Problemas Comntados

A cargo del Club Matemático

Habíamos prometido presentar algunos problemas resueltos por alumnos para tratar de ver cómo expresan su pensamiento y, sobre todo, cómo mejora con la práctica el modo de abordar la resolución y la presentación de sus razonamientos.

El tratamiento sistemático y ordenado como método para afrontar un problema, es algo que se puede aprender desde edad temprana, pero ¿cómo enseñarlo?

Traemos un ejemplo, ya anunciado, de cómo una alumna ha seguido este proceso al participar en el concurso de problemas que uno de nosotros viene organizando en su centro. Esta alumna, Carolina Brito Díaz, comenzó cuando estaba en 2º de la ESO y continuó luego en 3º y 4º.

"Comprando melocotones" (nº 12 del 2000-2001). Mostramos la solución que dio al problema número 12 del curso 2000 – 2001, uno de los problemas planteados a lo largo del curso. Para ello utiliza una metodología basada en proporciones; hace el proceso con 10 kg de melocotón y obtiene 12 de mermelada, primera de las cuestiones, y luego tabula los distintos pesos y procedimientos, procediendo desde el final hacia el comienzo: parte de la relación 3/12 y retrocede hasta el número de kg de melocotones necesarios, 2'5/10, pero no es consciente de ello y por eso puede "rellenar" la tabla *por dos métodos*: mediante "dibujos" y mediante "ecuaciones".

I.E.S. "TOMÁS DE IRIARTE"

CONCURSO DE PROBLEMAS DE INGENIO

CURSO 2000-2001

Fecha: del 23 al 27 de abril

Nombre: Carolina Apellidos: Brito Abs. Curso: 2º E

PROBLEMA Nº 12:

Compramos 10 kg de melocotones para hacer mermelada. Al deshuesarlos y pelarlos se pierde 1/5 de su peso. Lo que queda se pone a cocer con una cantidad igual de azúcar. Durante la cocción la mezcla pierde 1/4 de su peso. ¿Cuántos kg de mermelada se obtienen?

Si yo quisiera obtener 3 kg de mermelada, ¿cuántos kg de melocotón necesitaría?

DIAGRAMA:

RAZONAMIENTO:

$\frac{1}{5}$ de 10 Kg = 2 Kg se pierden. $\frac{1}{4}$ de 16 Kg (melocotón + azúcar). 4Kg se pierden en la cocción. Nos quedan 12 Kg de mermelada. Para calcular la cantidad de Kg de melocotones que hacen falta para 3 Kg de mermelada, hacemos el proceso al revés:

Mermelada	Mezcla	Azúcar	Meloc. sin hueso	Meloc. enteros
3 Kg	4	2	2	2'5
12 Kg	16	8	8	10

$\frac{3}{4}$ de $x = 3$; $\frac{3x}{4} = 3$; $3x = 12$; $x = \frac{12}{3}$; $\boxed{x = 4}$

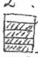
$\frac{4}{5}$ de $x = 2$; $\frac{4x}{5} = 2$; $4x = 10$; $x = \frac{10}{4}$; $\boxed{x = 2'5}$

Hay 2 formas de calcular la tabla.

1º: Ecuaciones:

$\frac{4}{5}$ de $x = 8$; $4x = 40$; $\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{40}{4}$; $\boxed{x = 10}$

2º: Dibujos: Ejemplo con los 12 Kg:



8 Kg $\frac{8}{4} = 2$; en $\frac{1}{5}$ hay 2 Kg.

3 Kg; en $\frac{1}{4}$ hay 1 Kg

Los 3 Kg: $\frac{4}{4} \to 4$ Kg.

2 Kg en $\frac{1}{5}$ hay $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Kg

$5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2'5$ Kg.

RESPUESTA: 1) Se obtienen 12 Kg de mermelada.

2) Necesitaría 2'5 Kg de melocotón

"Completa el producto" (nº 11 del 2001-2002). Para el problema número 11 del curso 2001 – 2002, iniciando el segundo trimestre, un problema de lógica y propiedades de los múltiplos, su explicación es más sistemática y ordenada. De hecho, ella considera su respuesta como fruto de un razonamiento. Así, en un primer ataque al problema, sustituye los asteriscos que son más evidentes colocando el 5 de las unidades de la suma y del tercer producto.

En el tercer paso no considera la posibilidad de que el 7, que ella hace provenir de 2 + 3 + 2, pudiese ser de 2 + 3 + 1 y llevase una de la columna anterior. Más adecuado hubiera sido colocar el 3 para obtener 1 + 3 = 4 y luego probar para el multiplicando 325 y para el 315. Pero la intuición la conduce por este otro camino; se da cuenta de que el multiplicador debe ser impar, desecha 1, 3 y 5, y prueba con 7 y 9, obteniendo que no puede ser 9. Luego considera que la cifra central del multiplicador debe ser par, desechando 6, 8 y "0" y se queda con el l4, verificando el resultado

I.E.S. "TOMÁS DE IRIARTE"

CONCURSO DE PROBLEMAS DE INGENIO

CURSO 2001-2002

Fecha: del 21 al 25 de enero

Nombre: Carolina Apellidos: Brito Alas Curso: 3º E.S.O. A nº 5

PROBLEMA Nº 11:

Completa el producto:

```
      *  *  5
x     1  *  *
-------------
   2  *  *  5
1  3  *  0
*  *  *
-------------
4  7  7  *  *
```

~~DIAGRAMA~~:

Bajamos el 5.

Bajamos el 5 x 1.

Para que la suma sea 7; 2+3+2.

RAZONAMIENTO:

Entonces, como no nos llevamos, va un 3.

Ya tenemos los de arriba.

Posibilidades para la cifra de la dcha del multiplicador: ~~1~~/~~3~~/~~5~~/7/9

Tenemos:

Probamos a completar la del 9.

No se puede por la cifra del medio.

Pasamos entonces al 7.

Posibilidades de la cifra del centro: ~~2~~/4/~~6~~/~~8~~/~~0~~

¡¡Era el 7!!

```
   3 2 5
 x 1 4 7
---------
 2 2 7 5
1 3 0 0
3 2 5
---------
4 7 7 7 5
```

RESPUESTA:

```
   3 2 5
 x 1 4 7
---------
 2 2 7 5
1 3 0 0
3 2 5
---------
4 7 7 7 5
```

"Los sacos de papas" (nº 22 del 2001-2002). En cuanto al problema nº 22, recordamos a nuestros lectores que es el que propusimos en el nº 50 de *NÚMEROS*. Su solución es semejante a la presentada por nosotros en el *NÚMEROS* siguiente.

Encuentra que hay diez combinaciones ("posibilidades") que hace corresponder con las diez sumas diferentes aportadas en el enunciado.

Comprueba que cada saco aparece en cuatro combinaciones y sólo en cuatro. Por ello, la suma de las diez pesadas, 516 kg, dividida entre 4 es lo que pesan los cinco sacos: 129 kg.

Supone que A+B es 46 y D+E es 57, las pesadas menor y mayor (¿Otra vez la intuición?).

Razona que C = 26, y va deduciendo los pesos de los otros cuatro sacos. No explica por qué es D = 30 y E = 27, y no D = 27 y E = 30. En este problema 22 da por entendidos algunos pasos; no es tan explícita como en los otros ejemplos que mostramos hoy.

I.E.S. "Tomás de Iriarte"

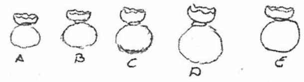
CONCURSO DE PROBLEMAS DE INGENIO
Curso 2001-2002
Fecha: del 13 de mayo al 17 de mayo

Nombre: Carolina Apellidos: Brito Alas Curso: 3º ESO. [A] nº 5

PROBLEMA Nº 22:
Un agricultor tenía cinco sacos de papas y pidió a su hijo que los pesara para llevarlos al mercado.
El hijo, estudiante de matemáticas, los pesó de dos en dos de todas las maneras posibles.
Las pesadas que obtuvo fueron: **46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56** y **57** kg.

¿Cómo averiguó el peso de cada saco? ¿Cuánto pesa cada saco?

DIAGRAMA:



RAZONAMIENTO:

A − B   A − C   A − D   A − E
B − C   B − D   B − E
C − D   C − E
D − E

Todos los sacos son distintos porque hay 10 posibilidades y me dan 10 datos distintos.

A → 4
B → 4
C → 4
D → 4
E → 4

La suma de todas las pesadas: 516 kg.

516 : 4 = 129

A + B + C + D + E = 129

A + B = 46
D + E = 57

46 + C + 57 = 129
C = 26
46 + 26 + 57 = 129

A + B = 46
A + C = 48
B + C = 50
D + E = 57
...

A	B	C	D	E
22	24	26	30	27

RESPUESTA: Lo averiguó así:

A = 22
B = 24
C = 26
D = 30
E = 27

"Círculos en el triángulo" (nº 23 del 2001-2002). En este problema, Carolina comienza por analizar las condiciones de partida y, de una manera muy simple, presenta las distintas ternas de números (1, 5, 9; 2, 5, 8; 3, 5, 7; 4, 5, 6) que deben ocupar los vértices. Sorprende la claridad y sencillez de su pensamiento. El aprendizaje realizado al resolver los problemas anteriores, le permite presentar sus resultados con el máximo de razonamiento y el mínimo de elementos escritos. Explora cada solución y encuentra las seis que se indicaban en la nota anexa.

No resulta fácil, para alumnos de esta edad y formación, poner en marcha con orden y claridad la exhaustividad necesaria para observar que dos de las ternas solamente dan una solución cada una, mientras que las otras dos ternas ofrecen dos soluciones distintas para cada una.

Y tampoco es frecuente que, una vez resuelto el problema, se plantee generalizar las soluciones y analizar las variantes que se producen utilizando simetrías a partir de los puntos medios de los lados. Naturalmente, esto dio lugar a discusiones acerca de si realmente eran soluciones diferentes o no. Los criterios usados en la discusión se centraban en aspectos geométricos de simetría en los triángulos y de conmutatividad de la operación suma. Según se defendiese una u otra postura, variaba la conclusión. Sólo el hecho de producirse la discusión y basarse en criterios matemáticos impulsó la resolución de problemas en la clase hacia derroteros mucho más interesantes de lo habitual.

3,5

I.E.S. "Tomás de Iriarte"

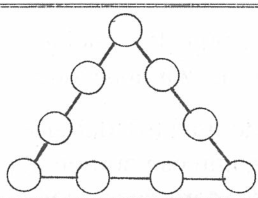
CONCURSO DE PROBLEMAS DE INGENIO
Curso 2001-2002
Fecha: del 3 de junio al 7 de junio

Nombre: Carolina Apellidos: Brito Alas Curso: 3º ESO A nº 5

PROBLEMA Nº 23 y ÚLTIMO:
En los círculos de este triángulo coloca las nueve cifras significativas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9), de forma que la suma de cada lado sea 20.

NOTA: Hay seis soluciones. Busca todas las que puedas. La primera que encuentres tiene un punto; por cada una más que presentes sumarás medio punto.

DIAGRAMA:



RAZONAMIENTO: Los lados tienen que sumar 20+20+20=60; pero la suma de todas las cifras que tengo que poner da 45, así que las cifras de los vértices, que son los que se repiten, tienen que sumar 15. Comencé a probar todas las posibilidades para que sumasen 15. Luego iba viendo lo que me faltaba y completé. Obtuve lo siguiente:

9	8	8	7	6	6
4 7	6 7	4 9	6 9	8 7	7 9
2 3	1 3	3 1	2 1	1 3	2 1
5 86 1	5 94 2	5 76 2	5 84 3	5 92 4	5 83 4
CORRECTO	CORRECTO	CORRECTO	CORRECTO	CORRECTO	CORRECTO

Si en cada solución cambiamos el orden de los números centrales salen muchas más soluciones. Por ejemplo:

9	9	9	9	9	
4 7	4 3	2 3	2 7	7 4	
2 3	2 7	4 7	4 3	3 2	ETC.
5 68 1	5 68 1	5 68 1	5 86 1	1 86 5	

Son la misma solución; sólo cambia la simetría.

RESPUESTA:

En nuestro "Problemas comentados" publicado en el volumen 52 de *NÚMEROS* nos lamentábamos de no poder hacer un seguimiento de alumnos que, como ésta, muestran una trayectoria, un aprovechamiento de las enseñanzas, que nos compensarían en algo esas sensaciones y experiencias que conducen día a día al "síndrome del profesor quemado".

Habíamos propuesto en el número anterior dos ejercicios, relacionados entre sí, que tienen que ver con propiedades de los números. He aquí nuestras soluciones. ¿Por qué no envías las tuyas?

Problema 12.

Sea la serie de números: 969, 486, 192, 18, 8. Observa que en ella cada término es el resultado del producto de los dígitos del término anterior. El 969 origina en cuatro pasos el número 8. ¿ Qué número es el menor que en cuatro pasos da como término final 6?

DIAGRAMA:

El esquema del ejemplo es el siguiente:

969 → 9x6x9 = 486 → 4x8x6 = 192 → 1x9x2 = 18 → 1x8 = 8

Cuatro pasos son cuatro multiplicaciones, es decir, cinco números.

Como conocemos el resultado final, la solución será encontrar el primer número, por lo tanto debemos utilizar una estrategia de IR HACIA ATRÁS.

Para ello, conocido el resultado final (6), debemos buscar todas las multiplicaciones posibles que originan ese número a partir de su descomposición en factores primos; descartaremos aquellas que utilicen como factores números no dígitos (de más de una cifra); buscaremos las distintas combinaciones entre esos dígitos; buscaremos los que permitan dar el siguiente paso empezando por los menores; una vez encontrado el primero descartaremos todos los mayores; y volvemos a empezar con el nuevo número.

RAZONAMIENTO:
Primer paso
6 = 1x6 → 16, 61
6 = 2x3 → 23, 32

Segundo paso
16 = 2x2x2x2 → 4x4, 2x8, 2x2x4, 2x2x2x2
61 primo (descartado)
23 primo (descartado)
32 = 2x2x2x2x2 → 4x8, 2x4x4, 2x2x8, 2x2x2x4, 2x2x2x2x2

4x4 → 44
2x8 → 28, 82
2x2x4 → 224, 242, 422
2x2x2x2 → 2222
4x8 → 48, 84
2x4x4 → 244, 424. 442
2x2x8 → 228, 282, 822
2x2x2x4 → 2224, 2242, 2422, 4222
2x2x2x2x2 → 22222

Tercer paso
28 = 2x2x7 → 4x7 → 47, 74
44 = 2x2x11 (descartado)
48 = 2x2x2x2x3 → 6x8 → 68, 86
82 = 2x41 (descartado)
84 = 2x2x3x7 (descartado para dos factores)

47 primo (descartado)
68 = 2x2x17 (descartado
74 = 2x37 (descartado)
86 = 2x43 (descartado

Una vez probados y descartados los números de dos cifras habrá que volver atrás y trabajar con los nueve números de tres cifras que habíamos dejado momentáneamente.

224 = 2x2x2x2x2x7 → 4x7x8 → 478, 487, 748, 784, 847, 874
228 = 2x2x3x19 (descartado)
242 = 2x11x11 (descartado)
244 = 2x2x61 (descartado)
282 = 2x3x47 (descartado)
422 = 2x211 (descartado)
424 = 2x2x2x53 (descartado)
442 = 2x221 (descartado)
822 = 2x3x137 (descartado)

478 = 2x239 (descartado)
487 primo (descartado)
748 = 2x2x11x17 (descartado)
784 = 2x2x2x2x7x7 → 2x7x7x8, 4x4x7x7
847 = 7x11x11 (descartado)
874 = 2x437 (descartado)

Cuarto paso

Como estamos en el último paso basta con elegir el número más pequeño que se origine como combinación de 2x7x7x8 o de 4x4x7x7, es decir, el número 2778.

Comprobación:
2778 → 2x7x7x8 = 784 → 7x8x4 = 224 → 2x2x4 = 16 → 1x6 = 6

RESPUESTA:
El menor número que en cuatro pasos da como término final 6 es el 2778.

Problema 13

De entre los nombres de los primeros números hay dos que contienen, en conjunto, diez letras diferentes. Éstos se utilizan escritos ordenados uno a continuación del otro, para generar una clave donde cada letra se asocia a una cifra de un número cuadrado perfecto. Su raíz cuadrada es un capicúa, que cifrado es OTATO, ambos números son múltiplos de tres, diecisiete y diecinueve, y son divisibles por ZIZ. Hallar el código.

Los números a los que se refiere son CUATRO Y DIEZ, en ese orden, pues cualquier otro grupo de nombres de números contiene letras repetidas o no contiene diez letras.

Por el enunciado sabemos que:

$$CUATRODIEZ = OTATO^2$$

siendo ***OTATO*** divisible por ***ZIZ***, número de tres cifras y no pudiendo ser la letra ***O*** un cero.

Por ser un cuadrado perfecto, ***Z*** no puede ser 2, ni 3, ni 7, ni 8 y tampoco 0, lo que nos deja 1, 4, 6 ó 9.

Al ser divisible por 3, por 17 y por 19, estos son factores del número, y al ser primos entre si, ***OTATO*** $=3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot xy = 969 \cdot xy$ ya que el otro factor de ***OTATO*** debe ser de dos cifras, sea primo o no, pues los números obtenidos al multiplicar 969 por número mayores que 99 no generan capicúas con 5 cifras.

Deducimos también que 969, uno de los números usados para ejemplificar el otro problema propuesto en este mismo artículo, es ***ZIZ***.

Dado que ***OTATO*** es capicúa y divisible entre 969, también capicúa, el número xy podría ser cualquiera entre 11 y 99, con las condiciones de no contener un 6 ni un 9 ni un 0 y entre ellos el único que genera un número capicúa es 37, siendo entonces ***OTATO*** = 3 · 13 · 17 · 37 = 35 853 y su cuadrado es:

$$35\ 853^2 = 1\ 285\ 437\ 609$$

que responde al supuesto del enunciado: cuadrado perfecto que contiene las diez cifras.

Estableciendo ahora la correspondencia con ***CUATRODIEZ*** tenemos:

C	*U*	*A*	*T*	*R*	*O*	*D*	*I*	*E*	*Z*
1	2	8	5	4	3	7	6	0	9

Para los interesado en cuadrados curiosos y propiedades de los números cuadrados, que pueden sugerir aplicaciones didácticas, una dirección interesante es:

www.shyamsundergupta.com/fsquare.htm

Y para no cambiar de costumbre, tenemos algunos nuevos problemas que proponerles. Ahí van:

Problema 14

Juanito compra lápices de colores a 18 céntimos cada uno; al cabo de un rato vuelve a comprar más, y esta vez el dueño de la papelería, en vista de que es tan buen cliente, se los deja a 17 céntimos cada uno. En total, Juanito se gasta en los lápices 351 céntimos. ¿Cuántos lápices ha comprado?

Problema 15

Tenemos una balanza y cinco pesas, respectivamente de 3, 6, 8, 12 y 16 gramos. Queremos pesar cantidades comprendidas entre 1 y 33 gramos (ambas inclusive); sin embargo, hay una (y sólo una) cantidad que no podremos pesar, con las cinco pesas de que disponemos en una única pesada. ¿Cuál es la pesada imposible?

Proponemos con el problema que sigue

otra píldora, mezcla de propiedades de las cifras, examen exhaustivo, intuición,

...

Problema 16

En un número de siete cifras (formado con el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), la suma de cada pareja de cifras sucesivas es siempre igual a la suma de la primera pareja o a la suma de la última. Encuentra al menos tres soluciones. (Inspirado en "Pitagora si diverte", de Bruno Mondadori.)

Y aquí queda todo de momento. Hágannos caso. Escriban mensajes a esta sección y cuenten sus soluciones y experiencias o, si lo prefieren, propongan sus propios problemas. Como siempre, esperamos sus noticias a la espera del próximo *NÚMEROS*.

Club Matemático.
El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y Manuel García Déniz, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife).
mgarciadeniz@sinewton.org / jaruperezpadron@sinewton.org