NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 83, julio de 2013, páginas 43-63

Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística

Antonio Estepa Castro (Universidad de Jaén. España)
Jesús del Pino Ruiz (Universidad de Jaén. España)

Artículo solicitado a los autores por la revista

Resumen Uno de los puntos débiles del actual currículo de secundaria en Matemáticas es la enseñanza de la dispersión. Son varios los motivos que ocasionan esta debilidad. En este trabajo se analizarán brevemente algunas investigaciones que nos ayudarán en el aula y en la investigación a mejorar la comprensión de un concepto complejo como es la dispersión. Se indica la importancia de la dispersión en Estadística. Se comprueba que el concepto de dispersión no se incluye en los curricula oficiales, se analiza el significado de la noción de dispersión y se ejemplifica el desarrollo histórico mediante el devenir a lo largo de la historia de las leyes del error. Finalizamos con unas conclusiones válidas para la enseñanza y la investigación.

Palabras clave Dispersión, variación, variabilidad, curriculum, leyes del error.

Abstract One of the weaknesses of the current Mathematics secondary curriculum is teaching dispersion. There are several reasons that cause this weakness. In this paper we briefly discuss some research that they will help to us in the classroom and in research to improve understanding the dispersion complex concept. We indicate the importance of the dispersion in Statistics. We have found that the concept of dispersion is not included in the official curricula, we analyze the meaning of the notion of dispersion and a historical development is exemplified by the evolution along the history of the law of error. We end with our conclusions for teaching and research.

Keywords Dispersion, variation, variability, curriculum, laws of the errors.

1. Introducción

Un tema crucial en el estudio de la Estadística es la comprensión de la noción de dispersión. Ya que en muchos sentidos, la Estadística es la ciencia de la variación, puesto que la estudia, modela, calcula, representa, interpreta y analiza (MacGillivray, 2004). Además aparece por todas partes, varían los datos, las muestras y las distribuciones. Frecuentemente, una parte importante del análisis estadístico es analizar la relativa contribución y localización de las fuentes de variación (Shaughnessy, 2007).

La dispersión es un concepto estrechamente ligado a los conceptos de variable e incertidumbre. Frecuentemente se considera como una medida de la desviación de los datos respecto a una medida de tendencia central. Aunque la medida de la dispersión sea un elemento importante en el análisis de datos, la dispersión en Estadística comprende más que una sola medida. En el estudio de la dispersión se debe considerar no solamente su significado (concepto) o cómo se utiliza como herramienta, sino que también hay que considerarla en el contexto de los datos (Makar y Confrey, 2005), ya que, los datos no son sólo números, son números con un contexto (Cobb y Moore, 1997, p. 801).

A lo largo de este trabajo veremos que la noción de dispersión no se estudia en los curricula oficiales (sección 2). Los libros de texto no suelen incluir un tema o una sección donde se estudie la noción de dispersión, definición y terminología, en las secciones 3 y 4 discutiremos lo que hemos encontrado al respecto en la bibliografía consultada. La dispersión tiene un origen diverso, comprender sus fuentes ayuda al dominio de los métodos estadístico, en la sección 5 analizaremos las fuentes de dispersión.

La dispersión la percibió el ser humano desde los primeros tiempos y la problematizó cuando hizo sus primeros cálculos hace 2300 años en problemas astronómicos. En efecto, los babilonios entre los años 500 y 300 a. C. desarrollaron una teoría matemática para estudiar los movimientos del sol, la luna y los planetas (Plackett, 1978). La Historia de la Matemática tiene un gran interés tanto desde el punto de vista de la enseñanza de los conceptos matemáticos como desde el punto de vista de la investigación didáctica, además, en la mayoría de los estudios estadísticos la consideración de las medidas de tendencia central obliga a la consideración de la dispersión, por otra parte, la dispersión, aunque aparentemente nos pueda parecer un concepto fácil, es muy difícil de construir por el individuo y como ejemplo de tal aseveración analizamos y discutimos la evolución histórica de las leyes del error que tanto fruto dio al desarrollo de la Estadística y, en consecuencia, su conocimiento puede ser rentable desde el punto de vista de la enseñanza y de la investigación didáctica.

Por último, finalizamos con unas conclusiones sobre el trabajo realizado.

2. La dispersión y los currícula no universitarios

Un primer análisis que debemos hacer, si pretendemos realizar investigación didáctica, o bien, si queremos centrarnos en la aplicación en las aulas de las investigaciones didácticas sobre la dispersión, es dónde, cuándo y qué nociones relacionadas con la dispersión aparecen en los currícula actuales.

El Real Decreto 1631/2006, que establece las enseñanzas mínimas correspondientes a la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), en su descripción de la asignatura de matemáticas dice sobre la estadística

> "*Debido a su presencia en los medios de comunicación y el uso que de ella hacen las diferentes materias, la estadística tiene en la actualidad una gran importancia y su estudio ha de capacitar a los estudiantes para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística.*" (RD 1631/2006, p. 751)

El Real Decreto (RD) reconoce la importancia de la Estadística en la sociedad actual, tanto en el mundo social como en el académico, destacando que su estudio capacita al futuro ciudadano para entender el mundo en el que vive, ofreciéndole herramientas para obtener una información veraz que pueda convertir en conocimiento útil para la vida democrática, en consecuencia, la formación estadística es fundamental para el futuro ciudadano.

Un hecho a destacar es el énfasis que hace le RD en esta cita (y en las que presentemos después) en el análisis crítico de las presentaciones, interpretaciones y abusos que algunas veces se hace al ofrecer información estadística tendenciosa, con el fin de transmitir una información que no se corresponde con la que realmente contiene el estudio estadístico en cuestión. En efecto, algunas veces, al ofrecer resultados estadísticos, dichos resultados se pueden presentar o interpretar de manera tendenciosa, obteniendo unas conclusiones que "beneficien" al autor o a las ideas que defienda, pero que no son propias de los resultados tratados. Una persona formada estadísticamente, puede detectar dicha presentación o interpretación tendenciosa, pero una persona no bien formada estadísticamente, en muchas ocasiones, es incapaz de detectarla, en consecuencia, el Real Decreto hace hincapié en que los estudiantes adquieran la capacidad del análisis crítico de las presentaciones e interpretaciones estadísticas. Algunas veces puede aparecer este fenómeno cuando se toman medias sin tener en cuenta la dispersión y los valores atípicos. En los medios de comunicación social cuando se utiliza la media para dar una información casi nunca va acompañada de la desviación típica correspondiente o alguna otra medida de dispersión como sería necesario.

Centrándonos en el tema que nos ocupa, observamos que en el mismo Real Decreto, en los bloques de contenidos, nos encontramos con que la dispersión no comienza a tratarse hasta el tercer curso de la ESO.

> **"Bloque 6. Estadística y probabilidad.**
> *"Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Análisis de la dispersión: rango y desviación típica.*
> *Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística."* (RD 1631/2006, p.756)

Podemos ver que en el tercer curso se realiza una pequeña introducción y tan sólo se trabajan, en principio, dos medidas de dispersión: el rango y la desviación típica. Se inicia a los estudiantes en el uso conjuntamente de la media y la desviación típica y se vuelve a enfatizar la actitud crítica ante la información estadística.

Y en el cuarto curso de ESO nos encontramos, para la opción A.

> **"Bloque 6. Estadística y probabilidad.**
> *Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Uso de la hoja de cálculo.*
> *Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones."* (RD 1631/2006, p. 758)

Y para la opción B.

> **"Bloque 6. Estadística y probabilidad.**
> *Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones."* (RD 1631/2006, p. 759)

En cuarto, para la opción A, se introduce el gráfico de caja y las medidas de dispersión para comparar y valorar (distribuciones de datos). La opción B, mucho más completa, se trabaja el análisis de otras medidas de dispersión y su significado (descentralizaciones, asimetrías, valores atípicos, ...) y la representatividad de los datos por su media y desviación típica, distinguiendo cuando estas se pueden utilizar de cuando no se deben utilizar por la existencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. También se recomienda realizar valoraciones de la mejor representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos. También aconseja el uso de las medidas de centro y dispersión para realizar valoraciones y comparaciones. Por último observemos que hace hincapié en la actitud crítica ante la información estadística cuando habla de detección de falacias.

En esta primera aproximación al currículo apreciamos ya varios defectos que comentaremos más profundamente en las conclusiones, como son el estudio tardío de la dispersión, la diferencia entre las opciones A y B en cuarto o que el bloque de estadística sea el bloque 6, el último, que en la práctica se traduce en que no hay tiempo para tratarlo o se hace de manera rápida por la escasez de tiempo, en consecuencia este hecho no es una cuestión baladí.

El Real Decreto es concretado por las diferentes órdenes para las comunidades autonómicas, a título de ejemplo, especificamos la de Andalucía, que se concreta a través de la Orden de 10 de Agosto de 2007 (B.O.J.A. del 20/08//2007), en el que a pesar de que a la hora de introducir la relevancia de la materia dice "*la estadística y la probabilidad también están presentes hoy día en las diferentes materias, así como en los medios de comunicación, en los que aparecen datos que es necesario interpretar*." (B.O.J.A. (2007), p. 55) luego no suplementa lo que dice el Real Decreto y se queda en un breve:

> *"el desarrollo gradual comenzará, en los primeros cursos, por las técnicas para la recogida, organización y representación de los datos a través de las distintas opciones como tablas o diagramas, para continuar, en cursos sucesivos, con los procesos para la obtención de medidas de centralización y de dispersión que les permitan realizar un primer análisis de los datos."* (BOJA- 20/08//2007, p. 56)

Debemos tener en cuenta que esto es todo lo que se trabaja la dispersión en la etapa obligatoria, que debería formar al alumno suficientemente para la vida diaria (contribuyendo al desarrollo de la "competencia matemática".)

Si subimos el nivel y vemos el currículo de la etapa post-obligatoria, en este caso, el bachillerato, descubrimos con asombro que en las matemáticas de ciencias no se abordan las nociones relacionadas con la dispersión en los bloques de estadística, tan sólo se abordan en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, en las matemáticas de 1er curso de bachillerato tenemos:

> ***"3. Probabilidad y estadística:***
> *Estadística descriptiva unidimensional. Tipos de variables. Métodos estadísticos. Tablas y gráficos. Parámetros estadísticos de localización, de dispersión y de posición."* (RD 1467/2007, p. 45475)

Y en las de 2º curso de bachillerato:

> **"3. probabilidad y estadística:**
> *Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población.*
> *Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales. Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida.*
> *Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida."* (RD 1467/2007, p. 45476)

En este último curso, para los estudiantes que han elegido la vía de las ciencias sociales, se profundiza en la dispersión y se abordan problemas de muestreo y de distribuciones, pero para los demás niveles no.

Así pues a modo de resumen las nociones relativas a la dispersión abordadas en los currícula en la etapa obligatoria son:

- Medidas de dispersión en un conjunto de datos.
- Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.
- Comparación de conjuntos de datos utilizando la media y la desviación típica.
- Diagrama de caja.
- Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos.

Y en la etapa post-obligatoria (preparatoria para la universidad):

- Parámetros del muestreo.
- Distribuciones de probabilidad.
- Contraste de hipótesis.

3. La noción de dispersión ausente de los curricula

Como se puede observar en la sección anterior, los currícula oficiales no incluyen la noción de dispersión como objeto de estudio, solamente aparece el estudio de las medidas de dispersión en sí, pero la noción de dispersión brilla por su ausencia. El hecho de que alguna noción importante no se incluya en los curricula es un fenómeno didáctico que suele darse en las disposiciones oficiales. Por ejemplo, las nociones de conteo y de magnitud no han aparecido en los currícula oficiales hasta las últimas reformas.

El mismo caso es el de dispersión, en los curricula y en los libros de texto aparecen las medidas de dispersión, pero no suele aparecer la noción de dispersión como tal, parece ser que es una noción tan fácil, tan transparente, que se adquiere de manera espontánea y, en consecuencia, no es necesario dedicarle un tiempo a su estudio y clarificación, así lo expresan Makar y Confrey, (2005, p. 28) "*En la mayoría de los estudios de investigación la expresión "variación" se le atribuye un significado evidente, es decir de sentido común, y se deja sin definir*". Muy pocos libros incluyen una definición para la dispersión.

Veremos a lo largo de ese trabajo que dicha noción no es tan fácil ni se adquiere de manera espontánea, además dicha noción impregna todos los contenidos estadísticos y es la esencia de la misma Estadística, si no existiese la dispersión no existiría la Estadística, ya que no sería necesaria. Su estudio es necesario desde el primer momento, ya que, "*Cualquier curso introductorio (de Estadística) debe tener como principal objetivo ayudar a los estudiantes a aprender los fundamentos del pensamiento estadístico. Esto incluye la necesidad de datos, la importancia de la producción de datos, la omnipresencia de la variabilidad, la cuantificación y la explicación de la variabilidad*" (Cobb y Moore, 1997, p. 815, -el subrayado es nuestro-).

El hecho de que la dispersión no aparezca en los currícula no quiere decir que no se comience el estudio de dicha noción hasta que aparecen las medidas de dispersión, es decir, hasta Educación

Secundaria, sino que se debe comenzar el estudio de dicha noción desde la escuela elemental, hecho que se desprende, por ejemplo, de la anterior cita de Cobb y Moore (1997)

Así pues, partiendo de los currícula actuales, vamos a analizar y discutir la noción de dispersión y sus fuentes, terminado con un análisis histórico de la ley del error, en el que se particulariza un enfoque del nacimiento y conformación de la noción de dispersión.

4. La noción de dispersión[1]

4.1. Términos utilizados

En inglés, nos encontramos cuatro términos para referirse a la noción de dispersión: "*dispersion*" (dispersión), "*variation*" (variación), "*variability*" (variabilidad) y "*spread*". Esta última es una palabra polisémicas que tiene significado como nombre y como verbo. Como nombre significa: propagación, extensión, envergadura, expansión, … Y como verbo: extender, exponer, untar, cubrir, poner, llenar, espaciar, propagar, difundir, esparcirse, extenderse, untarse, propagarse, expandirse, derramarse, … (Garcia Pelayo, R, 1993). Algunos autores, como por ejemplo, Kaplan, Rogness, y Fisher, (2011) recomienda no utilizar la palabra "*spread*" para referirse a la dispersión, debido a su polisemia, ya que han detectado que produce dificultades en los niveles elementales de enseñanza. Estos autores aconsejan utilizar las palabras que consideran sinónimas "variability" o "*dispersion*".

Reading y Shaughnessy (2004) apuntan que, según varios diccionarios consultados "*variation*" es un nombre usado para describir el acto de variar o cambiar una condición y "*variability*" es un nombre derivado del adjetivo "*variable*" y significa que algo es apto o propenso a variar o cambiar, concretando que, aunque muchos autores "variation" y "variability" los utilizan como términos sinónimos, ellos los utilizan con un sentido diferente, siendo el significado de "variability" una característica (propensa a variar) de una entidad observable y el significado de "variation" la descripción o medida de esa característica. Garfield et al. (2008) apuntan que la distinción entre variabilidad y variación, no se ha acordado aún en la comunidad de Educación Estadística. Autores posteriores como Peters (2011) usan los términos "variation" y "variability" como intercambiables.

En la inmensa mayoría de la literatura estadística en inglés las palabras "*dispersion*", "*variation*", "*variability*" y "*spread*" se toman como sinónimas a lo que en castellano entendemos por dispersión. En lo que sigue las tomaremos como sinónimas, las palabras dispersión, variación y variabilidad, salvo que se indique lo contrario.

En España, como hemos visto, en los currícula oficiales solamente aparece la palabra dispersión, generalmente ligada a su medida, así la expresión "medidas de dispersión" la encontramos en currícula y libros de texto. En los últimos tiempos, probablemente influenciado por la literatura anglosajona, comienzan a aparecer las palabras *variación* y *variabilidad* en libros de texto y literatura relacionada en castellano, como sinónimos de dispersión.

4.2. La noción de dispersión

En la literatura que hemos revisado hemos encontrado algunas definiciones de dispersión que analizaremos en los siguientes párrafos

[1] Utilizamos la palabra "*dispersión*" en lugar de "*variación*" o "*variabilidad*" porque es la más utilizada en castellano en la expresión "medidas de dispersión"

"Usamos la palabra variabilidad para describir una situación en la cual las observaciones o las medidas deberían ser las mismas, pero no lo son" (Phatak y Robinson,2005, p. 1). Esta primera definición enfatiza el hecho mismo de la variabilidad en la medida, la variabilidad existe porque existen errores en las medidas u observaciones. Como veremos en la sección 6 la problematización de estos errores en la medida dio lugar al estudio de la ley del error, tan fecunda en Estadística.

Una primera definición sería la siguiente: *"En palabras sencillas, variación es la cualidad de una entidad (una variable) para variar, incluyendo variación debida a la incertidumbre"* (Makar y Confrey, 2005, p. 28). Nos dice el hecho de variar. Esta definición de variación es lo que Reading y Shaughnessy (2004) entienden por variabilidad.

> *"A la mayor o menor separación de los valores respecto a otro, que se pretende que sea su síntesis, se le llama dispersión o variabilidad".* (Martín-Guzmán y Martín Pliego, 1985, p. 57). Aquí se entiende la dispersión como la separación de los valores de un valor de tendencia central. Esta definición de dispersión o variabilidad es lo que Reading y Shaughnessy (2004) entienden por variación.

Vemos en estas definiciones que los significados dados a variabilidad y variación no concuerdan con la distinción de Reading y Shaughnessy (2004), en consecuencia, por eso hemos afirmado unas líneas más arriba que Garfield et al. (2008) apuntan que la distinción entre variabilidad y variación, no se ha acordado aún en la comunidad de Educación Estadística.

Generalmente en los curricula solo aparecen las medidas de dispersión, pero aunque la medida de la dispersión es una herramienta muy importante en el análisis de datos, cuando consideramos la dispersión debemos tener en cuenta:

a) el concepto de dispersión, su definición, saber explicar en qué cosiste;
b) su uso, sobre todo cuando se mide, las técnicas matemáticas asociadas a la medida de la dispersión;
c) el propósito que pretendemos con la dispersión, su utilidad dentro de un contexto, las fuentes de dispersión (Makar y Confrey, 2005).

La dispersión es la esencia de la Estadística, porque sin dispersión no hay necesidad de investigación estadística (Moore, 1990). La dispersión tiene un significado cercano a los conceptos de variable e incertidumbre, porque si hay variabilidad, vivimos en la incertidumbre y, si algo no está determinado o es cierto, hay variabilidad (Bakker, 2004). Mañana sabemos que amanece a una hora determinada, pero no estamos seguros si lucirá el sol o no.

5. Fuentes de dispersión

Son muchas las fuentes de la dispersión, aquí consideraremos las siguientes: la medida, la naturaleza, dispersión inducida, dispersión en el muestro (Franklin et al., 2005).

5.1 Dispersión en la medida

Cuando realizamos medidas repetidas sobre un mismo ítem observamos que las diversas medidas no son iguales varían de una vez a otra, esto es debido a varias causas, entre otras, a que el instrumento de medida no es muy fiable o adecuado (medir las dimensiones del aula con un doble decímetro), o bien, que el sistema donde se hace la medida está en constante cambio. Para este segundo caso podemos poner como ejemplo la medida de la presión sanguínea, aunque el instrumento de medida sea preciso, la presión cambia en un instante. En palabras de Jessica M. Utts: *"En resumen, la variabilidad en las mediciones puede ocurrir por tres razones al menos. En primer lugar, las mediciones son imprecisas, y por lo tanto el error de medición es una fuente de variabilidad. En segundo lugar, existe una variabilidad natural a través de las personas en cualquier momento dado. Y en tercer lugar, a menudo existe una variabilidad natural en una característica de la misma persona a través del tiempo"*. (Utts, pp.50). De estas palabras se deduce la importancia de la dispersión natural que comentamos a continuación.

5.2 Dispersión en la Naturaleza

La dispersión es inherente a la Naturaleza. La comprensión de la dispersión natural es requisito imprescindible para comprender algunos métodos estadísticos modernos. Si tomamos medidas sobre seres naturales de una misma especie encontramos diferencias, debido a que los individuos son diferentes (los estudiantes de una misma clase no tienen el mismo peso o la misma altura; las semillas de una bolsa no pesan todas los mismo, etc.). En estos ejemplos vemos que la dispersión se puede dar dentro de un grupo y entre grupos distintos de la misma especie. Esta distinción es importante en Estadística. Algunas veces encontramos patrones de la variación existente y buscamos maneras de trabajar sobre ella, tal es el caso de las tallas de la ropa o el número del calzado (Wild y Pfannkuch, 1999). También es útil aprender a distinguir las diferencias debidas a la dispersión natural de la dispersión inducida por características que podemos definir, aplicar, medir y posiblemente manipular.

5.3. Dispersión inducida

Si plantamos un kilogramo de las mismas semillas en diferentes climas obtendremos resultados diferentes. La variabilidad de los resultados será debida a la variabilidad natural de las semillas, pero también a la variabilidad inducida por el clima, en un tipo de clima obtendremos mejores o peores resultados que en otro. Si el clima es el mismo y utilizamos distinto fertilizante, se obtendrá variabilidad inducida por el fertilizante. La comparación de la variabilidad natural con la variabilidad inducida por otros factores está en la esencia de la estadística moderna, por ejemplo, es el caso de los estudios de la efectividad de los medicamentos.

5.4. Dispersión en el muestreo

Si se toman diferentes muestras de una misma población, estas varían entre sí. Si se utiliza una adecuada técnica de muestreo y un tamaño de muestra suficiente la muestra se asemeja a la población.

6. Leyes del error

En Estepa et al. (2012) se esbozan algunas ideas sobre el interés de la Historia de las Matemáticas como fuente importante tanto para la investigación didáctica como para la enseñanza de las Matemáticas. En cuanto a la investigación la Historia nos sirve para perfilar la epistemología de los saberes matemáticos, ya que nos cuenta cómo aparecieron, se conformaron, devinieron y llegaron al estado actual las nociones y conceptos matemáticos. En cuanto a la enseñanza, la Historia puede ser útil, pues podemos tomar de ella las situaciones que comenzaron a dar sentido a las nociones matemáticas, además como prueba de su interés en la enseñanza, los curricula actuales aconsejan su uso en la planificación de las enseñanzas.

Hemos visto en la sección 5.1 que en muchas ocasiones hay necesidad de tomar datos de medidas u observaciones sobre hechos o fenómenos. Se observa que aunque las medidas u observaciones se realicen en las mismas condiciones, con los mismos aparatos e independientemente, no siempre se obtienen idénticos resultados, es lógico pensar que exista un valor verdadero único para la medida u observación que estemos realizando. La estimación de este valor verdadero ha sido un problema al que eminentes científicos se han enfrentado ofreciendo sus soluciones. En este problema se acomete el estudio de la variabilidad y lo analizaremos desde este punto de vista. El estudio de la variabilidad de un conjunto de datos u observaciones es un problema difícil, al que grandes matemáticos, tardaron, tiempo y varios intentos hasta darle solución. Hoy pretendemos que los estudiantes aprendan todo esto en unos pocos días o semanas.

El uso de la dispersión casi siempre va unido a una medida de centro, en consecuencia, para estudiar su consideración, primeras aproximaciones y evolución del concepto de dispersión y nociones cercanas, hemos creído de interés estudiar y discutir la conformación y devenir de las ley del error, que tanto fruto ha dado dentro del desarrollo de la Estadística. Además, el modelo de la medida del error es un modelo de dos parámetros, uno de localización, el verdadero valor, y un parámetro de escala, dispersión, que puede ser conocido (Hald, 1998, p. 34). Otra razón por la que hemos incluido las leyes del error es porque "*El razonamiento acerca de la variación del error puede proporcionar una base razonable para la instrucción*" (Petrosino, Lehrer, y Schauble, 2003, p. 132).

La estimación del verdadero valor de una medida a partir de varias mediciones realizadas, históricamente aparece en la Astronomía. Esta ciencia llamó la atención de los hombres desde los primeros tiempos. Ya en Babilonia, siglos antes del nacimiento de Cristo se llevaban a cabo estudios sobre los cuerpos celestes. En muchos estudios astronómicos se realizan observaciones y mediciones obteniendo una serie de datos empíricos que no suelen ser coincidentes, cuando teóricamente deberían serlo, es decir la medida o la observación sobre un mismo hecho debería ser igual a su verdadero valor cada vez que se tome. Como esto no es así, se denomina error de una observación o una medida a la "*diferencia entre el valor observado y el verdadero valor del fenómeno considerado*" (Hald, 1998, pp. 33).

La estimación de la máxima variación en la duración de un año en ¾ de día la realiza Hiparco (190-120 a. C.) tomando la mitad del rango de sus observaciones (Plackett, 1978).

Aunque científicos musulmanes estimaban el verdadero valor calculando el punto medio del recorrido o rango, parece ser que hasta la última mitad del siglo XVI, la práctica habitual para seleccionar una medida como representante de un conjunto de mediciones, era tomar la que se creía mejor medida, basándose en criterios como: lo ha dicho una persona con autoridad, se ha obtenido bajo ciertas condiciones consideradas óptimas mediante un criterio. Este hecho preocupó a Simpson (1710-1761), e hizo la hipótesis de que la probabilidad de obtener un determinado error al realizar una observación puede ser expresada por una función de probabilidad discreta uniforme, o bien, por una distribución de probabilidad discreta triangular (Eisenhart 1983).

A partir de la última mitad del siglo XVI se comienza a tomar la media aritmética como el valor que mejor estima el conjunto de medidas.

Diversos científicos y matemáticos estudian la distribución de las medidas, lo que podemos considerar como el estudio de la variabilidad de los errores de medida. Lo que se ha llamado en la literatura "las leyes de error". C. Eisenhart (1983) las define así: *""Leyes del error", es decir, la distribución de probabilidad asumida para describir la distribución de los errores que surgen en medidas repetidas de una cantidad fija por el mismo procedimiento bajo condiciones constantes, fue introducida en la última mitad del siglo XVIII para demostrar la utilidad de la media aritmética de un número de medidas o valores observados de la misma cantidad como una buena elección para el* *valor de la magnitud de esa cantidad en base a las medidas u observaciones manejadas"* (Eisenhart (1983, p. 531).

El primero en introducir el concepto de distribución del error y a considerar la distribución continua fue Simpson, imponiendo dos condiciones la distribución debe ser simétrica y, además debe ser de rango finito, (Kendall, 1978).

Daniel Bernouilli explica su visión de la distribución de los errores de la siguiente manera: Supongamos una línea recta en la que se disponen varios puntos que indican los resultados de varias observaciones (valores). Un segmento perpendicular que parte de cada punto cuya longitud expresa la probabilidad de ese valor, si dibujamos una línea curva que una los extremos de dichos segmentos esta será la escala de probabilidades de las observaciones. Los siguientes supuestos de la escala de probabilidades no se pueden negar. (Bernouilli, 1978).

a) Ya que las desviaciones del verdadero punto intermedio son iguales en ambas direcciones, la escala de probabilidades tendrá dos perfectas ramas similares.
b) Las observaciones serán ciertamente más numerosas y, por lo tanto, más probables cerca del centro, al mismo tiempo serán menos numerosas en proporción a su distancia del centro.
c) El grado de probabilidad mayor estará en el medio, donde suponemos que se localiza el centro y la tangente a la escala por este punto será paralela a la anteriormente dicha línea recta.
d) Como suponemos que las observaciones menos favorecidas tienen un límite, en ambos extremos la probabilidad desaparece y un gran error es imposible.
e) Las máximas desviaciones en cada lado se consideran como una especie de frontera entre lo que puede ocurrir y lo que no. De esta manera, la escala indica que es escasamente posible pasar de ese límite.

A continuación (Bernouilli, 1970), propone las escalas que cumplen los supuestos anteriores son: semi-elipse, semicircular (el verdadero valor está en el centro del semicírculo), coseno, arco de parábola. También reconoce que otras escalas cumplirán dichos supuestos. Estas distribuciones las veremos en páginas posteriores.

Lambert (1728-1777) estudia errores a partir de datos astronómicos y físicos y distingue entre los errores brutos, sistemáticos y aleatorios y propone una primitiva medida de "fiabilidad" para la media: calcular la media de todas las observaciones y calcular la media de las observaciones que quedan cuando se han eliminado las observaciones con grandes desviaciones. Calcula la razón entre las dos medias, sin embargo no da criterio para distinguir las observaciones con grandes desviaciones (valores atípicos) (Hald, 1998, p. 80).

Las leyes del error primero se suponen de rango limitado, a finales del siglo XVIII se considerara con rango ilimitado.

Las distribuciones de rango limitado que se consideran son discretas (uniforme, triangular) y continuas (uniforme, triángulo isósceles, semicircular, parabólica y logarítmica) las distribuciones de rango ilimitado (la primera ley del error de Laplace, la ley del error de Gauss, la segunda ley del error de Laplace y la distribución de Cauchy).

Como hemos visto la idea de que los valores centrales son más probables que los más alejados del centro, salvo para la distribución uniforme, da origen a que diferentes autores propongan diversas distribuciones que cumplan este requisito.

6.1. La distribución uniforme discreta (1786)

Simpson la propuso para el intervalo [-v, v] de la siguiente manera: los errores posibles pueden ser –v, –v+1,…, -2, -1, 0, 1, 2, …., v-1, v, todos ellos con la misma probabilidad, lo que le lleva a la distribución uniforme discreta. Siendo cada uno de los valores de los errores considerados, es decir, si v es el verdadero valor y x es el valor observado, entonces e = x-v pertenece a [-v, v] La expresión, general de la función de probabilidad sería $\Pr[X = x] = \frac{1}{2v+1}$, tomando v=5 hemos obtenido el gráfico de la figura 1. (Eisenhart, 1983, p. 534.)

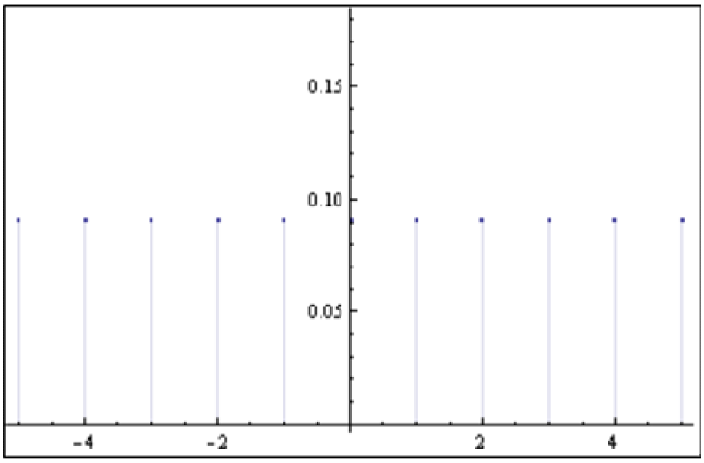

Figura 1. Distribución uniforme discreta

6.2. Distribución triangular discreta (1756)

Después Simpson tuvo otro intento de explicar la variación del error, fue mediante la distribución triangular discreta, ya que, las series de errores parecen mejor adaptadas porque es altamente razonable suponer que la probabilidad de los errores decrece cuando los errores se incrementan (Hald, 1998, p. 36) donde supone que los errores toman los valores enteros –v, -v+1, …, 2, 1, 0, 1, 2, …, v-1, v, con probabilidades proporcionalidades a 1, 2, … v-1, v, v+1, … 2, 1. En concreto las probabilidades se calcularían mediante la fórmula: $\Pr[X = x] = \frac{(v+1) - |x|}{(v+1)^2}$, donde x ∈ [-v, v] para v=5, tenemos, $\Pr[X = x] = \frac{6 - |x|}{36}$ (Eisenhart, 1983, p. 534.), cuya representación gráfica la ofrecemos en la figura 2 Simpson encuentra que la función generatriz de la distribución triangular es el cuadrado de la función generatriz de la distribución uniforme, en consecuencia se debe considerar a la distribución triangular como suma de dos distribuciones uniformes (Hald, 1998, p. 36.) A partir de trabajar con estas distribuciones Simpson concluyó que tomando la media de un número de observaciones disminuyen en gran medida las posibilidades de los errores más pequeños y se elimina cualquier posibilidad de grandes errores. (Eisenhart, 1983.)

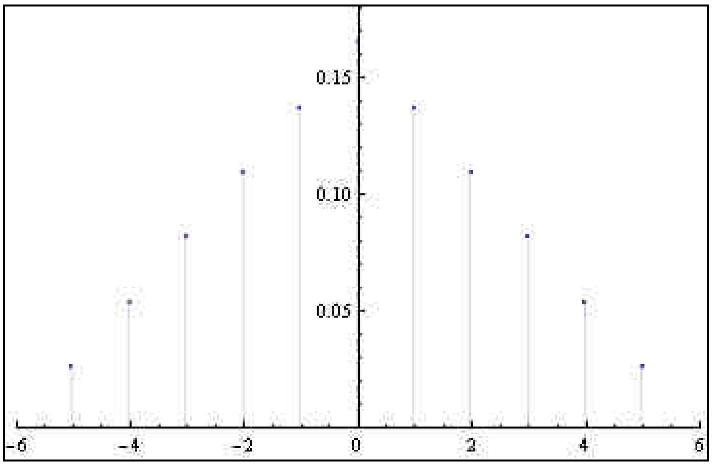

Figura 2. Distribución triangular discreta

6.3. Distribución uniforme continua (1776)

Lagrange (1736-1813) primero considera las distribuciones discretas uniforme (en el intervalo [-a, b]) y triangular (en el intervalo [-a, a]). Demuestra los resultados obtenido previamente por Simpson. Mediante el paso al límite obtiene los resultados para las correspondientes distribuciones continuas uniforme y triangular, la distribución uniforme continua no simétrica la obtiene en el problema VII de sus memorias y en la figura 3 se da una representación gráfica de ella $f(x)=\dfrac{1}{a+b}, \quad -a \le x \le b$, para a=2, b=3. Esta distribución también fue obtenida por Laplace, probablemente sin conocer los trabajos de Simpson y Lagrange (Hald, 1998).

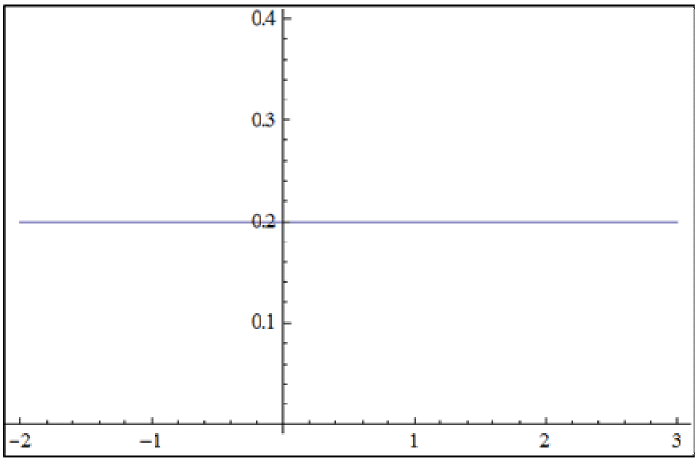

Figura 3. Distribución uniforme continua

6.4. Distribución continua triangular (1757)

En 1757, Simpson extiende su análisis de la distribución triangular discreta, para ello tomó valores –kv, -k(v-1), …, -k, 0, k, …, k(v-1), kv, con probabilidades proporcionales a 1/k, 2/k, …, v/k, (v+1)/k, v/k, …, 2/k, 1/k y aplicó los límites $k \to \infty, \quad v \to 0$ con $kv \to a$ obteniendo la distribución triangular continua. Una representación de la distribución, $f(x) = \frac{1}{a^2}(a - |x|), \quad -a \le x \le a$ triangular continua, para a = 1 se muestra en la figura 4 (Eisenhart, 1983, p. 535.)

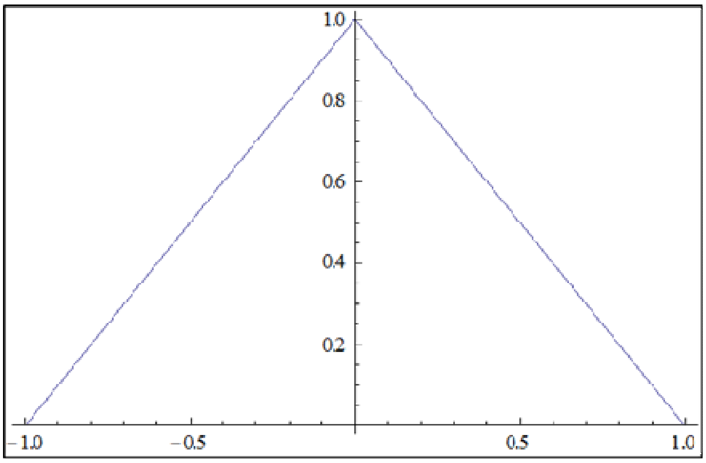

Figura 4. Distribución continua triangular

6.5. Distribución semicircular (1765)

Lambert (1728-1777) investigó la forma de la distribución del error de manera teórica y empírica (propuso una curva en forma de campana, sin expresarla en forma de función), durante su investigación concluyó que la media aritmética no difería del "valor verdadero". (Eisenhart, 1983, p. 540.) Llega con posterioridad a la distribución circular haciendo las siguientes consideraciones. Si miramos una estrella sin telescopio, a simple vista, vemos un punto. Si la miramos con telescopio, aparece un círculo. La línea del telescopio divide al círculo, aleatoriamente, en dos partes, todos los puntos dentro de este círculo tienen la misma probabilidad de ser atravesados por esta línea, así pues la línea debe ser perpendicular a un diámetro, además la simetría permite rotar el telescopio de forma que estas líneas pueden ser horizontales o verticales sin perder generalidad. La probabilidad de la observación es la medida del segmento que une el diámetro con un punto de la circunferencia que bordea al círculo. (Eisenhart, 1983, p. 541) Después de una serie de hipótesis ampliamente discutidas, como la expuesta anteriormente, le lleva a la distribución semicircular (Hald, 1998, p. 81).

$$p(x) = \frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - (x-\mu)^2}, \ \mu - a \le x \le a + \mu ,$$

Para a=1 y μ=0, tenemos La gráfica representada en la figura 5.

M O N O G R Á F I C O: E S T A D Í S T I C A

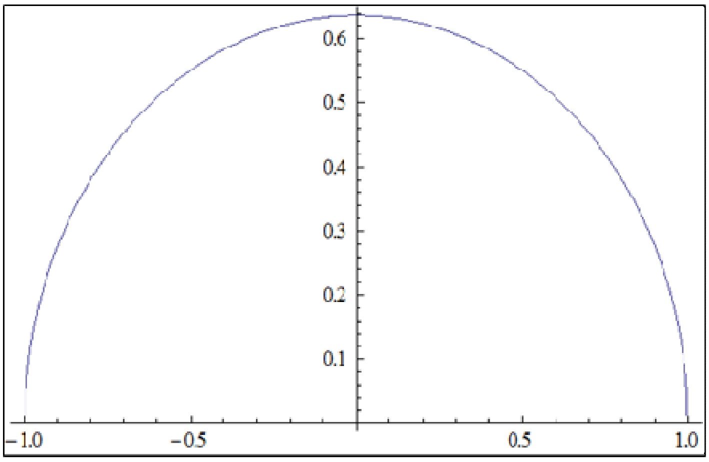

Figura 5. Distribución semicircular

6.6. Distribución parabólica (1776)

La distribución parabólica fue estudiada por Lagrange, junto con la uniforme continua, triangular continua y coseno, afirmando, al final del estudio, que la distribución parabólica es *"la más simple y la más natural que uno pueda imaginar"*, (Eisenhart, 1983, p. 539; Hald, 1998, p. 48). La forma más general (asimétrica) de esta distribución la propuso Laplace y es $f_x(x)=\dfrac{6}{(a+b)^3}(a-x)(b+x),\ -b\le x\le a; 0\prec b, a\prec\infty$, (Eisenhart, 1983, p. 545), la propuesta por Lagrange es $f_x(x)=\dfrac{3}{4a^3}(a^2-x^2),\ -a\le x\le a$ (Eisenhart, 1983, p. 539), en la figura 6 damos una representación gráfica de esta distribución, para a=2.

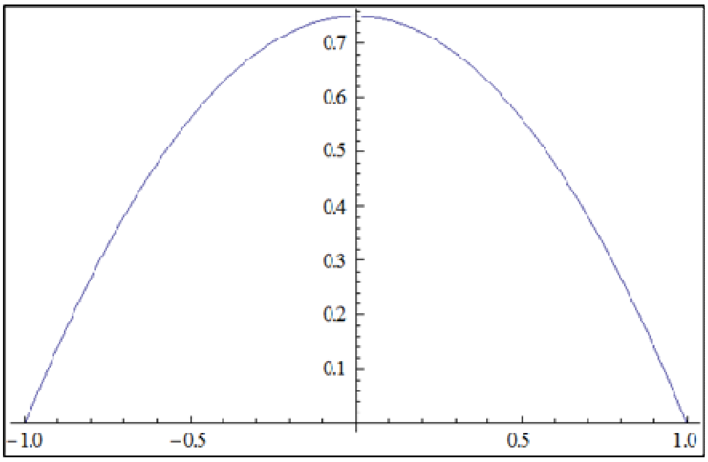

Figura 6. Distribución parabólica

6.7. Distribución coseno (1781)

La distribución coseno fue estudiada por Lagrange a partir del problema XI de su "Miscellanea Taurinensia" (1776). En la figura 7 damos una representación gráfica de esta distribución, $f_x(x) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad -1 \le x \le 1.$

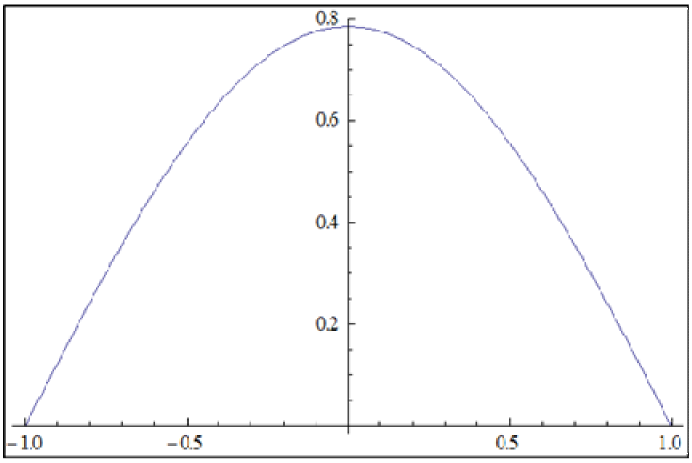

Figura 7. Distribución coseno

6.8. Distribución de Laplace de rango finito (1781)

Discutiendo la distribución de probabilidad de las destrezas de un jugador en un juego y de los intervalos entre puntos aleatorios en una línea de longitud *a*, Laplace sugiere, que cuando el error X de una medida individual u observación puede tomar valores solamente entre –*a* y *a*, y se ignora la ley de la probabilidad de los errores, se puede tomar $f_x(x) = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{a}{|x|}\right), -a \le x \le a, 0 \le \infty$, como la distribución de probabilidad de un error X, "en la investigación sobre la media que uno debe tomar entre los resultados de muchas observaciones" (Eisenhart, 1983, p. 545). La diferencia entre la mayor y la menor observación, rechazadas las no adecuadas por estar muy alejadas, sería 2a (Hald, 1998, p. 179). Para a=2, tenemos la representación gráfica que se da en la figura 8

6.9. Distribución de Laplace o doble distribución exponencial (año 1774)

Según Hald (1998, p.177), se puede decir que durante mucho tiempo Laplace había reconocido que la distribución de errores aleatorios de observaciones astronómicas era simétrica, unimodal y de rango finito. Las distribuciones de los errores más utilizadas eran las que hemos visto hasta ahora, simples funciones matemáticas como la triangular, cuadrática, coseno y semicircular.

En 1974, Laplace se plantea que los errores teóricamente pueden ser infinitamente grandes si la curva que los representa decrece asintóticamente al eje de abscisas. Esta curva es simétrica respecto al eje de ordenadas, teniendo un máximo en el origen y decrece de forma monótona a cero, cuando x se aleja del origen. Entre la multitud de funciones que tienen estas propiedades la más simple obviamente es:

$f(x) \propto e^{-mx}$, x>0, m>0

Laplace no elige la exponencial debido a su simplicidad, la obtiene por medio del principio de indiferencia (se deben asignar probabilidades iguales a cada una de varias alternativas simples, si no hay razón conocida para preferir otra cosa).

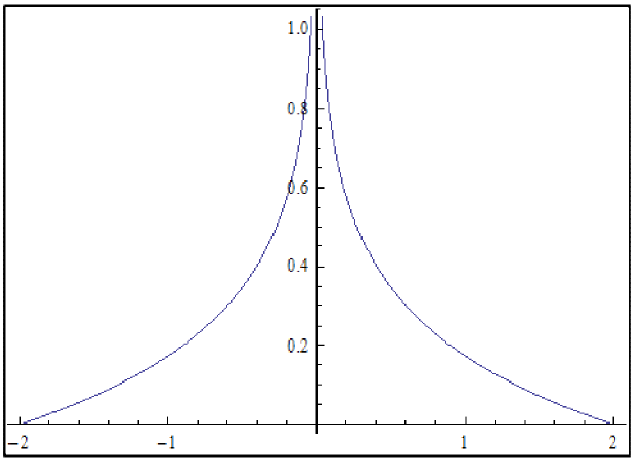

Figura 8. Distribución de Laplace de rango finito

Comienza observando que si no hay razón para suponer ningún punto en el eje más probable que otro entonces se tomaría *f(x)* constante, lo que significa que la curva de error sería “una línea recta infinitamente cercana al eje de abscisas”. Esta hipótesis debe ser rechazada porque se opone a lo que se conoce sobre la forma de la curva de error. En un segundo intento toma f’(x) igual a una constante negativa, lo que le conduce a la curva de error triangular, se debe rechazar esta hipótesis porque nos llevaría a una acotación del error.

Finalmente, Laplace observa que no solamente las ordenadas de f(x), sino también las diferencias de las ordenadas *–d(f(x)* deben decrecer para *x>0*, y ya que no tenemos razones para suponer una ley diferente para las ordenadas que para las diferencias, se sigue que no debemos, de acuerdo con las leyes de las probabilidades, suponer que la razón de dos diferencias consecutivas infinitamente pequeñas sea igual que las correspondientes ordenadas, es decir $\dfrac{df(x+dx)}{df(x)} = \dfrac{f(x+dx)}{f(x)},\ -\infty \le x \le \infty$,

en consecuencia, $f'(x) = -mf(x),\ \mathrm{m} > 0$,

por tanto

$f(x) = \dfrac{m}{2} e^{-m|x|},\ -\infty \le x \le \infty$, la constante m/2 se ha determinado por el requisito de que $\int f(x)dx = 1$. Una representación gráfica para m = 2, se da en la figura 9.

Esta distribución del error se llama la distribución de Laplace o la doble distribución exponencial. Es la primera distribución de los errores continua y de rango ilimitado. Laplace observa que se puede objetar a esta ley que no toma el valor cero para grandes valores de x, pero en este caso el valor de la función es tan pequeño que se puede tomar como cero.

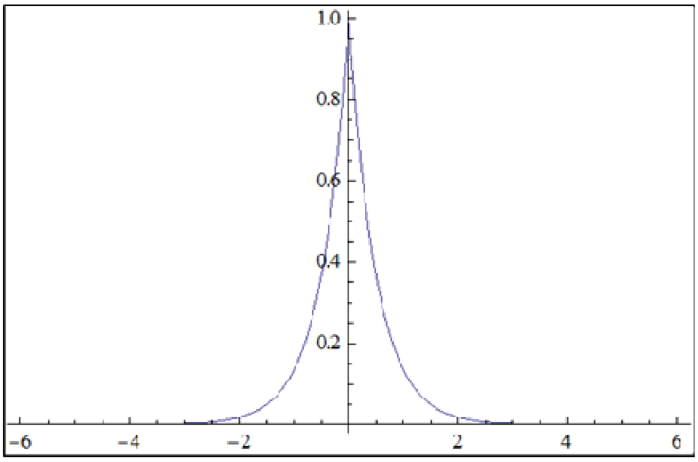

Figura 9. Distribución de Laplace o doble distribución exponencial

6.10. La “ley del error de Gauss” (1890)

De acuerdo con Eisenhart, (1983, p. 548) Gauss (1777-1855) parte de que la distribución de los errores debe ser una función diferenciable unimodal y simétrica (la condición de Laplace de continua la cambia por diferenciable) y que tienda a cero para valores absolutos de errores que tiendan a infinito.

Asume la regla tradicional de la media aritmética, mediante la cual, la media aritmética de una conjunto de observaciones realizadas cuidadosamente y en las mismas circunstancias proporciona el valor más probable de la cantidad que se está midiendo.

La función de densidad conjunta debe ser el producto de las probabilidades de cada uno de los errores. La derivada de su logaritmo neperiano proporcional a los errores. De esta última obtiene la función $f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}, -\infty<x<\infty,\ 0<h<\infty$, “*la constante h puede ser considerada como la medida de precisión de las observaciones*” y toma el valor de $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ (Hald, 1998, p. 355). En los comentarios a esta ley, Gauss dice que no puede representar bien a la ley del error con completo rigor, ya que, asigna probabilidades mayores que cero a errores fuera del rango de las posibles desviaciones, que, en la práctica, tienen límite finito, pero esto es inevitable porque nunca se puede asignar límite de error con absoluto rigor, pero este defecto carece de importancia ya que la función dada se acerca rápidamente a cero cuando los errores aumentan. Podemos ver la representación para σ=2 en la figura 10

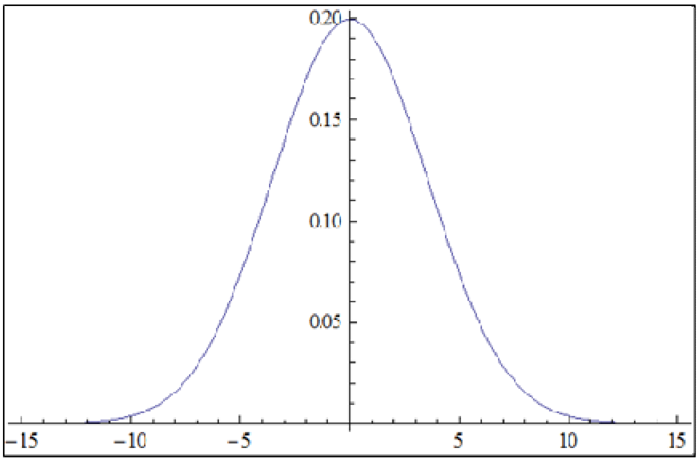

Figura 10. Ley del error de Gauss

6.11. Distribución de Cauchy (1824)

Esta distribución puede describir la variación de los errores de una medida. Eisenhart, (1983, p. 548) nos dice que fue propuesta por Poison en 1824, en un ejemplo de la demostración del teorema del límite central. Cauchy la propuso en 1853, sin referir que Poison la había discutido en 1829. Hoy es reconocida por distribución de Cauchy (Hald, 1998, p. 521). La fórmula general es

$$f(x)=\frac{1}{\pi\beta\left(1+\dfrac{x^2}{\beta^2}\right)},\quad -\infty\leq x\leq\infty,\quad 0\langle\beta\langle\infty.$$

En la figura 11 se da la representación gráfica para β=1.

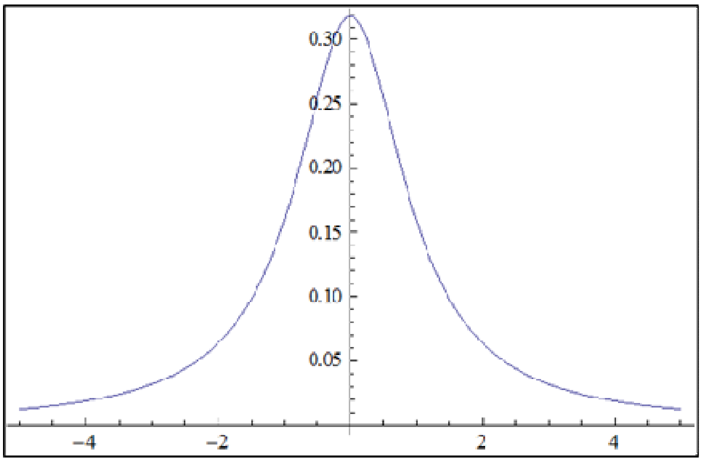

Figura 11. Distribución de Cauchy

7. Conclusiones

En este trabajo hemos tratado de la dispersión, variación o variabilidad, como nos guste llamar al fenómeno que está en el corazón de la Estadística y sin el cual esta ciencia no tendría sentido, en palabras de Wild y Pfannkuch, (1999, pp. 235-236), "*La variación es la razón por la que la gente ha tenido que desarrollar métodos estadísticos sofisticados para filtrar los mensajes de datos del ruido ambiental*".

Siendo la dispersión una noción de enorme transcendencia en la adquisición de los conceptos y técnicas estadísticos, hemos observado que su noción y conceptos relacionados no vienen recogidos en los curricula oficiales, probablemente porque la consideran muy fácil de entender y aprender. A lo largo del trabajo hemos analizado que es un concepto amplio y complejo, hemos visto que sus fuentes muy pocas veces se explicitan en los curricula ni en las planificaciones de enseñanza. También hemos visto lo costoso que ha sido a lo largo de la historia clarificar estas nociones centrándonos en las leyes del error.

Hemos visto que, en el contexto de los errores en la medida, el problema de determinar cuál es el verdadero valor de la medida a partir de varias mediciones con resultados diferentes, aparece la primera noción: si las medidas realizadas sobre el mismo objeto y con el mismo instrumento son distintas (varían) es porque al menos todas menos una son erróneas. Teniendo las medidas realizadas (la mayoría erróneas) a la vista ¿cuál será el verdadero valor? La primera solución que aparece en la historia es tomar como verdadero valor el semi-rango. En seguida se comienza a utilizar la media aritmética como verdadero valor, aquí aparece la distribución uniforme discreta. Pero, también bastante pronto, aparece otra idea que podemos resumir de la siguiente manera: cada vez que tomamos una medida, en general, es diferente de las anteriores, si tomamos la media aritmética de las medidas realizadas, estamos suponiendo que todas las medidas tienen la misma probabilidad de ocurrir, pero esto no es así, las medidas más alejadas del valor central tienen menos probabilidad de ocurrir (supuesto c) de Bernouilli), en consecuencia debemos realizar la media teniendo en cuanta la probabilidad de ocurrencia y aparece la distribución triangular. El paso de lo discreto a lo continuo es también un paso importante en la conceptualización del problema de calcular el verdadero valor. Cuando no satisface esta distribución aparece la semicircular, si esta no satisface, la semi-elipse, si no, la parabólica o la coseno. Si estas no satisfacen las de Laplace, hasta que terminamos con la de Gauss que parece satisfacer a todos.

De este pequeño resumen podemos sacar dos conclusiones, las dificultades que han mostrado verdaderos genios en el estudio de los errores y que en estos estudios los centros y la dispersión siempre van unidos. Esto es lo contrario de lo que ocurre en las aulas: las medidas de centro se estudian aisladas y a continuación las de dispersión, también aisladas. El ciudadano sale de las aulas sin tener conciencia de que una medida de centro siempre debe estar junto a una de dispersión. Creemos que esta es una de las razones por la que cuando aparecen en los medios de comunicación medias aritméticas (salario medio, media mensual de la pensión de jubilación en un país,…) muy pocas veces aparece la media junto a la desviación típica. Solamente encontramos la media. Esta falta de cultura estadística se debe comenzar a atajar desde la escuela y la investigación didáctica.

Otra conclusión es que estas leyes han sido estudiadas por verdaderos genios y les costó muchos esfuerzo llegar a conclusiones aceptables por ellos mismos y por los demás. Sin embargo, queremos que nuestros estudiantes, adquieran un conocimiento adecuado sobre Estadística y Probabilidad sin ni siquiera esbozar unas ligeras nociones sobre la dispersión y conceptos relacionados. El mismo razonamiento podemos hacer para la investigación didáctica.

A la vista de lo expuesto anteriormente, concluimos que es necesario incluir en los programas de enseñanza y en los de investigación didáctica una clarificación adecuada de las nociones relativas a la dispersión y conceptos relacionados como sus fuentes, destacando su presencia en las actividades que se desarrollen, ya que como dice Moore, (1997, p. 150), "*La omnipresencia de la variación es admitida, pero a menudo no se explica con claridad (la simulación de un histograma en la computadora no enseña la gente de negocios como interpretar un informe financiero)*".

Bibliografía

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools. Published Doctoral dissertation.* Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute. [En línea] Recuperado el 24 de mayo de 2013, de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/04.Bakker.Dissertation.pdf

Bernouille, D. (1970). The most probable choice between several discrepant observations and formation therefrom of the most likely induction. Publicación original de 1777 en una memoria en la academia de San Petersburgo y reproducido en E. S. Pearson y M. Kendall (1970). *Studies in the History of Statistics and Probability*, (pp. 157-167). Second impression, 1978. London: Charles Griffin.

B.O.J.A. (2007). Orden de 10 de agosto de 2007, de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 30 de agosto de 2007.*

Cobb, G. W. y Moore, D. S. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104, 801-823.

Eisenhart, C. (1983). Laws of error I. Development of the concept. En S. Kotz y N. L. Johson (Eds.). *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 4, pp. 531-547. New York: John Wiley ySon Inc.

Estepa, A.; Gea, M. M.; Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2012). Algunas notas históricas sobre la correlación y regresión y su uso en el aula. *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas*, 81, pp. 5-14.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., et al. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. [En línea] Recuperado el 24 de mayo de 2013, de http://www.amstat.org/education/gaise/GAISEPreK-12_Full.pdf

Garcia Pelayo, R. (Dtr.) (1993). *Gran diccionario Español-Inglés. English – Spanish*. Barcelona: Larouse.

Garfield, J. B.; Ben-Zvi, D.; Chance, B.; Medina, E. Roseth, C. y Zieffler, A. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning. Connecting Research and Teaching Practice*. New York: Springer.

Hald, A. (1998). A History of Mathematical Statistics. From 1750 to 1930. New York: John Wiley $ Son Inc.

Kaplan, J. J., Rogness, N. T. y Fisher, D. G. (2011). Lexical ambiguity: making a case against spread. *Teaching Statistics*, 34 (2) , 56–60.

Kendall, M. G. (1978). Daniel Bernouilli on maximun likelihood. En E. S. Pearson y M. Kendall (1978). *Studies in the History of Statistics and Probability*, 155-156. London: Charles Griffin (Second impression).

M.E.C. (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 5 de enero de 2007.*

M.E.C. (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *Boletín Oficial del Estado, 6 de noviembre de 2007.*

MacGillivray, H. (2004). Coherent and purposeful development in statistics across the education spectrum. In G. Burrill, y M. Camden (Eds.), Curricular Development in Statistics Education:

International Association for Statistical Education 2004.Roundtable. (pp. 230-243). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Makar, K. y Confrey, J. (2005). "Variation-talk": Articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal, 4(1), 27-54,* http://www.stat.auckland.ac.nz/serj.

Martín-Guzmán, M. P. y Martín Pliego, F. J. (1985). *Curso básico de Estadística Económica*. Madrid: Editorial AC.

Moore, D. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of the giants: New approaches to numeracy* , 95-137. Washington, DC: National Academy Press.

Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content. The case of statistics. *International Statistical Review*, 65(2), 123-165.

Peters, S. (2011). Robust understanding of statistical variation. *Statistics Education Research Journal*, 10(1), 52-88.

Petrosino, A. J.; Lehrer, R. y Schauble, L. (2003) Structuring Error and Experimental Variation as Distribution in the Fourth Grade. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2y3), pp.131-156

Phatak, A and Robinson, G. (2005) Understanding and modelling variability: Practitioners'Perspectives. *International Statistical Institute, 55th Session*. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?show=13

Plackett, R. L. (1978). The principle of the arithmetic mean. En E. S. Pearson y M. Kendall (1978). *Studies in the History of Statistics and Probability*, 121-126. London: Charles Griffin (Second impression).

Reading, C., y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, 201-226. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. K. Lester (Editor) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol. 2, 957 – 1009. Reston, Virgina VA: NCTM.

Utts, J. M. (2005). *Seeing Trough Statistics*. Toronto: Thomson Brooks/Cole

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67 (3), 223 – 265.

Antonio Estepa Castro, nacido (13/05/1952) en Valdepeñas de Jaén (Jaén). Doctor en Matemáticas. Catedrático de Didáctica de la Matemática de la Facultad Humanidades y Ciencias de la Educación de la Universidad de Jaén. Su campo de investigación es la Didáctica de la Matemática, especialidad de Didáctica de la Estadística y la Probabilidad. Ha publicado diversos trabajos de investigación en este campo en revistas, libros y congresos. También ha realizado bastantes revisiones de trabajos de investigación para revistas y congresos importantes en dicho campo de investigación.
Universidad de Jaén.
Email: aestepa@ujaen.es

Jesús del Pino Ruiz nacido (14/05/1982) en Porcuna (Jaén). Licenciado en Física (Universidad de Granada), posee el CAP en física y química (Universidad de Granada) y ha realizado el trabajo tutelado de iniciación a la investigación en Didáctica de las Matemáticas (Universidad de Jaén) bajo la tutela de D. Antonio Estepa Castro. Su investigación se proyecta en torno a la enseñanza y aprendizaje de la dispersión. En la actualidad es profesor interino de Matemáticas en la Junta de Andalucía.
Universidad de Jaén.
Email: jpr00026@red.ujaen.es