BROUWER Y EL INTUICIONISMO

José Montesinos

En los dos últimos decenios del siglo XIX, las matemáticas del mundo occidental, de la Era Moderna, alcanzan su apogeo y cumbre con la entronización de la teoría de conjuntos y el dominio y clasificación de los infinitos obtenida por el matemático alemán Georg Cantor. Se produce un espectacular avance en los intentos del hombre por controlar los procesos infinitos y en su búsqueda de la esencia y estructura del *continuo matemático*. La teoría de conjuntos, los números transfinitos, la pretensión de haber encuadrado el infinito en una totalidad *actual y estática*, el continuo de Cantor-Dedekind, son el fruto, según el propio Cantor, del uso de la libertad de creación en matemáticas.

El más notable logro de Cantor consistió en demostrar, con rigor matemático, que la de infinito no era una noción indiferenciada. No todos los conjuntos infinitos son de igual "tamaño"; por consiguiente es posible establecer comparaciones entre ellos. Pero un conjunto actualmente infinito no puede alcanzarse al término de un proceso de numeración que por definición no tiene fin; debe alcanzarse con un *acto instantáneo* mediante el cual uno se instala de pronto fuera del mundo de la experiencia y de las operaciones humanas.

Jan Brouwer

Cantor, con esa libertad de creación que reivindicaba para las matemáticas, crea un paraíso de posibilidades, del que posteriormente Hilbert no querrá prescindir, y en el que los números transfinitos, a su vez una serie infinita de ellos, serán construidos a partir de esos "actos instantáneos". Una áspera disputa, que durará 50 años se entabla entre los constructivistas-intuicionistas (Kronecker, Poincaré, Borel, Brouwer, H. Weyl...) de una parte y los formalistas-logicistas (Dedekind, Cantor, Peano, Hilbert, Russell...) de la otra. La pretensión de reducir las matemáticas a la lógica, y la manera de "certificar" la existencia de los entes matemáticos, de esos entes infinitos actuales, van a ser los temas centrales en la disputa, que arrecia cuando los "excesos" formalistas conducen a las antinomias de la teoría de conjuntos y hacen tambalear todo el edificio matemático.

Jan Brouwer: los primeros años y la formación de su filosofía de la vida

Nace Brouwer el 27 de febrero de 1881; es el mayor de los tres hijos de un maestro de escuela que le convierte en un niño prodigio que irá siempre adelantado varios años en los estudios. A los 16 años se matricula en la Universidad de Amsterdam para estudiar matemáticas, lo que no le impide seguir cultivando la lectura de los clásicos y de sus filósofos preferidos: Kant y Schopenhauer. En 1900 corren vientos de rebeldía en las universidades holandesas y en la joven "intelligentsia" prenden tendencias neo-románticas de una vuelta a la naturaleza y de rechazo a una industria contaminante. En 1905 plasmará en su escrito juvenil *Vida, Arte y Misticismo* su concepción de la vida y del mundo. El manifiesto es ferozmente anti-científico y anti-intelectual. La causalidad es condenada como esencialmente inmoral:

> El intelecto ha rendido a la humanidad un maligno servicio al ligar esas dos fantasías que son la causa y el efecto...

> Una verdad científica no es más que una cierta infatuación del deseo, que vive exclusivamente en la mente.

Aunque Brouwer, en general, desprecia la filosofía académica, va formándose en él lo que llama su "filosofía de la vida"que impregnará después su concepción de la matemática. Especialmente importante para ésta serán sus ideas sobre el *lenguaje* y sobre el *tiempo*. Para Brouwer, pensar es un acto exclusivo del hombre individualmente considerado y hablar es una actividad del hombre social, un instrumento para provocar la acción de otros:

> En los más remotos estadios de la civilización y en las más primitivas relaciones entre los hombres, la transmisión de la voluntad de un hombre para que otro trabaje o le sirva se hace mediante gestos simples de todo tipo y fundamentalmente a través de los sonidos naturales y emotivos de la voz humana

En relación al tiempo dice que "el fenómeno primordial no es otro que la intuición del tiempo, en el que la repetición de algo-en-el-tiempo y otra vez ese algo es posible". El tiempo, la intuición primordial, es un suceso en la génesis de las cosas; es la presencia simultánea en la conciencia de dos sensaciones, la del pasado y la del presente. La intuición primordial es una intuición mediante la cual el hombre capta en el tiempo la relación antes-después.

Su filosofía de la matemática: el primer acto del intuicionismo

> ...que separa completamente la matemática del lenguaje matemático y por tanto de los fenómenos lingüísticos descritos por la lógica teórica y reconoce que la matemática intuicionista es una actividad esencialmente alingüística de la mente que tiene su origen en la percepción de un movimiento del tiempo...

En 1907 Brouwer presenta su tesis doctoral sobre *Los Fundamentos de las Matemáticas*. La búsqueda de la génesis de la matemática comienza con un examen crítico de las filosofías de las matemáticas existentes en ese momento. El logicismo de Russell, el formalismo de Hilbert, el pre-intuicionismo de Poincaré son expurgados, siempre sobre la base de su particular filosofía, de los elementos que se originan en las tendencias "viles" de la naturaleza humana: los elementos causales, que conforman la ciencia y los lingüísticos como parte de la acción social.

Su interpretación de las matemáticas como pensamiento constructivo a partir de la intuición primordial surge en un proceso de eliminación de aquellos elementos nocivos, por pura reflexión filosófica sobre la naturaleza del razonamiento y la constitución del tiempo. Brouwer no teme perder el paraíso prometido de Hilbert y despoja a las matemáticas de todas las connotaciones teológicas que la habían acompañado en los últimos trescientos años y que habían alcanzado su máximo en la manipulaciones del infinito llevadas a cabo por Cantor. Para Brouwer la ciencia oficial consiste en la clasificación sistemática de secuencias causales de fenómenos y en particular, las matemáticas serían la rama del pensamiento científico que se ocuparía de estudiar la estructura de los fenómenos. La visión matemática de estos fenómenos estaría motivada por la voluntad del hombre de autoconservarse y la elección de las estructuras a considerar estaría determinada por las exigencias del individuo en relación a la sociedad.

En la concepción "dinámica" que Brouwer tiene de las matemáticas, éstas evolucionan a lo largo de la historia, y son el producto de la mente humana con todos los defectos que ello conlleva en cuanto a su falibilidad. En esta evolución las leyes de la lógica aparecen como el resultado histórico de la lucha del hombre por organizar agregados de un número finito de objetos. Sucede que estas mismas leyes pueden ser aplicadas a conjuntos infinitos, con una excepción, la ley del tercio excluso (tertium non datur). Los intuicionistas consideran la creencia en la validez universal del principio del tercio excluso en matemáticas como un fenómeno del mismo tipo que la creencia en la racionalidad de π ó la de la rotación del firmamento en torno a la Tierra. Según Brouwer, la aplicación incorrecta del principio del tercio excluso está causada históricamente por los siguientes hechos: a) La Lógica Clásica es una abstracción conseguida a partir de las matemáticas de subconjuntos de un conjunto finito. b) Se adscribe a esta lógica clásica una existencia "a priori" independiente de las matemáticas. c) Merced a este apriorismo el principio del tercio excluso es aplicado injustificadamente a las matemáticas de conjuntos infinitos.

En 1912 Brouwer es nombrado profesor en la Universidad de Amsterdam; para entonces, ha realizado importantes trabajos en Topología y publicado artículos de renombre internacional en la prestigiosa revista alemana *Mathematische Annalen* dirigida por Hilbert. Pero una vez demostrada su pericia en el manejo de la matemática "oficial" y conseguido su objetivo de ser profesor en la Universidad, Brouwer vuelve al tema de los fundamentos y en su lección inaugural titulada *Intuicionismo y formalismo* muestra su preocupación por la teoría de conjuntos y critica particularmente la axiomática de Zermelo. Viaja a Gotinga donde conoce a Klein y a Hilbert, con el que mantendrá, en un primer período, una amistosa correspondencia. En 1914 Klein le invita a entrar en el consejo editorial de los *Mathematischen Annalen*, lo que acepta con entusiasmo. Durante estos años se concentra en el problema del continuo y la necesidad de acomodar los números reales, de una manera constructiva, en el continuo geométrico.

En 1917 presenta en la Real Academia Holandesa la primera parte de su *Fundamentos de una teoría de conjuntos, independiente del principio del tercio excluso*, en donde propone un innovador y radical intento de reemplazar la noción tradicional de número real y la teoría de conjuntos de Cantor por nuevos conceptos, derivados de forma natural a partir del continuo intuitivo.

El continuo Broweriano y la confrontación con Hilbert

Los puntos fundamentales de la concepción Brouweriana del continuo pueden resumirse de la siguiente forma:

1. El único "elemento a priori" del continuo es el *tiempo*.

2. El continuo matemático es un concepto creado mediante la abstracción matemática, *existente únicamente en la mente del hombre.*

3. El continuo es un concepto *primitivo*, directamente extraído de la conciencia del tiempo.

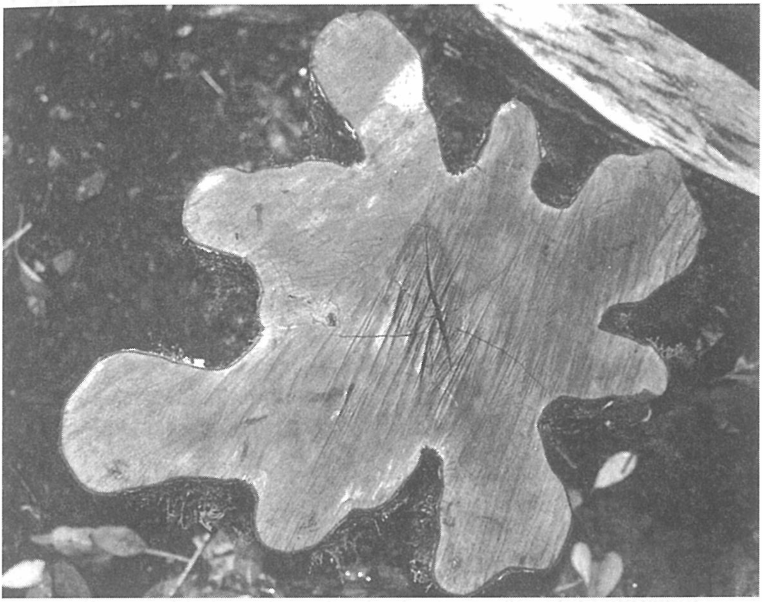
4. El continuo *no puede ser identificado como una totalidad construida de puntos.* Estos tienen un papel en el análisis del continuo como extremos de los intervalos en que éste puede descomponerse, pero no son partes constituyentes del mismo.

En el continuo Brouweriano, el número real está definido por una sucesión de números naturales, pero no todas estas sucesiones están determinadas por una ley, sino que son producto de una *libre elección* y son construidas *paso a paso* por libres actos de elección y por consiguiente se mantienen siempre "in statu nascendi". Mientras que las sucesiones determinadas *ad infinitum* por una ley representan los números reales individuales que tienen un lugar en el continuo, las sucesiones de libre elección representan lo variable del continuo. De una de estas sucesiones solamente se inferirán propiedades que tengan sentido, cuando baste que se comprueben para segmentos iniciales finitos, y el desarrollo posterior no afecte a la decisión tomada. Este libre acto de elección no debe confundirse con la "elección" del axioma de Zermelo en el que a la sucesión seleccionada se la concibe como una totalidad completa y acabada. Brouwer no considera sus sucesiones de libre elección como un todo dado y con ellas pretende además reflejar el crecimiento y el aspecto dinámico del continuo matemático, inspirado en la intuición del tiempo que fluye. El continuo no es pues un agregado de elementos fijos, sino un dominio de libre "devenir".

En 1918 Brouwer presenta la segunda parte de *Fundamentos de la Teoría de Conjuntos,* y uno de los primeros en apreciar este texto es Hermann Weyl, brillante matemático alemán y alumno predilecto de Hilbert, quien bajo los influjos de la personalidad de Brouwer, se convierte según sus propias palabras en un apóstol del Intuicionismo: " ...¡Y Brouwer, que es la revolución! Brouwer es a quien tenemos que agradecer la solución moderna de los problemas del continuo".

Brouwer está ahora más que nunca seguro de sus ideas y emprende un ambicioso programa de reforma del análisis. Se le ofrecen en ese momento cátedras en Gotinga y Berlín que él rechazará, aunque sus relaciones con la Universidad de Berlín serán siempre muy buenas y allí pasará como profesor visitante largas temporadas. En Berlín existía una corriente constructivista y anti-cantoriana descendiente de la escuela de Kronecker y se había desarrollado una creciente hostilidad contra la Universidad de Gotinga, que en estos momentos era considerado el primer centro de matemáticas en el mundo, liderado por Hilbert.

En 1927 Brouwer da una serie de conferencias sobre el intuicionismo en la Universidad de Berlín que son recibidas con entusiasmo y allí preconiza un boicot al Congreso Internacional de Matemáticas que iba a celebrarse en Bolonia en 1928. Hilbert, desoyendo la propuesta de Berlín, acude al Congreso en el que haría su última intervención pública atacando duramente al intuicionismo y a la figura de Brouwer. A su vuelta destituye fulminantemente a Brouwer del consejo editorial de la *Mathematische Annalen*. Brouwer comprueba que la medida es aceptada mayoritariamente por la comunidad internacional de matemáticos y se hunde en la depresión, refugiándose de nuevo en el solipsismo y, renovando sus sentimientos de aversión hacia el género humano, cesa en su producción matemática. Arendt Heyting, uno de los pocos alumnos suyos con los que no termina enemistándose, continuará desarrollando el programa de la matemática intuicionista. Pero ésta ha perdido ya la batalla.



Topológicamente equivalentes
Luis Balbuena