

## **ESTRATEGIA ÓPTIMA DE REEMPLAZAMIENTO DE UN SISTEMA DE FALLOS REPARABLES Y TASA DE PRODUCCIÓN VARIABLE**

P. Saavedra-Santana , J. J. González-Henríquez y A. Santana-del-Pino

Departamento de Matemáticas. Universidad de las Palmas de Gran Canaria.

35017. Las Palmas. Gran Canaria. España

### **ABSTRACT**

A system setting composed by a main structure and a subsystem which produces items is considered. A failure in the main structure may produce a random damage in the subsystem and the production decays at random. At each failure, a minimal repair is just possible in the main structure. For a cost structure, we propose an optimal replacement strategy. Finally, a simulation study of an example is carried out.

**KEY WORDS:** Optimization, minimal repair, replacement policy

### **RESUMEN**

Se considera un sistema formado por una estructura principal y otra secundaria productora de ítems. Un fallo en la estructura principal puede producir una disminución de la producción en el subsistema productor de ítems. Los fallos en la estructura principal son los únicos que pueden ser reparados mínimamente. Para una estructura fija de beneficios, se determina la estrategia óptima de reemplazamiento del sistema y se muestra un estudio de simulación de un ejemplo.

**PALABRAS CLAVE:** Optimización, reparaciones mínimas, estrategia de reemplazamiento.

## 1. INTRODUCCIÓN

Gran parte de los trabajos publicados sobre sistemas reparables asumen que cuando tras una avería se repara un equipo, éste queda en el mismo estado que si fuese nuevo. Tal hipótesis permite elaborar modelos tratables desde el punto de vista matemático, pero resultan poco verosímiles en la práctica. Ascher y Feingold [1] consideran sistemas cuyo estado, después de una reparación, es idéntico al estado inmediatamente anterior a la ocurrencia del fallo. Los modelos en los que se asume esta hipótesis reciben el nombre de modelos de reparaciones mínimas. Brown y Proschan [3] consideran también modelos de reparaciones mínimas en sistemas de fiabilidad. Block, Borges y Savits [2] estudian un sistema en el que no siempre es posible la reparación mínima, siendo la probabilidad de que tal reparación sea posible dependiente de la edad del equipo. Stadjc y Zuckerman [6] consideran un sistema para el que los sucesivos periodos durante los que está operativo son estocásticamente decrecientes, mientras que los tiempos que duran las reparaciones crecen en un sentido estocástico. Dagpunar y Jack [4] estudian también sistemas de reparaciones mínimas con periodos de reparación no nulos.

Una característica común a todos estos trabajos es que las distintas estrategias de mantenimiento se analizan exclusivamente en sistemas con una única estructura. Sin embargo, cuando se consideran sistemas compuestos por varios subsistemas con distintas funciones, surgen nuevos problemas en la determinación de la estrategia óptima de mantenimiento. En el presente trabajo se considera un equipo formado por una estructura principal y un subsistema que se encarga de la producción de ciertos ítems. La duración de la estructura principal del equipo hasta la primera avería, sigue una distribución de probabilidad con razón de fallo creciente, siendo siempre posible la realización de reparaciones mínimas. No obstante, cada fallo de la estructura principal puede deteriorar el subsistema de producción, de tal forma que la tasa residual de producción de ítems disminuye aleatoriamente después de cada fallo. El subsistema, por su parte, no es reparable, y por

tanto la tasa de producción sólo puede restaurarse a su valor inicial mediante el reemplazamiento del equipo.

De acuerdo con esta descripción, cualquier estrategia admisible de reemplazamiento deberá tener en cuenta no sólo la edad del equipo sino también su tasa residual de producción de ítems, que supondremos observable después de cada fallo. No obstante, si este valor no fuese directamente observable, podría sustituirse por alguna estimación adecuada del mismo. En los epígrafes siguientes determinaremos la estrategia óptima de reemplazamiento de este sistema para una cierta estructura de costes y beneficios, y probaremos que, bajo condiciones específicas, el reemplazamiento del equipo se lleva a cabo casi seguramente en tiempo finito. Por último analizaremos un caso particular de sistema con estas características, obteniendo una aproximación de la regla óptima de reemplazamiento.

## 2. EL MODELO

Consideramos un equipo cuya duración hasta la ocurrencia del primer fallo es una variable aleatoria  $X$  de razón de fallo creciente (IFR), siendo  $S(t) = P(X > t)$  su función de supervivencia. Suponemos que tras cada fallo es siempre posible efectuar una reparación mínima que se realiza de forma instantánea. Llamaremos  $\{X_n\}$  a las duraciones de los sucesivos periodos entre reparaciones mínimas consecutivas,  $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$  el tiempo transcurrido hasta el  $n$ -ésimo fallo ( $T_0 = 0$ ), y  $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{[0,t]}(T_n)$  al proceso de recuento de fallos, siendo  $I_E$  la función indicatriz del conjunto  $E$ . Bajo estas condiciones  $\{N(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson con función de medias  $\Lambda(t) = E[N(t)] = -\ln(S(t))$  (Block, [3]). Asimismo, suponemos que durante el periodo comprendido entre los fallos  $i-1$  e  $i$ -ésimo, el equipo produce ítems a una tasa  $r_i$ , tomando la tasa

inicial siempre un valor fijo  $r_1$ , y siendo  $\{r_i\}$  una sucesión aleatoria no creciente casi seguramente. Por último, consideramos que cada ítem producido reporta un beneficio  $B$ , cada reparación mínima tiene un coste  $C$  y la sustitución por un equipo nuevo un coste  $D$ .

Representamos por  $Y_1$  el instante en el que, por primera vez, se reemplaza el equipo por otro nuevo de las mismas características. Si con los sucesivos equipos se adopta siempre la misma política de mantenimiento, la sucesión de periodos de reemplazamiento  $\{Y_n\}$  constituye un proceso de renovación. Llamemos  $Y_\xi$  a la variable aleatoria genérica que representa la duración de un periodo de renovación cuando se utiliza la estrategia de mantenimiento  $\xi$ . Si representamos por  $R(t)$  el rendimiento total del sistema hasta el instante  $t$ , los argumentos clásicos de la teoría de la renovación (Ross, [5]) garantizan que el rendimiento por unidad de tiempo a largo plazo verifica:

$$\frac{R(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{c.s.} \frac{E[R(Y_\xi)]}{E[Y_\xi]}$$

Así pues, para conocer el rendimiento por unidad de tiempo a largo plazo de este sistema, resulta suficiente estudiar su rendimiento medio durante un periodo de renovación. Por ello, para decidir la estrategia de mantenimiento óptima utilizaremos como función de utilidad el cociente:

$$(2.1) \quad \psi(\xi) = E[R(Y_\xi)] / E[Y_\xi],$$

Las distribuciones de probabilidad tanto de la duración del periodo de renovación  $Y_\xi$  como del rendimiento  $R(Y_\xi)$  obtenido durante este periodo, quedarán determinadas por la estrategia de reemplazamiento  $\xi$  elegida. Deduciremos a continuación la expresión de la función de utilidad (2.1) en el modelo considerado.

Para ello, y como es habitual en los modelos de reparaciones mínimas, asumiremos que después de cada reparación la supervivencia del equipo es independiente del número de fallos y subsiguientes reparaciones realizadas hasta ese momento. Por tal motivo, la estrategia óptima de reemplazamiento deberá depender del tiempo de supervivencia hasta el siguiente fallo y no de los fallos anteriores. Como además cada fallo del sistema afecta a la tasa de producción de ítems  $\{r_n\}$ , la estrategia óptima dependerá también de la tasa de productividad residual en el instante inmediatamente posterior a la avería. Resulta claro, además, que con la estructura de beneficios y costes  $(B, C, D)$  considerada, la sustitución del equipo debe realizarse en algún instante de fallo  $T_n$ .

El estado del sistema en el  $v$ -ésimo instante de fallo queda completamente especificado por el vector  $(T_v, r_{v+1})$ . El proceso  $\{(T_v, r_{v+1})\}_{v \geq 0}$  es un proceso markoviano con valores en  $[0, \infty) \times [0, \infty)$ . De acuerdo con lo indicado en el párrafo anterior, la estrategia de mantenimiento óptima deberá basarse en este proceso. Como ya se ha señalado, no procede realizar la sustitución entre dos fallos consecutivos, por lo que las reglas de sustitución admisibles consisten en efectuar el reemplazamiento en algún instante de fallo  $v$ , cuando el sistema se encuentra en el estado  $(T_v, r_{v+1})$ . Denotaremos por  $\Gamma$  al conjunto de dichas reglas. Si una regla  $\xi \in \Gamma$  dispone la sustitución del equipo cuando el sistema está en el estado  $(T_v, r_{v+1})$ , el valor de la función de utilidad (2.1) es:

$$(2.2) \quad \psi(\xi) = \frac{B \cdot E \left[ \sum_{i=1}^v r_i \cdot (T_i - T_{i-1}) \right] - C \cdot (E[v] - 1) - D}{E[T_v]}$$

Es inmediato observar que  $\psi$  está acotada superiormente dado que  $r_n \leq r_1, \forall n$  casi seguramente y por tanto  $\psi(\xi) \leq B \cdot r_1$ , para cualquier regla  $\xi \in \Gamma$ . Sea entonces:

$$(2.3) \quad \psi^* = \sup_{\xi \in \Gamma} \psi(\xi)$$

Una estrategia  $\xi^*$  es entonces óptima si:

$$(2.4) \quad \psi^* = \psi(\xi^*)$$

Deduciremos en el siguiente epígrafe la forma de la estrategia óptima  $\xi^*$ .

### 3. DETERMINACIÓN DE LA ESTRATEGIA ÓPTIMA

La determinación de la estrategia óptima se basa en el llamado beneficio marginal esperado (Stadje y Zuckerman, [6]). Dado que la estrategia óptima debe consistir en hacer el reemplazamiento en algún instante de fallo, se define el beneficio marginal esperado si no se reemplaza el equipo en un instante de fallo como la diferencia entre el beneficio esperado hasta el siguiente fallo menos el beneficio óptimo esperado en el mismo periodo. Más concretamente, si el sistema alcanza el estado  $(T_v, r_{v+1})$ , el beneficio marginal esperado si no se reemplaza el equipo es:

$$(3.1) \quad B \cdot r_{v+1} \cdot E[T_{v+1} - T_v | (T_v, r_{v+1})] - C - \psi^* \cdot E[T_{v+1} - T_v | (T_v, r_{v+1})]$$

Sustituir en el siguiente estado  $(T_{v+1}, r_{v+2})$  es mejor estrategia que sustituir en el estado actual si el beneficio marginal esperado (3.1) es estrictamente mayor que cero. Además, puesto que la sucesión  $\{r_n\}$  es no creciente y  $X$  es IFR, si sustituir en  $(T_v, r_{v+1})$  es mejor que sustituir en  $(T_{v+1}, r_{v+2})$ , también será obviamente mejor que sustituir en  $(T_{v+k}, r_{v+k+1})$ , para cualquier valor de  $k$  mayor que

uno. Por tanto, la estrategia óptima de reemplazamiento es sustituir cuando el sistema alcance el estado  $(T_{v^*}, r_{v^*+1})$ , siendo:

$$(3.2) \quad v^* = \min\{v; (B \cdot r_{v+1} - \psi^*) \cdot g(T_v) \leq C\}$$

donde  $g(T_v) = E[T_{v+1} - T_v | (T_v, r_{v+1})]$ .

La siguiente proposición especifica la forma de  $g(T_v)$ .

**Proposición.**  $g(T_v) = E[T_{v+1} - T_v | (T_v, r_{v+1})] = \frac{1}{S(T_v)} \int_{T_v}^{\infty} S(t) dt$ .

La demostración es inmediata.

Supondremos a continuación que la distribución del tiempo de supervivencia del equipo (periodo transcurrido hasta el primer fallo) es absolutamente continua, siendo  $f(t)$  su función de densidad. En tal caso existe la correspondiente función de riesgo, que puede expresarse como  $\lambda(t) = f(t)/S(t)$ . Obsérvese que  $\lambda(t)$  es además la función de intensidad del proceso  $N(t)$  correspondiente al número de reparaciones mínimas realizadas dentro de un periodo de renovación. La hipótesis IFR significa que esta función es no decreciente. Cabe preguntarse en este punto cuál es la probabilidad de que el óptimo de la función de utilidad empleada no se alcance en tiempo finito, lo que significaría que la máquina no se reemplaza nunca, solventándose todos los fallos siempre mediante reparaciones mínimas. El siguiente teorema prueba bajo determinadas condiciones que con probabilidad 1,  $v^*$  es finito, lo que supone que el reemplazamiento de la máquina se realiza en tiempo finito casi seguramente.

**Teorema.** Supongamos que la distribución de  $T_1$  es tal que  $E[T_1] < \infty$ ,  $\lambda(t)$  es no decreciente y

$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$ . Supongamos además que  $P(r_n \leq K, \forall n) = 1$  para algún  $K$ . Bajo estas condiciones,

$$P(v^* < \infty) = 1.$$

*Demostración.*  $\{v^* = \infty\} = \{(B \cdot r_{n+1} - \psi^*) \cdot g(T_n) > C; \forall n\}$ . Ahora bien, dado que  $\{T_n\}$  son

los instantes de salto de un proceso de Poisson con función de intensidad  $\lambda(t)$ ,  $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \infty$ , lo que

supone que  $S(T_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} 0$ . Además,  $E[T_1] = \int_0^{\infty} S(t) \cdot dt < \infty$ , por lo que  $\int_t^{\infty} S(z) \cdot dz \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ .

$$\text{Sea } \phi(t) = \frac{S(t)}{\int_t^{\infty} S(z) \cdot dz} - \lambda(t). \text{ Dado que } \phi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \text{ entonces } \phi(T_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} 0.$$

Tenemos por tanto:

$$\frac{S(T_n)}{\int_{T_n}^{\infty} S(z) \cdot dz} = \phi(T_n) + \lambda(T_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \infty \quad \Rightarrow \quad g(T_n) = \frac{1}{S(T_n)} \cdot \int_{T_n}^{\infty} S(z) \cdot dz \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} 0. \quad \text{Dado que}$$

$P(r_n < K, \forall n) = 1$  para algún  $K$ ,  $(B \cdot r_{n+1} - \psi^*) \cdot g(T_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} 0$ . Se tiene entonces que

$\limsup P((B \cdot r_{n+1} - \psi^*) \cdot g(T_n) > C) = 0$ , lo que implica que  $P(v^* = \infty) = 0$ .

Obsérvese que el teorema sólo exige a la sucesión  $\{r_n\}$  que esté acotada con probabilidad uno. Naturalmente esto ocurre cuando la sucesión es casi seguramente decreciente y  $r_1$  es una cantidad fija.

Analizaremos a continuación algunos casos en los que la función de riesgo  $\lambda(t)$  no converge a infinito.



El caso de  $\lambda(t) = \lambda_0, \forall t$  corresponde a una duración hasta el primer fallo exponencialmente distribuida y por tanto en este caso el proceso de reparaciones mínimas  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson homogéneo. Si la sucesión de tasas de producción  $\{r_n\}$  es casi seguramente no creciente y  $r_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} r_\infty$ , se tiene entonces:

$$(3.3) \quad (B \cdot r_{n+1} - \psi^*) \cdot g(T_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} (B \cdot r_\infty - \psi^*) / \lambda_0$$

Si  $r_\infty = 0$  con probabilidad uno, obviamente,  $P(v^* = \infty) = 0$ . Sin embargo, si  $r_\infty$  es tal que  $P((B \cdot r_\infty - \psi^*) / \lambda_0 > C) > 0$ , con esta misma probabilidad el instante de reemplazamiento no se alcanza en tiempo finito.

Para el caso en el que  $\lambda(t)$  es IFR, pero  $\lambda(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \lambda_0 < \infty$ , puede hacerse un análisis análogo al caso exponencial, que sintetizamos en el siguiente corolario.

**Corolario.** Supongamos que la distribución de  $T_1$  es tal que  $E[T_1] < \infty$ ,  $\lambda(t)$  es no decreciente y

$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda_0$ . Supongamos además que  $r_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} r_\infty$ . Entonces :

$$P(v = \infty) = P((B \cdot r_\infty - \psi^*) / \lambda_0 > C),$$

#### 4. ANÁLISIS DE UN CASO PARTICULAR.

Presentamos a continuación, a modo de ejemplo el análisis mediante simulación de un caso particular del modelo propuesto. Hemos considerado para la duración del equipo hasta el primer fallo una distribución de Weibull con parámetros  $\rho=0.01$  y  $k=1.4$  ( $\lambda(t) = \rho \cdot k \cdot t^{k-1}$ ), lo que significa

que el proceso de fallos es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad  $\lambda(t)$ . Las sucesivas cantidades  $r_i$  pueden interpretarse como el número de elementos operativos del sistema en el periodo comprendido entre  $T_{i-1}$  y  $T_i$ . Cada uno de estos elementos produce un ítem por unidad de tiempo, por lo que  $r_i$  puede identificarse con la tasa de producción del sistema. Supondremos que  $r_1=100$ . En cada instante de fallo se ha supuesto que la probabilidad de que uno de estos elementos quede improductivo es  $p=0.025$ . Por tanto, si la tasa de producción en el periodo comprendido entre  $T_{i-1}$  y  $T_i$  es  $r_i$ , la tasa de producción en la etapa siguiente,  $r_{i+1}$ , es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros  $n = r_i$  y  $p=0.975$ . Finalmente hemos supuesto la estructura de costes  $B=1$ ,  $C=5$  y  $D=900$ .

La trayectoria  $\{(T_i, r_{i+1}), i = 1, \dots, v\}$  es observable en cada instante de fallo  $v$ . A partir de estos datos calculamos el rendimiento empírico del sistema por unidad de tiempo como:

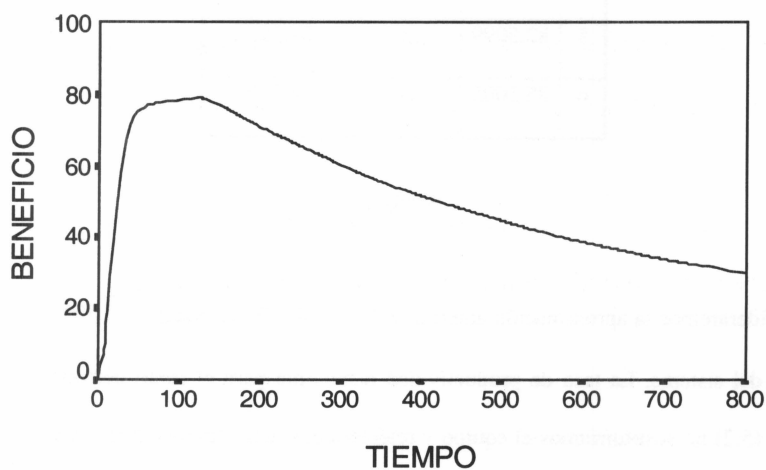
$$(4.1) \quad \eta(v) = \frac{B \cdot \sum_{i=1}^v r_i \cdot (T_i - T_{i-1}) - C \cdot (v-1) - D}{T_v}$$

Se han realizado diez simulaciones del modelo y en cada una de ellas se ha determinado la etapa en que (4.1) alcanza el máximo. La figura 1 muestra la gráfica de la función  $\eta(v)$  correspondiente a una de las simulaciones, donde puede observarse como ésta alcanza un máximo único.

La tabla 1 da los resultados correspondientes a las 10 simulaciones del modelo, donde se especifica la etapa  $v$  en la que  $\eta(v)$  es máxima, el instante  $T_v$  y el valor de  $\eta(v)$ .

Simulación	Etapa ( $v$ )	Tiempo ( $T_v$ )	Rendimiento ( $\eta(v)$ )
1	4	113.981	87.009
2	8	105.79	82.6963
3	5	94.829	86.0111
4	8	70.429	80.7845
5	7	97.138	86.6129
6	6	110.678	88.5458
7	8	108.859	82.1799
8	5	75.172	83.6706
9	8	77.322	77.3227
10	6	85.1005	84.5292

**Tabla 1**



**Figura 1**

En la tabla 1 puede observarse la notable variabilidad de las etapas  $v$  en las que  $\eta(v)$  alcanza el máximo, así como de los correspondientes instantes  $T_v$ . Esta variabilidad es mucho menor para los rendimientos óptimos por unidad de tiempo. El coeficiente de variación para los valores de  $T_v$  es 0.1707 mientras que para los de  $\eta(v)$  es 0.0398. Podemos dar una estimación del rendimiento óptimo  $\psi^*$  determinado en (3.3) mediante la media de los valores de  $\eta(v)$ . A partir de 100000 simulaciones obtenemos que  $\psi^* \approx 85.143$ . En este caso, una aproximación de la función  $g(t)$  que aparece en (3.5) es  $g(t) = \int_0^\infty S(z) dz / S(t) \approx 1/\lambda(t) = 1/(\rho k t^{k-1}) = 100/(1.4 \cdot t^{0.4})$ . La regla de parada óptima consiste en sustituir en la etapa  $v^*$  tal que:

$$(5.2) \quad v^* = \min\{v; r_{v+1} \leq \psi^* + 0.7 \cdot t^{0.4}\}$$

Así por ejemplo, para la simulación número 10, los resultados correspondientes a las etapas de fallo 5 y 6 se dan en la tabla 2:

$v$	$T_v$	$r_{v+1}$	$\eta(v)$
5	82.5099	91	84.3867
6	85.1005	84	84.5292

**Tabla 2**

Consideraremos la aproximación anterior  $\psi^* = 85.143$ . En el instante 82.5099 se produce el quinto fallo del sistema. La tasa de productividad disponible para el sexto periodo es  $r_6 = 91$ . De acuerdo con (5.2) no sustituiríamos el equipo y realizaríamos una reparación mínima. El siguiente

fallo se produce en el instante  $T_6=85.1005$  y la tasa disponible de productividad para el siguiente periodo es  $r_7=84$ . El segundo miembro de (5.2) tiene ahora el valor 89.2837, que ya supera a la tasa de productividad disponible (84), lo que significa que es ahora cuando debe sustituirse el equipo por otro nuevo.

## 5. CONCLUSIONES

Las estrategias de reemplazamiento para diversos modelos de fiabilidad están ampliamente estudiadas en la literatura. Sin embargo, cuando un sistema está formado por varios subsistemas, surgen nuevos problemas en relación con la determinación del instante óptimo de sustitución. En la estructura principal del sistema analizado en este trabajo es siempre posible la realización de reparaciones mínimas. Sin embargo, los fallos producidos en ésta afectan a un subsistema encargado de la producción de ítems. Cada vez que se produce un fallo en la estructura principal del sistema, puede inspeccionarse el subsistema y observarse la tasa residual de producción de ítems. Para la estructura de costes considerada, se ha determinado la estrategia óptima de reemplazamiento y las condiciones bajo las cuales dicha estrategia dispone el reemplazamiento con probabilidad uno en tiempo finito. Se analizan algunas situaciones especiales en las que el óptimo no se alcanza en tiempo finito. La estrategia óptima depende del rendimiento óptimo  $\psi^*$  del sistema. Dado que su determinación es en general compleja, pueden obtenerse aproximaciones simulando el modelo en cada situación concreta. En cada simulación se calcula el rendimiento empírico del sistema como función de la etapa de reemplazamiento. En todos los casos, esta función aparece con un único máximo, cuyo valor usamos como aproximación al rendimiento óptimo. Destacamos el bajo coeficiente de variación de tales rendimientos empíricos (0.0398), por lo que la media de dichos valores constituye una estimación razonable del rendimiento óptimo teórico  $\psi^*$ .

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ascher, H. and Feingold, H. (1979). Comments on Models for Reliability of Repaired Equipment. *IEEE Trans. Reliability R-19*, 119.
- [2] Block, H., Borges, W. and Savits, T. (1985). Age-Dependent Minimal Repair. *J. Appl. Prob.* **22**, 370-385.
- [3] Brown, M. and Proschan, F. (1983). Imperfect Repair. *J. Appl. Prob.* **20**, 851-859.
- [4] Dagpunar, J. and Jack, N. (1993). Optimizing System Availability Under Minimal Repair with Non-Negligible Repair and Replacement Times. *J. Opl Res. Soc.* **44**, 1097-1103.
- [5] Ross, S.M. (1983). *Stochastic Processes*. Wiley, New York.
- [6] Stadje, W. and Zuckerman, D. (1990). Optimal Strategies for Some Repair Replacement Models. *Adv. Appl. Prob.* **22**, 641-656.