NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 86, julio de 2014, páginas 79-94

Las demostraciones en la didáctica de las Matemáticas. Una experiencia con alumnos de 3º ESO

Enrique Sánchez Freire (Instituto de Educación Secundaria Luis García Berlanga.España)
Juan Antonio Gil Pascual (Facultad de Educación–Universidad Nacional de Educación a Distancia. España)

Fecha de recepción: 23 de septiembre de 2013
Fecha de aceptación: 4 de abril de 2014

Resumen En este artículo mostramos la opinión de diferentes autores sobre la conveniencia o no de la utilización de demostraciones matemáticas en su didáctica. Complementaremos esta fundamentación teórica con los resultados de una experiencia de aula en donde comprobaremos como a un grupo en donde se aplicó una metodología en la cual los procesos de argumentación y demostración tuvieron una especial relevancia obtuvo mejores resultados en torno a ciertas variables que otro grupo en donde se aplicó una metodología más tradicional.

Palabras clave Educación Matemática – Didáctica de las Matemáticas – Educación Secundaria – Demostraciones – Experiencia en el aula

Abstract In this article we show the judgment suggested by some authors about the convenience or inconvenience of using mathematical proofs while teaching. We will complete this theoretical dissertation with some experimental data obtained in the classroom. We will compare the results obtained by a class group following a teaching methodology based upon mathematical accuracy, reasoning and demonstration versus a class group using a more traditional teaching approach. The comparison of the two groups shows how the first group obtained better results around some of the variables considered.

Keywords Mathematical Education – Didactics of Mathematics – Secondary Education – Mathematical Proofs – Class Experience

1. Introducción

La didáctica de las Matemáticas está renovándose constantemente. Van apareciendo nuevos elementos que son estudiados para recomendar o no su utilización con el objetivo de mejorar los procesos de aprendizaje de los alumnos.

Dentro de estos elementos podemos citar a las demostraciones. No cabe duda de que ocupan un lugar primordial en la historia de las Matemáticas ya que han otorgado a esta ciencia de una de sus características principales: el rigor. No obstante, la conveniencia o no de su utilización didáctica ha supuesto, y de hecho sigue suponiendo, un arduo debate entre los investigadores.

Así, por ejemplo, Polya (1945) apoyaba el uso de las demostraciones, en especial de las geométricas, para que el alumno no perdiera la ocasión de saber lo que es un razonamiento lógico riguroso. Sin embargo, en las décadas de los 70 y los 80 se impusieron las ideas de Lakatos (1976) que incidían en el hecho de que la demostración de una conjetura lleva consigo una serie de explicaciones que hace que esta se haga cada vez más plausible y se enriquezca, mientras que el rigor absoluto presiona a la conjetura con la búsqueda de contraejemplos hasta llegar a falsearla. En el plano didáctico, mantenía esta misma idea de considerar inconveniente el trabajar con demostraciones ya que su utilización dificultaba la construcción del conocimiento matemático, sobre todo en los alumnos que no estudiaban para ser matemáticos y que en su gran mayoría no estaban preparados para apreciar la belleza de las demostraciones y motivarse para realizarlas. En la misma línea, Kline (1981) planteó una serie de argumentos para defender su postura contraria al uso didáctico de las demostraciones:

a) Muchos matemáticos han descubierto teoremas de una gran importancia que luego no han sabido demostrar.
b) Al dar demasiada importancia al rigor, se pueden alejar las Matemáticas de los estudiantes al parecer que sus resultados provienen de personas con un alto nivel intelectual que razonan directamente con teoremas y axiomas.
c) No son procedimientos útiles para solucionar problemas cotidianos.
d) Los planteamientos deductivos pueden resultar motivadores para cierto perfil del profesorado, pero son anestésicos para la gran generalidad del alumnado.

El debate sobre el uso de la demostración en el aula se acrecentó en los inicios de la década de los 90 con la entrada en las aulas de las nuevas tecnologías y de demostraciones realizadas con estos medios como la de Appel y Haken del problema de los cuatro colores, ya que algunos investigadores promulgaban la idea de sustituir razonamientos lógicos-deductivos por trabajos utilizando medios informáticos que permitían confirmar en un gran número de casos una determinada conjetura. El clima era tal, como indica Alcolea (2002), que Zeilberger, con la idea de desprestigiar la demostración matemática, relacionó su importancia con el valor económico. Consiguió demostrar utilizando el ordenador la conjetura de Goldbach[1] con una probabilidad mayor que 0,9999 y estimó que la certeza absoluta vendría a costar sobre 10 billones de dólares, preguntándose si realmente sale rentable alcanzar dicho estatus. Incluso se llegó anunciar que se dejarían de publicar demostraciones en revistas de la talla de Scientific American.

No obstante, poco a poco fueron apareciendo investigadores que mostraban posturas más intermedias e incluso favorables al uso de la utilización didáctica de las demostraciones. Así, podemos citar a Solow (1987) que definía la demostración como un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que hablaba el mismo idioma. Achacaba la dificultad en la comunicación de las demostraciones a la falta de una metodología adecuada que explicara la forma de hacerlo. Él mismo elaboró dicho manual estableciendo un lenguaje común en el que pudieran comunicarse profesores y alumnos. También podemos citar a De Villiers (1993) que propuso un modelo en el que dotaba a la demostración de una serie de funciones como la explicación, la verificación, la síntesis o el descubrimiento, permitiendo descubrir las posibilidades que tendría su introducción en la didáctica de las Matemáticas.

La tendencia iba cambiando y el debate se fue enfocando hacía cómo trabajar con la demostración en el aula. Hanna (1995) afirmó que un aspecto importantísimo de la demostración es la forma en la que se le presenta a los alumnos. No debe hacerse como un puro ritual propio de las Matemáticas, sino como un procedimiento con "razón de ser" dentro del aprendizaje. En la misma línea, Ibañes y Ortega (1997) argumentaron que el pensamiento deductivo se debe ir construyendo progresivamente en los distintos cursos, sin llegar a pretender que se alcance de una forma sólida en la Educación Secundaria.

[1] La conjetura de Goldbach es un problema que se encuentra aún abierto y que afirma que todo número par mayor que dos se puede expresar como la suma de dos números primos.

En los últimos años la tendencia sigue siendo la misma con alguna excepción como la de Pluvinge (2007) que defiende que la demostración no es constitutiva de la actividad matemática, poniendo como ejemplo la matemática árabe, rica en algoritmos y resultados, pero pobre en demostraciones.

Entre los partidarios, podemos citar a Bravo, Arteaga y Sol (2001) que afirman que el trabajo con demostraciones ayuda a desarrollar procesos como la abstracción, el análisis, la síntesis, la clasificación, la particularización, la comparación o la generalización. También destacan como ayuda a desarrollar formas de pensamiento extralógico (pensamiento creativo, heurístico, especulativo, etc.) que se complementan con el pensamiento lógico deductivo en la resolución de problemas. Destaca, de igual modo, que al trabajar con las demostraciones el alumno adquiere un mayor conocimiento del enunciado matemático lo que le permite adquirir competencias para identificar con mayor facilidad contextos en los que se puede aplicar el enunciado estudiado.

Mencionaremos también a Crespo y Ponteville (2005a, 2005b) que sitúan la problemática de la situación en que el docente, por lo general, desconoce las diferencias entre qué es demostrar, qué es saber demostrar y qué es aprender a demostrar. Esto, unido a la falta de referencias explícitas en los planes de estudio, conduce a que se confundan el enfoque que deben tener las demostraciones en el aula y se lleve a una excesiva formalización.

Por último, mencionaremos a Martinón (2009) que considera que para que las Matemáticas formen intelectualmente al alumno es imprescindible que se presenten de una forma racional y no como un misterioso conjunto de reglas de obligado cumplimiento. Entiende que la demostración es la cumbre de la argumentación racional y por eso debe tener cabida de una forma explícita en los currículos escolares.

Nuestra opinión en torno a esta cuestión está en la línea de las últimas que hemos indicado. Creemos que utilizando correctamente la demostración y los procesos argumentativos y de justificación en el aula se pueden mejorar las capacidades de los alumnos para resolver diversas situaciones matemáticas. Lo importante es cómo emplear correctamente estos recursos. Para ello, creemos que lo primero que habría que hacer es un plan de formación de profesorado en el que se expliquen los aspectos básicos de estos procedimientos (como introducirlos, qué proposiciones demostrar, métodos, etc). Esta idea va en la línea de lo propuesto por Azcárate (1997):

> Si queremos transformar la escuela y las prácticas que en ella se desarrollan en torno al conocimiento matemático hacia formas más coherentes con el desarrollo integral del individuo, es imprescindible poner en cuestión la actual formación de los profesores de Matemáticas. Ellos son los verdaderos gestores del cambio. El problema fundamental gira, por tanto, en torno a las formas de adecuar esa formación a los cambios demandados por la sociedad y la necesidad de afrontarlos con el rigor y fundamentación necesarios.

Después, creemos que es de vital importancia la progresividad de todo este proceso. Se puede empezar en los últimos cursos de la Educación Primaria, a partir de conjeturas, elaborando simples procesos elementales de justificación y de pruebas, para, a partir de ahí, ir evolucionando en este tipo de procedimientos. Por último, también creemos que estos procedimientos deben tener una cabida más explícita en los currículos de Matemáticas. Deberían marcar la progresividad que hemos indicado, mostrando qué tipos de pruebas y qué métodos se pueden hacer en cada etapa educativa.

Para confirmar esta idea realizamos una experiencia en el aula con dos grupos de alumnos de 3º ESO que detallamos a continuación.

2. Experiencia de aula

2.1. Planteamiento del problema

El problema consistió en comprobar si aplicando una didáctica de las Matemáticas para un curso de 3º ESO en donde se le dé un papel relevante a las demostraciones y argumentaciones matemáticas se mejoran las habilidades de los alumnos en torno a tres variables: la calificación final de la asignatura, los resultados obtenidos por los alumnos en la prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables[2] y los resultados en una prueba de problemas que le pasamos en la parte final del curso.

2.2. Proceso de la investigación

La investigación se realizó en el instituto público Rafael Alberti de Coslada (Madrid) a lo largo del curso académico 2011 – 2012. Utilizamos dos grupos de 3º ESO, los dos con 21 alumnos, considerando uno como grupo de control y otro como experimental.

En el grupo control aplicamos una metodología que podríamos llamar más tradicional basada en explicaciones, realización de ejercicios, actividades TIC, etc. Esto no quiere decir que no realizáramos argumentaciones y justificaciones de resultados, sino que no hicimos tanto hincapié en este hecho como en el otro grupo. En el grupo experimental utilizamos una metodología en donde le dimos una especial relevancia a argumentar y a justificar resultados a cambio de reducir el número de ejercicios a realizar en cada unidad didáctica y de suprimir alguna actividad con las nuevas tecnologías.

Con el grupo experimental dejamos que trabajaran los alumnos con las demostraciones de una forma independiente. La idea era que pensaran primero por ellos mismos si eran capaces de demostrar un cierto resultado. Si no eran capaces, se les remitía a algún documento donde se podría consultar para que intentaran comprender los pasos o era explicada directamente por el profesor.

A lo largo del curso, además de priorizar procedimientos argumentativos, realizamos algunas demostraciones. Estas fueron elegidas por estar íntimamente ligadas al currículo de 3º ESO para la Comunidad de Madrid. De ellas, algunas suponen una ampliación del currículo y otras simplemente son una justificación de los procedimientos que se utilizan en este curso. En el grupo control solo trabajamos las demostraciones que estuvieran íntimamente ligadas al currículo de 3º ESO y que les supusieran a los alumnos unas destrezas interesantes para resolver ejercicios de este curso.

A continuación pasamos a comentar brevemente las demostraciones trabajadas a lo largo del curso en el grupo experimental, indicando algunos comentarios los resultados obtenidos en clase.

1. **Demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$ por reducción al absurdo**. Esta demostración clásica se trabajó únicamente en el grupo experimental en la Unidad Didáctica de *Principales conjuntos numéricos* cuando tratamos los números irracionales y los radicales. Al ser una demostración de cierta dificultad para el nivel en el que estamos y que no está relacionada propiamente con ningún procedimiento del curso se decidió no trabajarla en el grupo control.

   Como es lógico, una vez propuesta la demostración, a ningún alumno se le ocurrió inicialmente hacerla por el método de reducción al absurdo, método desconocido para ellos

[2] La prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) es una prueba externa que realiza la Comunidad de Madrid cada año en el curso de 3º ESO en las materias de Matemáticas y Lengua y Literatura.

hasta la fecha. Lo que sí se consiguió es que un gran porcentaje de alumnos comprendiera y expusiera la demostración clásica una vez consultada en medio digitales.

La principal dificultad que se encontró a la hora de explicar esta demostración y su método fue el punto de partida, ya que al indicar que si suponíamos que $\sqrt{2}$ era un número racional, entonces se podía expresar como una fracción $\frac{a}{b}$ irreducible, algunos alumnos venían a decir que la contradicción se podía salvar suponiendo que se podía expresar como una fracción reducible.

A parte de la demostración clásica, y con la intención de que los alumnos entendieran bien el método de reducción al absurdo, se les presentó la demostración de este hecho de otra manera, basándonos en las terminaciones de números y sus respectivos cuadrados.

Supongamos $\sqrt{2}$ *es un número racional. En este caso se podría expresar* $\sqrt{2}$ *mediante una fracción irreducible* $\frac{a}{b}$*. Elevando al cuadrado la igualdad obtenemos que* $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow 2b^2=a^2$. *Ahora vamos a hacer una tabla con las posibles terminaciones de* a^2 *y* $2b^2$.

a	a^2	b	b^2	$2b^2$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	2
2	4	2	4	8
3	9	3	9	8
4	6	4	6	2
5	5	5	5	0
6	6	6	6	2
7	9	7	9	8
8	4	8	4	8
9	1	9	1	2

Tabla 1. Terminaciones de a^2 y $2b^2$ para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Fijémonos en que a^2 *sólo puede acabar en 0, 1, 4, 9, 6 o 5, mientras que* $2b^2$ *sólo puede acabar en 0, 2 u 8. Como ambos números deben ser iguales, la única coincidencia que hay es que acaben en 0, pero en ese caso a acabaría en 0 y b acabaría en 0 o en 5, lo que es una contradicción con que la fracción* $\frac{a}{b}$ *sea irreducible.*

2. **Demostrar las fórmulas de la suma de un número finito de términos de una progresión aritmética y de la suma de un número finito e infinito (cuando $|r|<1$) de una progresión geométrica, así como las obtenciones de los términos generales de estos términos**. Estas demostraciones, al estar íntimamente ligadas a los contenidos que se estudian en la Unidad Didáctica *Sucesiones* y ser de escasa dificultad, fueron trabajadas en ambos grupos.

La obtención de la fórmula para la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética no presentó aparentemente dificultades para los alumnos. El hecho de hacer primeros unas cuantas sumas concretas y que los alumnos observaran el procedimiento primero en casos concretos hizo que el paso al caso general no les supusiera una especial dificultad. De hecho, luego haciendo ejercicios, en ambos grupos hubo alumnos que para realizar este tipo de sumas no utilizaban la formula, sino el procedimiento que utilizamos para demostrar la fórmula.

En cuanto a la sumas de términos de una progresión geométrica, la principal dificultad que encontramos fue el trabajar con “infinitos términos”. Hay que ser consciente de que los alumnos de 3º ESO han oído hablar del infinito, pero hasta este momento no han trabajado verdaderamente con él. Costó hacer entender que cuando n es un número muy grande r^n será muy grande si $|r|>1$ y que será muy pequeño si $|r|<1$. Una vez superada esta dificultad, la demostración de la suma de los infinitos términos de un progresión geométrica fue comprendida por una buena parte de los alumnos. No obstante, había alumnos que aún entendiendo la demostración no podían comprender cómo era posible que si sumamos infinitos términos el resultado fuera finito. Para convencerles de que si era posible tuvimos que recurrir a dos ejemplos “más visuales”. El primero con números periódicos. Preguntamos en clase cuál era el resultado de esta suma infinita:

$$0,1+0,01+0,001+0,0001+\cdots$$

Prácticamente todos los alumnos respondieron rápidamente que el resultado era $0,\widehat{1}$, convenciéndose así que en ocasiones se pueden sumar infinitos términos. Posteriormente utilizamos un ejemplo más geométrico. Partiendo de un cuadrado de un l u de lado, dividimos el cuadrado en dos partes iguales, después una de esas partes en dos partes iguales, después una de las cuartas partes en dos partes iguales, y así sucesivamente. Concluimos que $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

3. **Demostrar las fórmulas de las identidades notables de un modo algebraico y geométrico**. Estas demostraciones se trabajaron a lo largo de la Unidad Didáctica sobre el *Lenguaje algebraico*. En ambos grupos los alumnos fueron capaces de hacer por ellos mismos las demostraciones algebraicas de las identidades notables sin dificultades apreciables al tratarse de un procedimiento algebraico fácil y directo.

   Al haber trabajado ya con las demostraciones algebraicas, consideramos oportuno no trabajar con las demostraciones geométricas en el grupo control, dedicando más tiempo en este grupo a hacer ejercicios. En el grupo experimental, lo que hicimos es preparar una ficha con las figuras realizadas para cada identidad, indicando las longitudes de cada lado del rectángulo. Los alumnos debían completar las correspondientes áreas en cada caso y de ahí demostrar las identidades notables.

   Prácticamente todos los alumnos del grupo experimental supieron demostrar sin dificultades la identidad notable del cuadrado de una suma, pero les costó algo más la del cuadrado de una diferencia y la de suma por diferencia, al tener que hacer alguna manipulación algebraica más.

4. **Demostrar, utilizando las identidades notables, la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado**. Esta demostración se trabajó durante la Unidad Didáctica de *Ecuaciones*. A pesar de que sí que está muy relacionada con los contenidos curriculares del curso, no la trabajamos en el grupo control debido a que consideramos que tiene una dificultad que puede no ser superada por algunos alumnos y que el procedimiento en sí luego realmente no lo van a utilizar los alumnos.

   En el grupo experimental, donde sí la trabajamos, lo que hicimos fue resolver alguna ecuación de segundo grado concreta con el método de completar cuadrados con el objetivo de luego entendieran la solución. Lo pasos de la demostración se entendieron. La mayor dificultad que encontramos fue la de justificar cada paso. Los alumnos no acabaron de entender por qué multiplicábamos la ecuación por $4a$, luego sumábamos b^2 en ambos lados, etc...

Como conclusión se puede decir que probablemente la mayoría de los alumnos no acabaron de entender plenamente la demostración, pero sí que observaron que la fórmula de resolución de la ecuación tiene un sentido.

5. **Demostrar para una ecuación de segundo grado las relaciones que hay entre sus soluciones y los coeficientes de las ecuaciones (fórmulas de Cardano-Vieta)**. Al igual que la anterior, estas demostraciones se trabajaron en la Unidad Didáctica de *Ecuaciones*. Se trabajaron en el grupo experimental y se propusieron como trabajo voluntario en el grupo control al ser de escasa dificultad y ya que les pueden servir a los alumnos para resolver mentalmente algunas ecuaciones de segundo grado cuando $a = 1$.

   En el grupo experimental un gran número de alumnos dedujeron por sí mismos estas relaciones y prácticamente todos las comprendieron cuando se explicaron en clase. Tras las demostraciones hicimos algunos ejemplos para aplicar estas fórmulas en ecuaciones de segundo grado con $a = 1$ con el objetivo de que los alumnos hallaran las soluciones de forma mental. Como suele suceder en estos casos, hubo alumnos que hallaban las soluciones de una manera muy rápida y otros que les costaba bastante más tiempo.

   Este mismo trabajo se propuso como voluntario en el grupo control y hubo tres alumnos que hicieron correctamente las demostraciones y que supieron aplicarlas a la resolución de ecuaciones de segundo grado con $a = 1$. En clase, lo único que hicimos en este grupo fue explicar la relación y la manera de aplicarla en ese tipo de ecuaciones.

6. **Localizar el vértice de una parábola**. En el grupo experimental intentamos justificar en la Unidad Didáctica de *Funciones lineales y cuadráticas* por qué el vértice una parábola está situado en el punto de abcisa $x = -\frac{b}{2a}$. Para esta justificación utilizamos el programa Geogebra y analizamos (en los casos en que a > 0) qué le ocurre al vértice de una parábola y a su expresión algebraica cuando la trasladamos vertical y horizontalmente. Este procedimiento, al ser muy visual y precisar de manipulaciones algebraicas elementales, fue entendido por prácticamente la totalidad de los alumnos. La única pequeña dificultad que le presentó a algunos alumnos fue comprender por qué cuando se pasa por ejemplo de la parábola $y = ax^2$ a la $y = a(x-2)^2$ esta última es el resultado de desplazar la primera dos unidades a la derecha y no a la izquierda. Esta dificultad se solventó viendo algunos casos concretos en la función.

   En el grupo control decidimos no trabajar esta justificación ya que para los ejercicios que se piden en este curso sobre la parábola, saberse esta justificación no les supondría a los alumnos una destreza que les ayudara de manera relevante en su resolución.

7. **Demostrar que la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180º**. Esta es una de las clásicas demostraciones de las denominadas “sin palabras” ya que un dibujo explica prácticamente la demostración. Al tratarse de una demostración fácil, atractiva de ver y mostrar un método que algunos alumnos no habían visto hasta el momento, la decidimos trabajar en los dos grupos.

   Una vez realizado el dibujo y explicada la demostración prácticamente la totalidad de los alumnos entendieron la demostración, no presentándose ninguna dificultad reseñable. De hecho utilizamos la demostración de este hecho para deducir sin excesiva dificultad la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados convexos.

8. **Demostrar que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto (circuncentro) que equidista de los tres vértices y que las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto (incentro) que equidista de los tres lados.** Estas demostraciones se trabajaron durante la Unidad Didáctica de *Problemas métricos en el plano*. Este hecho lo justificamos en el grupo experimental de forma intercativa con ayuda del programa Geogebra, tomando diferentes medidas y viendo relaciones. Al ser un procedimiento muy visual y a la vez muy lógico no supuso ninguna dificultad a los alumnos.

   El hecho de que saberse esta justificación no iba a suponer una destreza especial para el tipo de ejercicios que se hacen en Matemáticas en este curso, decidimos no trabajarla en el grupo control.

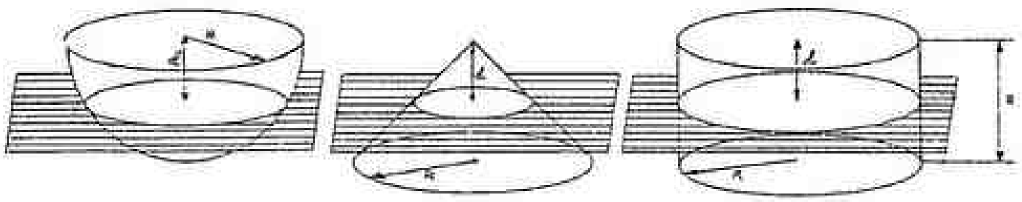
9. **Demostrar que dos triángulos en posición de Tales son semejantes y que por tanto sus lados son proporcionales**. Esta demostración se trabajó durante la Unidad Didáctica de *Problemas métricos en el plano* únicamente con el grupo experimental. Obtener la proporcionalidad de sus lados no lo consiguieron por sí solos los alumnos y únicamente algunos comprendieron la demostración. El motivo principal no fue que se utilizaran argumentos excesivamente complicados, sino que se utilizaron procedimientos como la descomposición de triángulos o la igualdad de áreas entre triángulos por tener la misma base y altura a la que los alumnos no están acostumbrados.

   Dada la dificultad de la demostración y que no era necesaria para los ejercicios de este curso se optó por no trabajarla en el grupo control.

10. **Demostrar el teorema de Pitágoras**. Esta demostración se trabajó durante la Unidad Didáctica de *Problemas métricos en el plano.* Es conocido que el Teorema de Pitágoras es el resultado matemático que más demostraciones distintas tiene. Aprovechando este hecho solicitamos a los alumnos de ambos grupos que expusieran en clase distintas demostraciones del teorema de Pitágoras que encontraran, a lo que respondieron de forma satisfactoria en ambos grupos. En el grupo experimental distintos alumnos consiguieron exponer en clase cinco demostraciones distintas, mientras que en el grupo control se expusieron tres demostraciones diferentes. A parte del rigor propio que aportan las demostraciones, esta actividad propició que los alumnos aprendieran distintas técnicas geométricas que pueden luego servirles para resolver algunos problemas y para darse cuenta que en ocasiones la demostración de un enunciado se puede realizar de distintas maneras.

    En esta actividad no se presentaron dificultades reseñables, salvo la de aclarar la justificación de alguna relación geométrica concreta.

11. **Justificar la relación entre los volúmenes de la esfera, el cilindro recto y el cono recto**. Se trabajó en el grupo experimental durante la Unidad Didáctica de *Problemas métricos en el plano,* a partir de la idea original de Arquímedes.



Fuente:
http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/old/08sabormat/experimentgeometria/lamejor.htm

Para trabajar estas relaciones utilizamos la pizarra digital con el fin de aclarar lo más posible los procedimientos. Aprovechamos estas ideas para hablar de Arquímedes y del papel relevante que tuvo en las Matemáticas.

Una principal dificultad que encontramos en esta justificación fue convencer a los alumnos de que como la sección cilindro es igual a la suma de las secciones de la esfera y el cono, entonces $V_{cilindro} = V_{semiesfera} + V_{cono}$. Esta dificultad es lógica, ya que los alumnos nunca habían trabajado con anterioridad con ideas similares a esta.

Debido a que estos procedimientos tenían una especial dificultad por ser novedosa y que no iba a ser utilizada posteriormente en ejercicios del curso, se decidió no trabajarla en el grupo control.

En la anterior lista hemos ido justificando por qué algunas de estas demostraciones las hemos explicado también en el grupo control y otras no. Hay que recordar que el objetivo principal de la experiencia era ver si esta diferencia didáctica implica diferencias significativas en los resultados de una prueba de problemas efectuada a final de curso, en los resultado de la prueba CDI y en los resultados de la propia asignatura.

Demostración	***Grupo Experimental***	***Grupo Control***
Irracionalidad de $\sqrt{2}$	✓	✗
Fórmulas de progresiones	✓	✓
Identidades notables	✓	Solo de forma algebraica
Fórmula de la ecuación de segundo grado	✓	✗
Cardano - Vieta	✓	Trabajo voluntario
Vértice de una parábola	✓	✗
Suma de los ángulos de un triángulo	✓	✓
Circuncentro - Incentro	✓	✗
Teorema de Tales	✓	✗
Teorema de Pitágoras	✓	✓
Volumen de la esfera	✓	✗

Tabla 2. Cuadro resumen de las demostraciones realizadas en cada grupo.

Como dijimos anteriormente, en el grupo de control el tiempo que no utilizamos en algunos de estos procesos los utilizamos en alguna práctica TIC que no realizamos en grupo experimental (Wiris, ThatQuiz, Geogebra y Excel) y en la realización de algunos ejercicios más sobre los contenidos fundamentales de las respectivas Unidades Didácticas.

Posteriormente analizaremos e interpretaremos los resultados obtenidos desde un punto de vista evolutivo, comprobando si se han producido diferencias significativas entre los resultados obtenidos por los grupos en las variables antes mencionadas.

2.3. Población y muestra

La ficha técnica del muestreo es la siguiente:

a) **Población**. Alumnos que en el curso 2011-2012 cursaron en un centro público del término municipal de Coslada (Madrid) el currículo ordinario de 3º ESO. Esta población está compuesta por 458 individuos, según datos proporcionados por la Dirección Territorial Madrid-Este perteneciente a la Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid.
b) **Muestra**. Fueron los alumnos que en tal curso académico cursaron 3º ESO en los grupos B (grupo control) y C (grupo experimental) en el IES Rafael Alberti de Coslada. El tamaño de la muestra fue de 42 individuos, 21 en cada uno de los grupos.
c) **Error del muestreo**. En las condiciones más desfavorables del muestreo ($p = q = 0{,}5$) y con un intervalo de confianza de amplitud 2σ tendremos un error en el muestro del 15%.
d) **Procedimiento de muestreo**. Es no probabilístico del tipo intencional. Tanto la selección de los individuos, como la asignación de los mismos al grupo experimental o de control no ha sido aleatoria. Lo único aleatorio fue la elección entre el grupo control y el experimental.

Está claro, tal y como expondremos en el punto de limitaciones, que la muestra tuvo un tamaño escaso como para que los resultados pudieran generalizarse a una población más amplia como hubiera sido nuestro deseo.

Por otro lado, debemos indicar que había equilibrio inicial entre los dos grupos de la muestra entorno a ciertos indicadores:

a) **Número de alumnos por grupo**. En los dos grupos eran 21.
b) **Distribución por sexo en los grupos**. En el grupo control había 10 varones y 11 mujeres, mientras que en el grupo experimental había 11 varones y 10 mujeres.
c) **Número de repetidores**. En el grupo control había seis repetidores, mientras que el experimental había ocho.

2.4. Hipótesis planteadas

En nuestra experiencia utilizamos dos momentos: inicial y final. En el momento inicial comprobamos que entre los dos grupos no había diferencias significativas en las medias en torno a dos variables, las calificaciones en la asignatura de Matemáticas en el curso anterior y las calificaciones obtenidas por los alumnos en la preceptiva evaluación inicial. Por tanto, las hipótesis nulas fueron que no existían diferencias significativas en las medias entre los dos grupos en torno a estas variables, mientras que las hipótesis alternativas fueron que sí existían esas diferencias significativas.

En el momento final planteamos la misma situación en torno a tres variables: la calificación final de la asignatura, los resultados obtenidos por los alumnos en la prueba CDI en la parte de Matemáticas y los resultados en la prueba de resolución de problemas que realizaron los alumnos. Nuevamente, las hipótesis nulas fueron que no existían diferencias significativas en las medias entre los dos grupos en torno a estas tres variables, mientras que las hipótesis alternativas fueron que sí existían diferencias significativas.

2.5. Técnicas e instrumentos de recogida de la información

Los instrumentos que utilizamos en nuestra experiencia fueron:

a) Una prueba de evaluación inicial con contenidos tratados el curso anterior que se realizó el 26 de septiembre de 2011. Esta prueba estaba compuesta de ocho ejercicios sobre los contenidos mínimos de 2º ESO: uno de operaciones con fracciones y números enteros, uno de propiedades de las potencias, un problema de fracciones, uno de resolución de ecuaciones de primer grado, uno de resolución de un sistema de ecuaciones lineales, un problema para resolver con una ecuación, uno de representar funciones lineales y uno de aplicar el Teorema de Pitágoras.

b) Prueba CDI que se realizó el 17 de abril de 2012. Los enunciados de los ejercicios y problemas propuestos se pueden consultar en la página Web Oficial de la Comunidad de Madrid http://www.madrid.org.

c) Una prueba de resolución de problemas que se realizó el 28 de mayo de 2012. Esta prueba constó de los ocho problemas que se indican en el Anexo 1.

2.6. Diseño de la experiencia

Utilizaremos un enfoque experimental, ya que a partir de una experimentación buscaremos una ley general estableciendo relaciones causales entre variables utilizando técnicas estadísticas. Debido a que trabajamos con muestras y no tuvimos por tanto el control absoluto de las variables, el diseño de la investigación fue del tipo cuasi-experimental.

2.7. Análisis estadístico a realizar

En esta experiencia nos basaremos en hacer un estudio estadístico inferencial. Comprobaremos mediante la técnica del análisis de la varianza (ANOVA) si se han producido diferencias significativas en las medias de las variables que mencionamos anteriormente. Para los cálculos utilizamos el programa de software libre R y como es habitual en los trabajos estadísticos rechazaremos la hipótesis de igualdad de medias cuando el nivel crítico asociado al estadístico sea menor que 0,05, no rechazando la igualdad de medias en caso contrario.

2.8. Resultados

En el momento inicial teníamos que comprobar si existían diferencias significativas en las medias entre los dos grupos en torno a dos variables: las calificaciones en la asignatura de Matemáticas el curso anterior y los resultados en la prueba de evaluación inicial. Los resultados de los análisis de la varianza se muestran en las siguientes tablas, en donde los datos ausentes que aparecen en la evaluación inicial se debieron a alumnos que se incorporaron con posterioridad al centro:

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	0,38	0,381	0,059	**0,809**
Residuales	40	258,10	6,452		

Tabla 3. Análisis de la varianza de los resultados del curso anterior en Matemáticas en función de los grupos

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5,619	2,889	21	0
Control	5,429	2,135	21	0

Tabla 4. Descriptivos de los resultados del curso anterior en Matemáticas

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	0,01	0,005	0	**0,967**
Residuales	38	121,21	3,190		

Tabla 5. Análisis de la varianza de los resultados de la evaluación inicial en función de los grupos

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	2,671	1,806	19	2
Control	2,648	1,768	21	0

Tabla 6. Descriptivos de la evaluación inicial

Si observamos los valores críticos obtenidos, ninguno de los dos son menores que 0,05, con lo cual podemos afirmar que **no existían diferencias significativas en las medias entre los dos grupos inicialmente en estas dos variables**, lo cual es satisfactorio para la experiencia ya que los resultados indican un equilibrio inicial entre los grupos.

Ahora vamos a comparar estos datos con los resultados finales en la asignatura, los resultados de la prueba CDI y los resultados la prueba de resolución de problemas. Sobre esos datos hemos vuelto a realizar un análisis de la varianza para ver si en torno a alguna de las variables existían diferencias significativas. Podremos ver que hay datos ausentes que se deben a bajas que se producen a lo largo del curso por cambios de domicilio o debido a la no asistencia a realizar la prueba CDI el día que tuvo lugar. Los resultados los podemos observar en las siguientes tablas:

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	27,02	27,019	7,268	**0,0104***
Residuales	38	141,27	3,718		

Nota. * valores significativos $p<.05$; ** valores muy significativos $p<.01$; *** valores altamente significativos $p<.001$.

Tabla 7. Análisis de la varianza de los resultados de la prueba de problemas en función de los grupos

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	3,129	2,422	20	1
Control	1,485	1,253	20	1

Tabla 8. Descriptivos de los resultados de la prueba de problemas.

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	41,44	41,44	6,52	**0,0149***
Residuales	37	235,17	6,36		

Nota. * valores significativos *p*<.05; ** valores muy significativos *p*<.01; *** valores altamente significativos *p*<.001.

Tabla 9. Análisis de la varianza de los resultados en la CDI de Matemáticas en función de los grupos

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5,467	3,060	20	1
Control	3,404	1,785	19	2

Tabla 10. Descriptivos de los resultados en la CDI de Matemáticas.

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	65,03	65,03	9,277	**0,0042****
Residuales	38	266,35	7,01		

Nota. * valores significativos *p*<.05; ** valores muy significativos *p*<.01; *** valores altamente significativos *p*<.001.

Tabla 11. Análisis de la varianza de los resultados en Matemáticas del tercer trimestre en función de los grupos

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5,90	3,076	20	1
Control	3,35	2,134	20	1

Tabla 12. Descriptivos de los resultados en Matemáticas del tercer trimestre

Si observamos los tres valores críticos obtenidos vemos que se han obtenido diferencias significativas tanto en los resultados de la prueba de resolución de problemas, como en los resultados de la prueba CDI, y que se han producido diferencias muy significativas en las calificaciones de la asignatura de Matemáticas, siendo estas diferencias en los resultados favorables en los tres casos al grupo experimental.

3. Conclusiones y limitaciones de la experiencia

Los resultados obtenidos han confirmado ampliamente las expectativas que teníamos antes de la investigación y han corroborado que, con un uso adecuado, las argumentaciones y las demostraciones suponen una mejoría en los resultados de ciertas variables.

Si comparamos los datos finales con los iniciales podemos observar que la mejoría del grupo experimental se debe principalmente a un aumento en la variabilidad de los resultados como consecuencia del incremento en las calificaciones de los alumnos con más aptitudes matemáticas, más que por una mejoría general. Estos resultados se pueden corresponder en parte con los obtenidos por

Luengo y González (2005) cuando concluyeron mediante un estudio cuasi-experimental centrado en la influencia de los resultados en Matemáticas en alumnos de 4º ESO en función de las asignaturas optativas elegidas que el perfil del alumno que obtiene mejores resultados en la asignatura es el que tiene predominancias altas en los estilos teórico y reflexivo y moderadas en el activo y pragmático.

No obstante, no podemos tener la idea de que la diferencia entre los resultados se deba en exclusiva a la diferencia de los métodos utilizados. Aunque los datos iniciales demuestran un equilibrio inicial entre los dos grupos, es obvio que hay una multitud de factores que pueden influir en los resultados académicos de los grupos, a parte de los métodos utilizados con ellos. De hecho, en las demás asignaturas del curso pudimos observar como en general el grupo experimental evolucionó mejor que el grupo control, aunque sí es cierto que las diferencias más significativas se produjeron en la asignatura de Matemáticas.

También hay que ser consciente de que esta es una experiencia puntual, con dos grupos concretos y que se podría extender a otros contextos para ver si los resultados siguen la misma tendencia. De este modo, proponemos hacer la experiencia adaptándola convenientemente en otros cursos, otras localidades, en centros de diferente tipología (privados y concertados), extendiendo la duración de la experiencia, etc.

Esta experiencia refuerza nuestra opinión inicial sobre el uso de la demostración. Consideramos que la forma ideal no es la que hemos utilizado en esta investigación ya que los alumnos de los dos grupos eran desconocidos para el profesor de la asignatura y en cursos anteriores no se habían acostumbrado a trabajar con estos procedimientos. Aunque hemos intentado actuar en el grupo experimental de la manera más progresiva posible, empezando con simples pruebas y comprobando algunas conjeturas, está claro que este proceso debería haber comenzado en cursos anteriores, introduciendo a los alumnos estos procedimientos y acostumbrándolos a justificar afirmaciones y a ser críticos con las que se les presentan.

En resumen, proponemos que, tras una formación adecuada del profesorado sobre cómo, cuándo y qué demostrar, estos procedimientos se introduzcan en el currículo de una forma más explícita de la que aparecen en la actualidad y que se utilicen en el aula como una herramienta que sirva para mejorar los procesos matemáticos generales, en especial en la resolución de problemas, sin que sea un objetivo primordial la evaluación propia de estos procedimientos.

Bibliografía

Alcolea, J. (2002). La demostración matemática: problemática actual. *Contrastes, revista interdisciplinar de Filosofía*, 7, 15 – 34.

Azcárate, P. (1997). La investigación matemática. Cuestiones sobre los procesos de formación de los profesores. En *Revista Relieve (3), 2.* [En Red] Disponible en: http://www.uv.es/RELIEVE/v3n2/RELIEVEv3n2_0.htm [17 de septiembre de 2013]

Bravo, M.L., Arteaga, E., Sol, J. L. (2001). El valor formativo de las demostraciones. *Xixím, revista electrónica de didáctica de las matemáticas, 3.*

Crespo, C. y Ponteville, C. (2005a). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En *Acta latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, 560 – 565. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Crespo, C. y Ponteville, C. (2005b). Las funciones de la demostración en el aula de Matemáticas. En *Acta latinoamericana de Matemática Educativa, 18*, 307 – 312. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilón: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 26*, 15 – 30.

GIL, J.A. (2004). *Bases metodológicas de la investigación educativa (Análisis de datos)*. Madrid: Uned.

HANNA, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the learning mathematics (15), 3,* 42-49.

IBAÑES, M. J. y Ortega, T. (1997). La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria. *Educación Matemática (9), 2,* 65 – 104.

Kline, M. (1981). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo veintiuno editores.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Luengo, R. y González, J. J. (2005). Relación entre los estilos de aprendizaje, el rendimiento en Matemáticas y la elección de asignaturas optativas en alumnos de E.S.O. En *Revista Relieve (11), 2, 147 – 165*. [En Red] Disponible en: http://www.uv.es/RELIEVE/v11n2/RELIEVE v11n2_4.htm [17 de septiembre de 2013]

Martinón, A. (2009). ¡Vivan las demostraciones! *Unión, Revista Iberoamericana de educación matemática, 18*, 6-14.

Pluvinage, F. (2007). Demostración. *CIVESTAV - DME*.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Nueva Jersey: Princeton University Press.

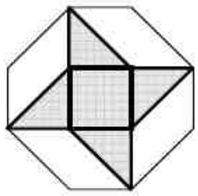
Solow, D. (1987). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*. México: Limusa.

Enrique Sánchez Freire. Licenciado en Matemáticas (Universidad Complutense de Madrid). Profesor de Educación Secundaria de Matemáticas. Centro de trabajo: Instituto de Enseñanza Secundaria Luis García Berlanga, Coslada. Madrid.
Email: enrique_sanchez_freire@yahoo.es

Juan Antonio Gil Pascual. Profesor titular de Metodología de la Investigación Cuantitativa. Facultad de Educación – Universidad Nacional de Educación a Distancia.
Email: jgil@edu.uned.es

Anexo

1. En la figura de la derecha vemos un molinillo de viento formado por un cuadrado y cuatro triángulos rectángulos isósceles, que está inscrito en un octógono. Si el área del octógono es de 42 m^2, hallar el área del molinillo.



2. Un camionero presupuesta cierta cantidad de dinero para el gasto de carburante en un recorrido de 600 Km. Sin embargo, una rebaja repentina en el precio del gasóleo le supuso una rebaja de 0,14 € por Kilómetro, lo que le permitiría hacer un recorrido de 750 Km con el mismo gasto. Calcular la cantidad que fue presupuestada inicialmente para el carburante.
3. Un torneo de tenis se juega por el sistema de "*eliminatoria directa*" que quiere decir que el perdedor de un partido queda eliminado del torneo. Si en el torneo participan 130 jugadores, ¿cuántos partidos deberán disputarse para conocer al ganador?
4. En otro torneo de tenis participaron únicamente 6 jugadores. Cada jugador juega un partido con cada uno de los restantes. Alicia ganó 4 partidos, Beatriz 3, Carlos 2, David 2 y Emilio solo 1. ¿Cuántos partidos ganó Félix?
5. Un vendedor ambulante encuentra una oferta y compra pantalones a un precio de 126 € la docena y camisetas a un precio 105 € cada caja de 20 unidades. Decide comprar 3 docenas de pantalones y 2 cajas de camisetas. En su puesto venderá cada pantalón a 14 € y cada camiseta a 8 €. Si consigue vender toda la mercancía, ¿cuál será el beneficio que obtenga?
6. Como ya sabes, un número es primo si tiene únicamente dos divisores. Por ejemplo, son números primos el 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. Ahora te pregunto:
   a) ¿Cuál es el primer número primo mayor que 200?
   b) Pon cinco ejemplos de números que tenga únicamente tres divisores. ¿Qué características cumplen estos números?
7. Completa las casillas que faltan de todas las formas posibles:

$$\begin{array}{r} \square\,\square\,8 \\ \times\,\square \\ \hline \square\,2\,7\,6 \end{array}$$

8. Intenta, utilizando únicamente cuatro cuatros y las operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada, potencia y paréntesis), formar todos los números de 0 al 10. El primero te lo doy hecho de cuatro formas distintas: 0 = 4 + 4 – 4 – 4 = 44 – 44 = 44 – 44 = $\sqrt{4\cdot 4}-\sqrt{4\cdot 4}$