecha

Observamos que seguimos con la notación anunciada y no manejamos el símbolo de "complementario", para restarle el componente psicológico de lo

afirmativo y su negación. Pero precisamente en esto radican las bondades del diagrama bilateral con respecto al clásico. En el clásico A y Z no son dos clases con “simetría a simple vista” mientras que sí lo son en el bilateral.

A continuación introduce unas fichas de 2 colores con los que representa las proposiciones. Con las fichas oscuras pretender representar la existencia de Cosas y con las fichas claras la no existencia (\emptyset). Este aspecto seguiría igual si utilizásemos un diagrama clásico:

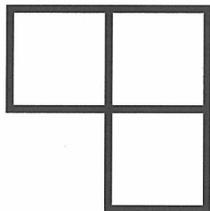


¿Qué pretende significar con la definición de Proposición de relación? Pues, precisamente, que el diagrama bilateral de partida “es completo” y “vacío de fichas”. Veámoslo con ejemplos y sus representaciones:

A: Perro
B: Perdigueros

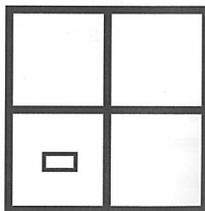
E: Universo.
Z: Las Cosas que no son perros
Y: Las Cosas que no son perdigueros.

No hay zona AB



Ó

Diagrama inicial



En este caso, la “semántica del lenguaje” nos garantiza que, al decir “perdiguero”, estamos implícitamente diciendo perro, es decir, partimos como hipótesis de que $B \subset A$. La representación por tanto de las clases (conjuntos) implicadas sería la representada en la figura adjunta, y se quedaría cojo su diagrama bilateral, o se producirían casos de distribución de fichas claras y oscuras que no se abordan.

E: Universo

Clase A Z: clase de las Cosas que no están en A.
 Clase B Y: clase de las Cosas que no están en B

A priori no podemos suponer como hipótesis ninguna de estas afirmaciones:
 $A \cap B = \emptyset, A \cap Y = \emptyset, Z \cap B = \emptyset, Z \cap Y = \emptyset$ ¹⁰

Las equivalencias siguientes son obvias de por sí, pero las mencionamos expresamente porque las manejaremos posteriormente:

- "Algunos A son B" tiene la misma representación en el diagrama que (es igual a) "Algunos B son A"
- "Ningún A es B" tiene la misma representación en el diagrama que (es igual a) "Ningún B es A"

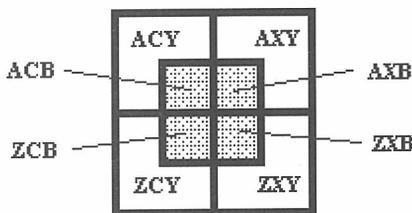
Del Libro IV "El diagrama trilateral"

El diagrama trilateral es para Carroll una representación similar a la hecha hasta ahora pero en la que entren en juego 3 parejas de clases (conjuntos) y dos proposiciones.

E: Universo

Clase A Z: clase de las Cosas que no están en A.
 Clase B Y: clase de las Cosas que no están en B
 Clase C X: clase de las Cosas que no están en C

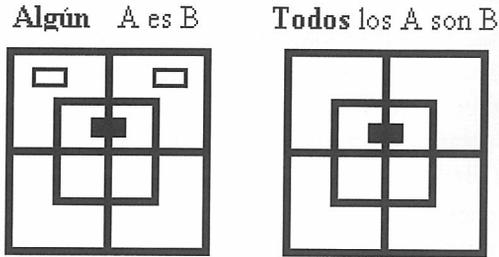
Manejando a partir de ahora, la notación indicada arriba, el diagrama trilateral de las 6 clases en juego sería:



Una vez más, todo el cuadro sería nuestro Universo (E). La banda superior sería la Clase A y la Inferior la Clase Z; La banda izquierda sería la Clase C y la Derecha la Clase X; La zona interior sería la Clase B y la Exterior la Y.

Si pensamos en conjuntos, serían zonas de intersección

¹⁰ Concedamos la inclusión de esta premisa para evitar que las proposiciones que son formuladas en lenguaje natural nos lleven a confusiones semánticas como la de los perros perdigueros.



Vamos a detallar la posibilidad de colocar fichas oscuras en medio de una línea (“a caballo” entre dos espacios), por su importancia y su uso posterior:

Del Libro V “Los silogismos”

“Ninguna pesadilla es agradable;
Las experiencias desagradables no se buscan ”
Nadie se acuesta buscando padecer una pesadilla

Obviemos la semántica del lenguaje y concentrémonos en los elementos que tenemos:

- a) **Tres proposiciones que por hipótesis son de relación, cuyos elementos son clases (conjuntos) de un mismo Universo:**

A: Pesadillas	Z: Cosas que no son pesadillas
B: Experiencias desagradables	Y: Experiencias agradables.
C: Cosas que se buscan	X: Cosas que no se buscan.

A las dos primeras se les llama *premisas* y a la tercera *consecuencia*.

- b) **Cada par de proposiciones contienen siempre un par de clases codivisionales.**
- c) **Si las dos primeras (premisas) fuesen verdaderas, la tercera (consecuente) lo sería también.**

El paso a paso de la reducción y resolución de un silogismo:

Hasta aquí nuestra cita de la obra de Lewis Carroll. En realidad, podríamos haber prescindido de los diagramas bilaterales y trilaterales, incluso haber elegido otra representación gráfica “más simétrica”. En el caso del diagrama trilateral, la simetría se mantiene perfectamente en cuanto a las clases (A,Z) y (C,X) ya que son representadas por “zonas iguales pero en distinto sitio”, sin embargo, en lo referente a las clases codivisionales (B,Y) no es tan buena porque separa la zona interior de la exterior que no son “iguales en el dibujo”. Sin embargo, resolver los silogismos de esta manera nos ha parecido divertido

y por ello hemos elegido esta representación incluso en la clasificación que haremos más adelante, porque es muy vistosa.

Comencemos ahora un razonamiento diferente, manteniendo la última notación utilizada y supongamos que partimos de 2 premisas de las que tenemos que extraer una consecuencia. Sigamos los pasos:

1. Observar cuáles son las clases implicadas en las proposiciones. Determinar claramente cuáles son las clases codivisionales que aparecen en las premisas.

2. Asignarles letras a las clases según los siguientes criterios:

- La pareja de clases codivisionales que ha de aparecer la denotaremos utilizando la letra B si ambas clases son la misma. Si ambas clases son las complementarias, llamaremos B a la de la primera premisa e Y a la de la segunda. A cada una de estas clases la llamaremos a partir de ahora "Eliminando" (*Esto se traduce en nuestro diagrama trilateral en que la zona interior será siempre B y la exterior Y*)
- El orden de las premisas (primera o segunda) es intrascendente (*no tiene ningún reflejo en el diagrama trilateral*), luego tomaremos el siguiente:
 - * Si las dos proposiciones son del tipo *Todos*: elijamos una cualquiera y coloquémosla como primera premisa si el predicado es un "Eliminando" y como segunda premisa si lo es el sujeto.
 - * Si sólo una de las proposiciones es del tipo *Todos*: coloquémosla como primera premisa si el predicado es un "Eliminando" y como segunda premisa si lo es el sujeto.
 - * Si las dos proposiciones son del tipo *Algunos*¹¹: ordenémoslas de modo que el predicado de la primera sea un "Eliminando" y el sujeto de la segunda sea el otro.
 - * Si una es del tipo *Algunos* y otra *Ningún*: coloquemos la primera la proposición *Algunos*, la segunda *Ningún*, y ordenémoslas de modo que el predicado de la primera sea un "Eliminando" y el sujeto de la segunda sea el otro.
 - * Si las dos proposiciones son del tipo *Ningún*¹²: ordenémoslas de modo que el predicado de la primera sea un "Eliminando" y el sujeto de la segunda sea el otro.
- Llamemos siempre A al sujeto de la primera premisa y C al predicado de la segunda.

¹¹ Sabemos que en éstas se puede permutar el sujeto y el predicado porque son equivalentes

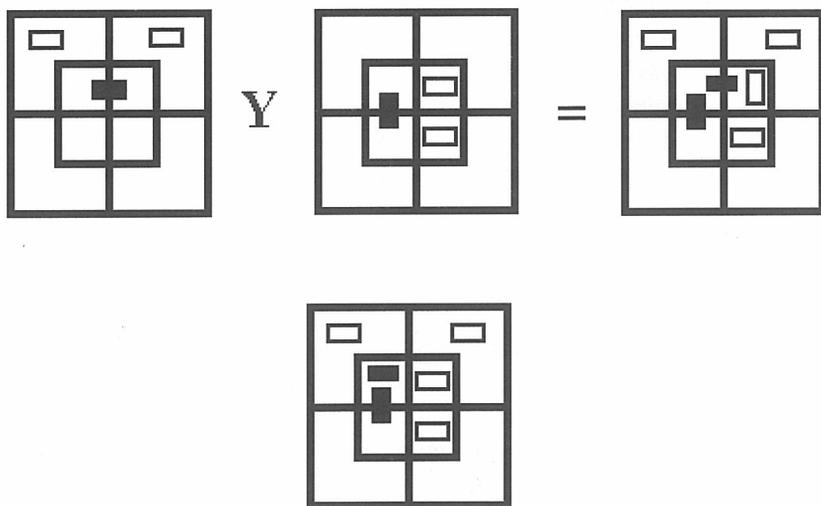
3. Representar el diagrama trilateral de cada premisa

4. Unir los diagramas trilaterales en uno sólo:

Para fundir los diagramas hemos de tener en cuenta que en aquellos espacios en los que se mezclan una ficha blanca y otra negra, el resultado es una ficha blanca. Basta observar que la ficha negra siempre significa “es probable que haya Cosas” y la ficha blanca siempre significa “no hay Cosas”, y darnos cuenta de que en el silogismo estamos haciendo una operación “Y” entre las dos premisas, deben ser ciertas la premisa 1 y la premisa 2.

Si queremos hacer este traslado de un modo sencillo, traslademos primero todas las fichas al diagrama resultante.

P. Ej.:



Es importante que observemos el ejemplo mostrado del que vamos a hacer explícito el punto intermedio. Al unir ambas premisas en un solo gráfico obtendríamos realmente el siguiente:

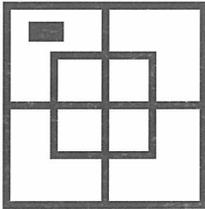
La ficha negra a caballo entre AXB y ACB nos dice que “hay algo en la zona AB pero no sabemos si en AXB, en ACB o en ambas. Por otro lado, la ficha blanca en AXB nos dice que ahí no hay nada. De ambas se deduce que, donde realmente hay algo de la zona AB es en ACB.

¹² Sabemos que en estas se puede permutar el sujeto y el predicado porque son equivalentes

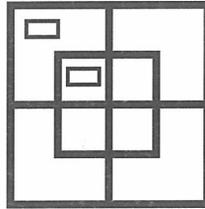
5. Interpretar el diagrama resultante en términos de la Clase A y la Clase C ó la Clase X.

Ahora se trata de interpretar el diagrama resultante como una proposición de términos A y C, ó A y X, siempre que ello sea posible, y con un poco de entrenamiento:

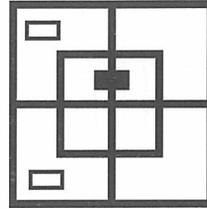
Algún A es C



Ningún A es C



Sin conclusión



Nuestro Ejemplo

Practicuemos con nuestro silogismo de partida siguiendo el método expuesto:

Paso 1:

Clases en juego en nuestras premisas:

Las Pesadillas	Lo que no son pesadillas
Experiencias agradables	Experiencias desagradables
Cosas que se buscan	Cosas que no se buscan

Las clases sombreadas son de las que se extraen las codivisionales

Paso 2:

"Ninguna" pesadilla es agradable;
"Todas" las experiencia desagradables se buscan

Clase A: Las pesadillas

Clase Z: Las no pesadillas

Clase B: Cosas agradables

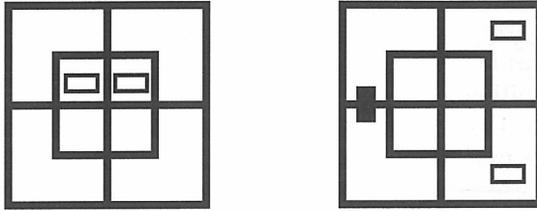
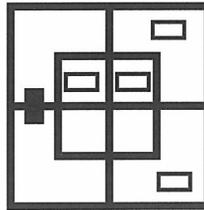
Clase Y: Cosas desagradables

Clase C: Cosas que no se buscan

Clase X: Cosas que se buscan

Con ello nuestras premisas quedan:

Ningún A es B
Todos los Y son C

Paso 3:**Paso 4:****Paso 5:**

Interpretando ahora observamos que el cuadrado superior derecho está marcado como vacío en sus dos fragmentos, así que:

“Ningún A es X”

Por tanto:

Ninguna pesadilla es buscada

La clasificación: Los 18 tipos posibles de silogismos:

Podíamos haber presentado la reducción de casos expresándonos sólo en términos del diagrama trilateral y argumentando mediante simetrías y giros. Como estas situaciones requieren un poco más de visión espacial, hemos preferido dejarlo en una argumentación lógica y mencionar solamente un caso sencillo, a modo de ejemplo, de cómo se haría geoméricamente:

- Si partimos de dos premisas, es obvio, ya lo hemos comentado, que el orden de las mismas no supone representaciones distintas:

“Ninguna” pesadilla es agradable;

“Todas” las experiencia desagradables se buscan

La diferencia entre “etiquetar a las clases involucradas del MODO 1 ó del MODO 2, se traduce en dos gráficos resultado simétricos respecto del eje horizontal pero siendo el mismo silogismo:

MODO 1:

Clase A: Las pesadillas

Clase B: Cosas agradables

Clase C: Cosas que no se buscan

Clase Z: Las no pesadillas

Clase Y: Cosas desagradables

Clase X: Cosas que se buscan

Las representación en este caso sería:

Premisa 1		Premisa		2Diagrama
Texto	Diagrama	Texto	Diagrama	Resultado
Ningún A es B		Todos los Y son C		

MODO 2:

Clase Z: Las pesadillas

Clase B: Cosas agradables

Clase C: Cosas que no se buscan

Clase A: Las no pesadillas

Clase Y: Cosas desagradables

Clase X: Cosas que se buscan

Ahora los diagramas se convertirían en:

Premisa 1		Premisa 2		Diagrama
Texto	Diagrama	Texto	Diagrama	Resultado
Ningún Z es B		Todos los Y son C		

Como decíamos, no hemos elegido este camino sino el más sencillo de ir presentando los casos que el proceso del apartado anterior nos va mostrando. Observaremos que el número de casos posibles es muy reducido, concretamente nos aparecen 18 "tipos" distintos que los presentamos en la siguiente tabla a la que se puede recurrir siempre que los hayamos clasificado según los Pasos 1 y 2 :

Premisa 1		Premisa 2		Consecuencia	
Texto	Diagrama	Texto	Diagrama	Diagrama	Texto
Todos los A son B		Todos los B son C			Todos los A son C
Todos los A son B		Todos los Y son C			Sin conclusión
Todos los A son B		Todos los C son B			Sin conclusión
Todos los A son B		Todos los C son Y			Ningún A es C
Todos los A son B		Ningún B es C			Ningún A es C
Todos los A son B		Ningún Y es C			Sin conclusión
Todos los A son B		Algunos B son C			Sin conclusión
Todos los A son B		Algunos Y son C			Sin conclusión
Algunos A son B		Todos los B son C			Algunos A son C

Premisa 1		Premisa 2		Consecuencia	
Texto	Diagrama	Texto	Diagrama	Diagrama	Texto
Algunos A son B		Todos los Y son C			Sin conclusión
Ningún A es B		Todos los B son C			Sin conclusión
Ningún A es B		Todos los Y son C			Ningún A es X
Algunos A son B		Algunos B son C			Sin conclusión
Algunos A son B		Algunos Y son C			Sin conclusión
Algunos A son B		Ningún B es C			Algunos A son X
Algunos A son B		Ningún Y es C			Sin conclusión
Ningún A es B		Ningún B es C			Sin conclusión
Ningún A es B		Ningún Y es C			Ningún A es C

Bibliografía:

Carroll, L. (1994) *El juego de la Lógica*. Alianza Editorial. Madrid

Carroll, L. (1996) *Alicia a través del espejo*. Alianza Editorial. Madrid.

Carroll, L. (1994) *Alicia en el país de las maravillas*. Alianza Editorial. Madrid.

www.expreso.co.cr/alicia/carroll.htm

Jorge Fernández Herce, nacido en Calahorra (La Rioja, 1962). Licenciado en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Zaragoza. Desde 1997 es profesor de Enseñanza Secundaria y en la actualidad tiene destino en el I.E.S. La Laboral de La Laguna. Es autor de otros artículos relacionados con las matemáticas en la Secundaria publicados en las revistas *Suma y Números*.

Mercedes González Menorca, nacida en Logroño (La Rioja, 1962). Licenciada en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Zaragoza. Desde 1996 es profesora de Enseñanza Secundaria y en la actualidad tiene destino en el I.B. Anaga de S/C de Tenerife. Es autora de otros artículos relacionados con las matemáticas en la Secundaria publicados en las revistas *Suma y Números*.