

## Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en secundaria.

### Resumen

En este trabajo se realiza un estudio sobre el contenido estadístico en la PAU del Distrito de Canarias. Se observa que los alumnos prefieren las preguntas de Estadística, y que el uso de los gráficos en la resolución de los problemas, conlleva que obtengan calificaciones más altas. El análisis de los errores nos permite realizar ciertas propuestas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Inferencia Estadística. Creemos conveniente para la asimilación de los conceptos y el desarrollo del razonamiento estadístico el uso de las analogías, el manejo de las TICS y el trabajo de proyectos con datos reales.

### Abstract

In this work, we carry out a study about the statistical content in the PAU from the district of Canary Islands. We observe that the students prefer the questions of statistics, and that the use of the graphs in the resolution of the problems, involves that they obtain higher qualifications. The analysis of the errors allows us to suggest certain proposals to improve the process of teaching-learning of the statistical inference. We consider convenient for the assimilation of the concepts and the development of the statistical reasoning, the use of analogies, management of the TICS and the work of projects with real data.

### 1.- Introducción

Los contenidos teóricos del currículo de Bachillerato en la rama de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales han experimentado un cambio considerable, en lo que a la enseñanza de la Estadística se refiere. En éstos podemos apreciar que se ha incluido un bloque completo sobre Estadística y Probabilidad, donde se enseña al alumno el Cálculo de Probabilidades, además de las Distribuciones de Probabilidad Binomial y Normal, y algunas técnicas básicas de Inferencia Estadística, como es la Estimación y los Contrastes de Hipótesis. No obstante, creemos que esta incorporación de la Estadística a nivel de secundaria no ha sido de forma continua, estructurada y progresiva. Advertimos que falta adecuar los contenidos a los alumnos de estas edades. Parece que básicamente se han transferido los contenidos de los cursos de introducción a nivel universitario al currículo de secundaria. Así al comparar los libros de textos de las distintas editoriales que se utilizan en el bachillerato (Ramos y Espinel (2003)), se observan coincidencias con los enunciados de los problemas de los textos frecuentemente usados en los primeros cursos de Universidad (ver por ejemplo Quesada (1982); Vizmanos y Asensio (1976)).

A raíz de esta incorporación de la Inferencia Estadística, se echa en falta investigaciones para saber cómo medir el conocimiento estadístico de los alumnos no universitarios. Además, existen pocos grupos de trabajo que elaboren proyectos de enseñanza para facilitar la labor del profesorado, diseñando los materiales y tecnología más efectivos. Esta preocupación de la forma de enseñanza-aprendizaje más adecuada de esta materia, se constata en los congresos y simposios que organizan sociedades tales como la International Association for Statistical Education (IASE) a nivel internacional, o el Grupo de Estadística y Probabilidad de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) a nivel nacional. Otro aspecto a tener en cuenta en el aprendizaje de la Estadística, es su emplazamiento dentro del temario, que suele ser al final del mismo. Esto puede verse como una ventaja, debido a que los alumnos tienen los últimos conocimientos más recientes. Sin embargo, también supone una desventaja, que es la falta de tiempo para fijar los contenidos y razonarlos, y que los alumnos no están lo suficientemente motivados en la captación de los conceptos por la proximidad del examen de la PAU.

Hemos realizado un estudio sobre la actuación del alumnado al abordar cuestiones de Inferencia Estadística, mediante una revisión de los errores más comunes cometidos por éstos. Para ello, hemos seleccionado una muestra de 272 exámenes de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) de La Laguna, en la especialidad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, y en la Convocatoria de Junio de 2005. Comparando los resultados obtenidos con los de un estudio previo, llevado a cabo con los alumnos del curso anterior 2003-04 (Ramos y Espinel (2003)) y con otros estudios realizados con alumnos de primero de Universidad (Batanero (2000); Vallecillos y Batanero (1997); Moreno y Vallecillos (2005)) se ha constatado que los errores cometidos por los alumnos coinciden en gran medida. Esto nos lleva a pensar que el método de enseñanza-aprendizaje de la Estadística, no ha sido lo suficientemente adecuado y las alternativas propuestas por el sistema educativo no contemplan con suficiente intensidad los cambios tecnológicos. Por este motivo apuntamos algunas sugerencias, que puedan reparar las dificultades con las que tropieza el alumno y contribuir a una mejor comprensión de la Inferencia Estadística. Se propone entonces insistir en la componente conceptual dentro de los procedimientos estadísticos, e incorporar al proceso de la enseñanza el uso de las TICS y el trabajo de proyectos con datos reales.

En este sentido organizamos este trabajo como sigue. En primer lugar presentamos la estructura del examen de la PAU y los resultados obtenidos. A continuación se recoge un listado de los errores más frecuentes que cometen los alumnos. En la siguiente sección, se revisa detenidamente una de las preguntas de la prueba, analizando las técnicas usadas por los alumnos para resolver dicha pregunta en relación con la metodología más frecuente usada en los libros de texto. Finalizamos proponiendo algunas orientaciones con el propósito de integrarlas en el proceso de enseñanza- aprendizaje.

## 2.- Estructura de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

La estructura del examen consta de dos opciones excluyentes: Prueba A y Prueba B, cada una con cinco ejercicios. El alumno debe elegir una de las opciones y dentro de ésta resolver cuatro ejercicios.

Prueba A	Prueba B
1.- Intervalos de Confianza. 2.- Contraste de Hipótesis. 3.- Funciones. 4.- Máximos. 5.- Resolución de Ecuaciones.	1.- Cálculo de Probabilidades. 2.- Contraste de Hipótesis. 3.- Intervalos de Confianza. 4.- Funciones. 5.- Programación Lineal.
Opción elegida por 113 alumnos	Opción elegida por 159 alumnos

En esta convocatoria, como se observa en los cuadros anteriores, la prueba A se compone de dos ejercicios de Estadística (Intervalos de Confianza y Contrastes de Hipótesis), dos de Análisis (Funciones y Máximos) y uno de Ecuaciones. La prueba B tiene tres ejercicios de Estadística (Cálculo de Probabilidades, Intervalos de Confianza y Contrastes de Hipótesis), uno de Funciones y uno de Programación Lineal. La opción B con más contenidos en Estadística tiene mayor preferencia que la A por parte del alumnado, siendo 159 los que la eligieron, mientras que la A fue elegida por 113 alumnos. Dentro de la opción B, se observa que los alumnos se inclinan por las preguntas de Estadística, frente a las de Programación Lineal y Funciones, siendo ésta última pregunta la menos elegida. Igualmente en las preguntas de Estadística, los alumnos obtienen puntuaciones más altas en comparación con las de Programación Lineal y Funciones. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos tanto en lo referente a las preguntas elegidas como al porcentaje de alumnos con la pregunta aprobada. Entendiendo por aprobada el que hayan obtenido una puntuación superior a la mitad (1.25) de la puntuación máxima asignada a cada pregunta (2.5).

PREGUNTAS	ELECCIÓN	APROBADAS (= 1.25)
1.- Probabilidades	92.86 %	58.57 %
2.- Contrastes	98.57 %	72.85 %
3.- Intervalos de Confianza	91.43 %	74.28 %
4.- Funciones	20 %	1.42 %
5.- Programación Lineal	74.29 %	34.28 %

Obsérvese en la tabla anterior que los porcentajes de elección de las preguntas de Estadística es mayor que el 90%. Mientras que la pregunta menos elegida, con un 20% es la de Funciones. Señalamos también que las preguntas sobre Inferencia Estadística (Intervalos de Confianza y Contraste de Hipótesis) las aprueban más de un 70% de los alumnos.

No disponemos de una explicación fiable sobre el motivo que lleva a los alumnos a preferir la opción B. Una justificación podría ser que la materia se imparte al final del temario, con lo cual los alumnos tienen los conceptos y metodologías más recientes. También la misma estructura de la prueba, donde los alumnos saben que el contenido en Estadística es mayor que el de otros contenidos del temario, les conduce a pensar que dominando la Estadística tienen más posibilidades de aprobar. Otro motivo puede deberse a que a los alumnos del Bachillerato de Sociales, los contenidos Estadísticos les resultan más asequibles que los de Análisis Matemático, o simplemente a que la Estadística es una materia preferida en lugar de otras, una vez que se conoce. (Estrada y otros (2004)).

### 3.- Dificultades Generales de Comprensión de los Conceptos de Estadística

Las dificultades que presenta la enseñanza - aprendizaje de las Matemáticas son muy diversas (Socas (1997)). En el caso particular de la Inferencia Estadística, nociones tales como hipótesis nula y alternativa, intervalos de confianza, estadísticos del contraste y distribuciones muestrales son difíciles de entender, debido a que son conceptos abstractos, muchos de ellos basados en fórmulas, y muy distantes del lenguaje habitual o familiar del alumno.

A continuación se recoge una lista de los errores mas frecuentes que han impedido que los alumnos solucionen de forma correcta el problema y no alcancen la máxima puntuación.

- *Dificultad al entender la noción de probabilidad.*
- *Tipificación errónea de la distribución Normal.*
- *Uso incorrecto de la tabla de probabilidades de la Normal.*
- *Fallo en la aproximación de la Binomial a la Normal.*
- *Confusión entre muestra y población.*
- *Descuido ante cambios del tamaño muestral.*
- *Dificultad para discernir entre parámetro, estimador y estimación.*
- *Identificación y formulación confusa de los contrastes unilaterales y bilaterales.*
- *Intercambio del valor empírico con el valor muestral.*
- *Asignación incorrecta del nivel de confianza ( $1 - \alpha$ ).*
- *Asociación errónea del nivel  $\alpha$  y la probabilidad buscada.*
- *Interpretación errónea de las conclusiones en los contrastes.*

De manera más explícita se comentan cada uno de estos errores.

- *Dificultad al entender la noción de probabilidad*  
Los alumnos de bachillerato muestran dificultades con el concepto de número racional y con el razonamiento de proporcionalidad, lo que dificulta la comprensión de la idea de probabilidad (Fischbein (1975); Moreno y Vallecillos (2005)). Esto también se ve influenciado por la definición de probabilidad que por lo general el profesor imparte de forma abstracta. A pesar de que el concepto de probabilidad es algo muy común y natural de nuestra experiencia, no existe una única interpretación científica de la misma aceptada por todos. Las interpretaciones clásica, subjetiva y frecuentista que se han propuesto para fundamentar la probabilidad, muestran las dificultades que existen para suavizar el concepto.
- *Tipificación errónea de la distribución Normal.*  
Dentro del estudio de las distribuciones muestrales, un error muy común es la noción de tipificación de la Normal. Creemos que esta dificultad se debe a que los alumnos lo consideran como el cálculo de una expresión matemática, y no lo identifican con una transformación de la distribución Normal especificada a la distribución Normal estándar, centrada en el origen y con variación uno. Para solventar esto se pueden utilizar como soporte las representaciones gráficas de la distribución especificada y la estandarizada, con vistas a posibles comparaciones entre las mismas.
- *Uso incorrecto de la tabla de probabilidades de la Normal.*  
Otro error de más relevancia relacionado con las distribuciones muestrales, es la interpretación incorrecta de las tablas de las distribuciones. Aquí los alumnos mezclan el valor de un punto sobre la recta real con el área que deja debajo de sí la gráfica de la distribución, y que se corresponde con una probabilidad. Este tipo de error presenta cierta similitud con el observado en Geometría, donde se confunde el perímetro con el área, si bien aquí la situación es más compleja pues no pueden apoyarse en las unidades de medida. Al igual que en la tipificación, las representaciones gráficas pueden ayudar al alumno a visualizar las probabilidades y los puntos que dejan las mismas a su derecha, y así diferenciarlos.
- *Fallo en la aproximación de la Binomial a la Normal.*  
Otro fallo frecuente es el proceso de aproximar una distribución a otra, por ejemplo la de la Binomial a la de la Normal. Se equivocan en los parámetros de la distribución a la que aproximan, tal vez por que no identifican la relación que existe entre los parámetros de la Binomial y su media y varianza, sino que operan de forma automática. Además no llegan a comprender que se trata de una aproximación y no de una igualdad entre distribuciones, con lo cual no están percibiendo que una distribución es discreta y la otra continua. Esta dificultad se podría solventar mediante un proceso constructivo, donde la visualización gráfica de las distribuciones discreta y continua quede palpable.
- *Confusión entre muestra y población y descuido ante cambios del tamaño muestral.*  
La primera y tal vez más importante de las dificultades en la Inferencia Estadística, es la de distinguir

entre muestra y población. Quizás sería más indicado que el profesor recalcará más en este aspecto, estudiando la representatividad y la variabilidad de la muestra. El alumno debe asimilar que evidentemente cualquier muestra tomada de una población tendrá características similares a la población de origen, siendo más representativa cuanto más refleje las características de la población. La variabilidad de la muestra se puede estudiar poniendo de manifiesto que las muestras de una población no son todas la misma, así que no igualan a la población.

La experimentación con diferentes tamaños muestrales permite por un lado estudiar la representatividad de la muestra, y por otro, podría corregir los errores que cometen los alumnos en el cálculo de probabilidades, de medias, y de varianzas de las distribuciones, ante cambios del tamaño muestral (Moreno y Vallecillos, 2005).

- *Dificultad para discernir entre parámetro, estimador y estimación.*

El problema de discernir entre el parámetro que se estima (constante desconocida) y el estimador que se usa para ello (variable aleatoria función de la muestra), e incluso de la estimación obtenida con los datos muestrales (valor específico), viene quizás propiciado porque no distinguen entre la población y la muestra. Esto es, ante por ejemplo, la estimación de la media  $m$  (parámetro) de una población de naturaleza Normal, se podrían usar diferentes muestras, y a través de la media muestral,  $\bar{x}$  (el estimador), obtener diferentes estimaciones del parámetro (posibles valores que aportan información sobre  $m$ ).

- *Identificación y formulación confusa de los contrastes unilaterales y bilaterales, e intercambio del valor empírico con el valor muestral.*

En la formulación de los Contrastes los alumnos se encuentran con dos clases de conflictos. Por un lado, la duda ante usar un contraste de índole unilateral o bilateral, y por otro lado, la equivocación a la hora de elegir como valor empírico el valor muestral. En el primer caso, se ha comprobado que los alumnos ante la indecisión a la hora de formular un contraste unilateral, provocada en ocasiones por el enunciado del problema, optan por usar el contraste bilateral. Mientras que el segundo, surge de nuevo por la inseguridad que tienen de distinguir entre el parámetro a estimar, el estimador, la estimación (resultado de evaluar el estimador ante una muestra específica), y las afirmaciones a priori sobre posibles valores del parámetro.

- *Asignación incorrecta del nivel de confianza (1-a) y del nivel de significación a.*

Una dificultad muy común de los alumnos ante la resolución de problemas de Inferencia Estadística es la identificación del nivel de confianza denotado por  $1-a$ , en los Intervalos de Confianza, y/o la identificación del nivel de significación denotado por  $a$ , en los Contrastes de Hipótesis. Tal conflicto muchas veces se debe a que en las tablas de las distribuciones, se usa generalmente la letra griega  $\alpha$ , para denotar la probabilidad que un punto determinado de la recta real deja a su derecha, esto es, probabilidad que deja un punto crítico. Por ejemplo, cuando se trata de un contraste bilateral donde se busca la probabilidad  $\alpha/2$ , los alumnos tienden a despejar el valor de  $\alpha$ , en lugar del punto crítico directamente (asociado a  $\alpha/2$ ).

- *Interpretación errónea de las conclusiones en los contrastes.*

Además de los errores de cálculo comunes en la resolución de los problemas de Contrastes de Hipótesis, fallan en la interpretación de los resultados, debido a que no llegan a comprender la diferencia entre la región de aceptación y de rechazo. Incluso las decisiones que deben adoptar cuando el estimador cae en una región u otra, en relación con la hipótesis nula del contraste y no en relación con la hipótesis alternativa. La representación gráfica de la distribución del estimador, donde se identifique el nivel de significación, las regiones de aceptación y de rechazo, y la posición del estimador para la muestra actual, llevarían al alumno a tomar la decisión adecuada, y a asentar los conceptos teóricos.

Además de todas estas dificultades, para la resolución completa de cualquier problema estadístico también interfieren habilidades matemáticas básicas, como saber despejar en una inecuación. Un ejemplo paradigmático lo encontramos cuando deben despejar el tamaño muestral en la siguiente

$$\text{inecuación: } z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

donde las equivocaciones son frecuentes y los resultados obtenidos para el tamaño muestral pueden llegar a ser absurdos. Aún así el alumno no es capaz de volver a revisar el ejercicio.

#### **4.- Problema de Contraste de Hipótesis**

Debido al incremento del interés producido en estos últimos años sobre la Inferencia Estadística y las dificultades con las que tropiezan los alumnos, hemos llevado a cabo un análisis cualitativo de la pregunta correspondiente a los Contrastes de Hipótesis de la opción B de la Prueba Acceso a la Universidad, en el Distrito de Canarias en la Convocatoria de Junio de 2005. Esta pregunta es la que mayor aceptación ha obtenido por parte del alumnado, siendo excluida solamente por el 2% de los alumnos que han elegido la opción B. Además, un 50% de éstos alumnos obtienen la máxima nota 2.5 en la misma.

#### 4.1.- Enunciado del problema

Un informe de la asociación de Compañías Aéreas indica que el precio medio del billete de avión entre Canarias y la Península Ibérica es, como máximo, de 120 € con una desviación típica de 40 €. Se toma una muestra de 100 viajeros Canarias-Península Ibérica y se obtiene que la media de los precios de sus billetes es de 128 €.

- a).- ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación igual a 0.1 la afirmación de partida?  
b).- ¿Se concluiría lo mismo si el nivel de significación fuera del 1%?

La solución al problema, propuesta por el corrector de la PAU es la que sigue.

El contraste que hay que plantear es:

$$H_0: m = m_0 = 120$$

$$H_1: m > m_0 = 120$$

a) Región crítica:  $\left\{ \bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \bar{x} > 120 + 1.28 \frac{40}{\sqrt{100}} \right\} = \{ \bar{x} > 125.12 \}$  Se rechaza  $H_0$ .

b) Región crítica:  $\left\{ \bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \bar{x} > 120 + 2.33 \frac{40}{\sqrt{100}} \right\} = \{ \bar{x} > 129.32 \}$  No se rechaza  $H_0$ .

#### 4.2.- Técnicas utilizadas por los alumnos

El contexto del problema resulta de índole familiar para el alumnado canario y éste se puede identificar con el viajero. Tal circunstancia, junto con el hecho de que el enunciado no presenta ambigüedades verbales, cosa que puede surgir en algunos problemas de Contrastes de Hipótesis, facilitan el planteamiento del problema. Así los alumnos no tienen dificultad en formular el siguiente contraste:

$$H_0: m = m_0 = 120$$

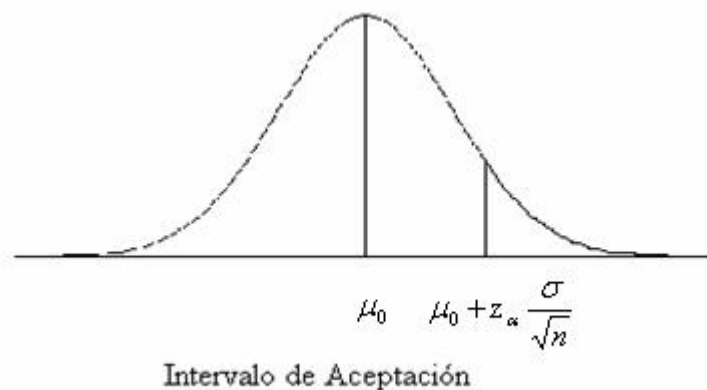
$$H_1: m > m_0 = 120$$

En cuanto al método utilizado para resolverlo, los alumnos optan por dos métodos diferentes. El más usado por parte del alumnado, tal vez por ser más frecuente en sus libros de texto, es el método basado en Intervalos. Esto es, el alumno utiliza el estimador del parámetro, en este caso la media muestral  $\bar{x}$ , obtiene una estimación de la misma, y calcula el Intervalo de Aceptación para dicho parámetro, a través de la expresión:

$$\left( -\infty, \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Además muchos de los alumnos representan tal intervalo con la distribución de la Normal de media  $m_0$  y

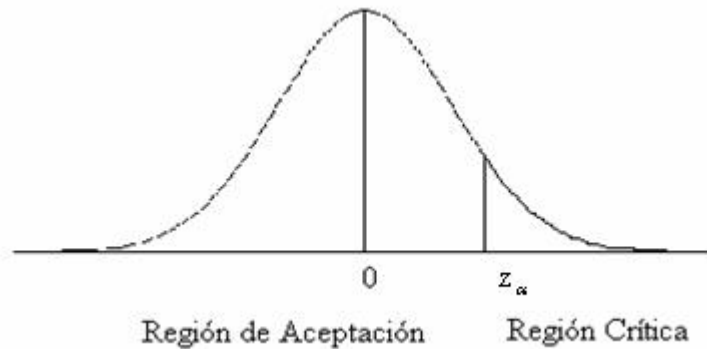
desviación típica  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  y posicionan el valor que toma la media muestral. Para así concluir aceptando o rechazando la hipótesis nula en función de si la media cae dentro o no del intervalo. Dicha visualización facilita la comprensión del problema a la hora de tomar la decisión final.



En el segundo método, los alumnos prefieren calcular el valor que toma el estadístico del contraste, esto es,

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

A partir de aquí se construye la región crítica del contraste, que viene dada por  $(z_{\alpha}, +\infty)$ , y que muchos representan en la distribución Normal estándar. Por último examinan si el valor del estadístico cae dentro o no de la región crítica. En caso afirmativo, rechazan la hipótesis nula y en caso contrario, la aceptan. Este segundo método denominado método de la cantidad pivotal o estadístico del contraste, es el utilizado en la enseñanza universitaria.



### 4.3.- Observaciones

El tratamiento que se da a la Inferencia Estadística en los libros de texto de secundaria, se apoya en trabajar situaciones concretas, y a partir de ellas descubrir el concepto. En este sentido la complejidad conceptual del Contraste de Hipótesis es muy difícil obtenerla solamente con los ejemplos, y es por ello, que los libros de texto siguen un procedimiento paso a paso para resolver los contrastes. Los alumnos que han realizado el problema anterior, la mayoría siguen el método basado en Intervalos y las pautas de los libros de texto, anotando las distintos pasos para la resolución.

Un aspecto a resaltar, es el hecho de que los alumnos que se apoyan en las representaciones gráficas de la distribución Normal, tanto en este problema como en los de cálculo de Probabilidades, obtienen mejores resultados en sus notas. En el caso de este problema, el 39 % utilizó dichos gráficos y de éstos un 59 % obtuvo la máxima nota. Esto nos hace pensar (Ramos y Espinel (2003)) que la visualización gráfica proporciona al alumno una mayor comprensión de los conceptos y del desarrollo metodológico. Como consecuencia aprenden a interpretar correctamente el problema, además de permitirles extraer conclusiones adecuadas.

Cabe señalar de este ejercicio de Contrastes de Hipótesis, el cambio de nivel de significación de un apartado a otro, planteado para observar como influye el nivel de significación en la decisión a tomar. No obstante, hemos de decir que en estos casos, en los que el estadístico está próximo al punto crítico y un cambio de nivel puede hacer que pasemos de rechazar a aceptar la hipótesis nula, los alumnos suelen equivocarse en la operatoria, o simplemente al redondear, obtienen un valor del estadístico que permanece en la región crítica y su decisión no cambia, como cabría esperar.

### 5.- Reflexiones sobre la Enseñanza de la Estadística

Un conocimiento de los errores mas frecuentes supone una gran ayuda para el profesor de secundaria, ya que le proporciona información de cómo los alumnos asimilan el problema y las técnicas que utilizan para alcanzar la solución. El análisis de tales errores permite plantear propuestas generales y específicas para mejorar la enseñanza-aprendizaje de la Inferencia Estadística. La revisión de los exámenes de la PAU pone de manifiesto que aunque ciertos conceptos estadísticos son de difícil comprensión para los alumnos de estas edades, éstos no rechazan la Estadística. De hecho, muchos de ellos aplican técnicas adecuadas a la hora de resolver los problemas. No obstante, existen diversos errores presentados en la sección 3, en los que los alumnos reinciden de forma habitual. Errores que coinciden en su mayoría con los detectados en un curso de introducción a la Estadística a nivel universitario (Batanero (2000); Vallecillos y Batanero (1997)). Con el objetivo de prevenir tales dificultades se proponen algunos cambios en la enseñanza de la Inferencia Estadística no universitaria. A continuación apuntamos una metodología que podría resultar más apropiada para desarrollar en el alumno habilidades estadísticas. En particular la propuesta incluye un desarrollo metodológico en tres vertientes:

1. Uso de Analogías en el desarrollo de los contenidos teóricos.
2. Manejo de las TICS.
3. Trabajo con Proyectos Estadísticos.

Comentamos estas tres vertientes.

1. La piedra angular de la enseñanza en cualquier área es el desarrollo de una estructura teórica que le dé sentido. Sin embargo, como todos sabemos el aprendizaje de la Estadística requiere la asimilación de muchos conceptos nuevos alejados de otros campos de las matemáticas. Como consecuencia es muy difícil motivar a los estudiantes para ir más allá del vocabulario y enfocar el proceso de enseñanza en desarrollar un pensamiento estadístico comprensible. Además los alumnos tienen algunas preconcesiones acerca de esta disciplina, que reducen su confianza a la hora de entenderla. En este sentido, se propone el uso de las analogías como una herramienta eficaz ya que permite a los estudiantes aprender intuitivamente. Por un lado, las analogías sirven de puente entre situaciones familiares y situaciones nuevas, y por otro, permiten representar ideas abstractas en términos de estructuras concretas o físicas. El éxito de las analogías depende por supuesto de la comprensión de los estudiantes de las situaciones familiares, y del argumento que extrae similitudes entre las dos situaciones.

El uso de analogías en la enseñanza de conceptos estadísticos no es ciertamente nuevo. Tal vez el ejemplo más conocido es la semejanza de un Contraste de Hipótesis con un proceso delictivo, en el que la presunción de inocente juega el papel de asumir la verdad de la hipótesis nula. Esta analogía originaria de Feinberg (1971), está relacionada con una descripción particular de los errores del Tipo I y Tipo II en el contraste, donde se muestra que el error de Tipo I es más importante que el error de Tipo II. Además permite un acercamiento a la aproximación basada en probabilidades del contraste. Posteriormente, numerosos autores la han utilizado en textos de cursos introductorios de Estadística.

La analogía judicial para los contrastes de hipótesis es bastante propicia, ya que muchas de las facetas de los procesos legales tienen un elemento equivalente en el procedimiento estadístico. Los elementos importantes se pueden resumir en el siguiente cuadro:

Proceso Delictivo	Test de hipótesis
El demandado es inocente	Hipótesis nula
El demandado es culpable	Hipótesis alternativa
Recogida de evidencias	Recogida de datos
Resumen de evidencias	Cálculo del estadístico
La deliberación del jurado y decisión	Aplicación de la regla de decisión
Veredicto	Decisión
El Veredicto es declarar inocente	Aceptar la hipótesis nula
El Veredicto es declarar culpable	Rechazar la hipótesis nula
Presunción de inocente	Asumir que la hipótesis nula es verdad
El arresto de una persona inocente	Error de tipo I
El remordimiento de una persona culpable	Error de tipo II
Probabilidad alta de encerrar a un culpable	Potencia alta

Las analogías como una herramienta cognitiva permite la comprensión de situaciones nuevas como en este caso los Contrastes de Hipótesis, construyendo modelos basados en conocimientos existentes de escenarios familiares, como es el proceso legal. La nueva situación es completamente diferente al dominio habitual, pero las relaciones entre los elementos del nuevo escenario son muy parecidas a las relaciones compartidas por los elementos del dominio familiar. En este sentido, se habla de una analogía adecuada no sólo cuando existe similitud entre los elementos del dominio familiar y de la nueva situación (vínculos superficiales), sino que existe una gran similitud a nivel de las relaciones existentes entre dichos elementos en ambas situaciones (vínculos estructurales). Los vínculos superficiales tienden a reforzar la memoria y los vínculos estructurales tienden a reforzar el entendimiento y la comprensión, y a permitir el desarrollo de nuevo conocimiento.

2. La segunda propuesta para el desarrollo metodológico consiste en integrar las nuevas tecnologías al proceso de enseñanza aprendizaje. Así la incorporación del ordenador supone el desarrollo de la

materia en dos sentidos. Por un lado, el manejo de los paquetes estadísticos, que tienen como finalidad el análisis de datos, y por otro, el uso de los applets, pequeños programas interactivos escritos en java, que permiten cambios en el significado que para los alumnos pueden llegar a adquirir algunos conceptos y procedimientos.

Aunque en la actualidad la disponibilidad de los applets es muy abundante y hay unas grandes expectativas puestas en los mismos, existe una baja integración en las clases de Matemáticas. Si bien es cierto que faltarían unos criterios que unifiquen cómo deberían ser los mismos y que garanticen una enseñanza integrada y efectiva, como se recoge en DelMas y Garfield (2003); Godino y otros (2006). De todas formas pensamos que su uso puede resultar beneficioso ya que mediante éstos se pueden corregir algunos de los errores más comunes que cometen los alumnos. Así por ejemplo:

- Los applets dedicados al cálculo de probabilidades como representan la distribución de probabilidad estudiada, permiten identificar las áreas con las probabilidades, y los puntos críticos con los valores en la recta, lo que conlleva un manejo adecuado de las tablas de distribución.

- Los applets sobre Contraste de Hipótesis ayudan a distinguir la bilateralidad y la unilateralidad de los contrastes. Además la representación de las regiones críticas y de aceptación permite observar que aquellos valores del estimador del parámetro próximos al valor empírico conducen a la aceptación de tal valor, y los alejados lo rechazan. De esta forma los estudiantes eligen la decisión adecuada sobre el contraste de forma razonada y sencilla.

Dentro de los applets distinguimos entre los que su finalidad es resolver un problema mediante la aplicación de una técnica Estadística, y aquellos otros que tratan de visualizar un concepto determinado, ver por ejemplo los applets sobre análisis de distribuciones muestrales y variabilidad del IBAD de Las Palmas

([http://www.ibad-laspalmas.com/cei\\_archivos/cei.htm](http://www.ibad-laspalmas.com/cei_archivos/cei.htm)).

Recursos de esta índole procedentes de instituciones oficiales se pueden citar, a nivel internacional el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (ver

<http://illuminations.nctm.org/tools/index.aspx>), y a nivel nacional el Proyecto Descartes del Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa (MECD) (ver <http://descartes.cnice.mecd.es>).

También a nivel particular se puede encontrar diverso material para la enseñanza de la Estadística en Ciencias Sociales como es la página web,

[http://www.ibad-laspalmas.com/cei\\_archivos/cei.htm](http://www.ibad-laspalmas.com/cei_archivos/cei.htm).

3. Volviendo al método de enseñanza tradicional, hemos de indicar que éste es expositivo. En las clases de Estadística se hace énfasis en los conocimientos conceptuales y en los procedimientos. Esto colabora poco en la comprensión de las ideas estadísticas como pueda ser la variabilidad de los datos. Por ello algunos investigadores consideran que sería más adecuado desarrollar el razonamiento estadístico (*Statistical Reasoning*) (DelMas y Garfield (2003)). El razonamiento estadístico implica conectar un concepto a otro, por ejemplo centro y amplitud, y combinar ideas acerca de los datos y el azar. Esto supone conocer y ser capaz de explicar un proceso estadístico, además de interpretar completamente resultados estadísticos. Por este motivo, nuestra última vertiente propone que el currículo contemple la realización de proyectos estadísticos, donde el alumno pase por las distintas fases: plantear el problema, recoger, organizar y analizar los datos, y extraer conclusiones en relación al problema planteado. En este sentido el Instituto Canario de Estadística (ISTAC) en colaboración con la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton (SCPM) tratan de incentivar esta línea de trabajo en las aulas, con proyectos como el concurso escolar que muestra la siguiente página: <http://www.sinewton.org/concursoistac>. Este tipo de proyectos ayudarían al alumno a desarrollar el razonamiento estadístico, entendido como un proceso de ayuda a la comprensión de los datos (Moore 1995).

Actualmente algunos profesores a nivel universitario trabajan por llevar a cabo una enseñanza de este tipo, donde se enlaza con problemas reales próximos a su línea de estudio, en los que se analizan las distintas fases de un estudio estadístico. Así como ejemplo podemos citar la siguiente página web del profesor Varón López de la Universidad de Málaga:

[http://campusvirtual.uma.es/est\\_fisio/apuntes/](http://campusvirtual.uma.es/est_fisio/apuntes/).

#### **Bibliografía**

- Batanero, C., Godino, J.D., Green, D.R. Holmes, P. y Vallecillos A. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Batanero C. (2000). Controversies around the role of Statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning* 2(1-2), 75-98.
- DelMas, R. y Garfield, J. (2003). The Web-based ARTIST: An online Resource for the Assessment of instructional Outcomes. *Joint Statistical Meetings*.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la Estadística en profesores en



- formación y en ejercicio. *Enseñanza de la Ciencia*, 22(2), 263-274.
- Feinberg, W. E. (1971). Teaching the Type I and II errors: the judicial process. *The American Statistician*, 25, 30-32.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. D.Reidle: Dordrecht.
- Godino, J.D., Recio, A.M., Roa, R. Ruiz F. y Pareja, J.L. (2006). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. *Números*, 64, 1-17.  
[http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/investigacion\\_01.htm](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/investigacion_01.htm)
- Martín M.A. (2003). "It's like...you know": The use of Analogies and Heuristics in Teaching Introductory Statistical Methods. *Journal of Statistics Education*, 11(2).  
<http://www.amstat.org/publications/jse/v11n2/martin.html>
- Moore, D. (1995). *Estadística Aplicada Básica*. Antoni Bosch Editor. Barcelona.
- Moreno, A. J. y Vallecillos, A. (2005) La Inferencia Estadística Básica en la Enseñanza Secundaria. *International Statistical Review*. Aceptado para publicación.
- Quesada, V., Isidoro, A., López, L.A. (1982). *Cursos y Ejercicios de Estadística*. Alhambra Universidad. Madrid.
- Ramos R. y Espinel C. (2003). Estimación Estadística: Algunas dificultades observadas en la PAU. *Actas de las XI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico (coordinador) *La educación Matemática en Enseñanza Secundaria*. 12 ICE. Universitat de Barcelona.
- Vallecillos A. y Batanero C. (1997). Conceptos activados en el Contraste de Hipótesis Estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(1), 29-48.
- Vizmanos, J.R. y Asensio, R. (1976). Curso y ejercicios de Bioestadística. *Centro de Promoción Reprográfica, Madrid*.
- Instituto de Bachillerato a Distancia (IBAD). Las Palmas de Gran Canaria. (2001).  
[http://www.ibad-laspalmas.com/cei\\_archivos/cei.htm](http://www.ibad-laspalmas.com/cei_archivos/cei.htm)
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000).  
<http://illuminations.nctm.org/tools/index.aspx>.
- Apuntes de Bioestadística de la Universidad de Málaga (2006).  
[http://campusvirtual.uma.es/est\\_fisio/apuntes/](http://campusvirtual.uma.es/est_fisio/apuntes/).
- Proyecto Descartes de Innovación en el área de Matemáticas, para la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. Ministerio de Educación y Ciencia. (2004).  
<http://descartes.cnice.mecd.es>
- Sociedad Isaac Newton. Concurso Escolar para trabajos Estadísticos en colaboración con el Instituto Canario de Estadística (ISTAC). (2001). <http://www.sinewton.org/concursoistac>

#### Autoras

Autora: María Candelaria Espinel Febles  
Departamento de Análisis Matemático.  
Facultad de Matemáticas. Universidad de La Laguna  
Avenida Francisco Sánchez, s.n.  
38271. La Laguna. Tenerife

Autora: Rosa María Ramos Domínguez  
Departamento de Estadística e Investigación Operativa I  
Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.  
Plaza de Ciencias 3  
28040 MADRID

Autora: Carmen Elvira Ramos Domínguez  
Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación.  
Facultad de Matemáticas. Universidad de La Laguna  
Astrofísico Francisco Sánchez s/n  
38271 La Laguna. Tenerife