UNIDADES DE MEDIDA

N. A. Nava y U. Molter

1. INTRODUCCIÓN

Con frecuencia operamos formalmente sobre las unidades de diversas magnitudes geométricas o físicas para expresar cantidades que surgen de la aplicación de ciertas fórmulas. También es necesario cambiar de unidades para dar consistencia a nuestros cálculos o bien para comparar cantidades de una misma magnitud expresadas en unidades diferentes. Por otra parte, es notorio que la teoría clásica de las magnitudes desarrollada en los libros de Euclides resulta insuficiente para explicar satisfactoriamente todas aquellas operaciones [4].

A pesar de su interés matemático, el tema ha permanecido en una 'zona gris' del conocimiento, reservada casi exclusivamente a los físicos, acaso por ser ellos quienes desarrollaron un método general aplicable a los problemas en que se hallan involucradas mediciones. Según Drobot [1], el origen del método se remonta a la publicación de los célebres ***Principia*** de Isaac Newton (1687), si bien fue O. Reynolds quien en el siglo pasado mostró su potencia para resolver algunos problemas difíciles de la hidrodinámica.

Nuestro objetivo es más modesto; pero antes de referirnos a él daremos tres ejemplos sencillos de la clase de manipulaciones que nos ocupa, en la forma en que suelen presentarse en la enseñanza elemental.

Ejemplo 1 (longitud, área y volumen). La unidad de longitud conocida como pie (f_t) se relaciona con el metro (m) por la ecuación ft = 0'3048m. Por consiguiente, el pie cuadrado y el pie cúbico se relacionan con las correspondientes unidades cúbicas por medio de las fórmulas $ft^2 = (0'3048)^2$, $ft^3 = (0'3048)^3$, respectivamente.

Ejemplo 2 (velocidad). consideremos la siguiente reducción a otra unidad:

$$30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 30\,\frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = 8'33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\ ,$$

Ejemplo 3 (caída libre). La velocidad alcanzada por un cuerpo pesado que cae de una altura h de diez metros en el momento de chocar contra el piso es

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2x9'8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,x10\text{m}} = 14\sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Prestemos atención en el último ejemplo a las operaciones algebraicas realizadas sobre las unidades de longitud y tiempo. ¿Qué significan? ¿Es posible ofrecer una explicación sencilla de aquellas operaciones formales casi 'mecánicas', que responden menos al razonamiento que a la fuerza de la costumbre? Buscamos una explicación que justifique operar con las unidades en la forma en que se hace habitualmente. La situación es similar a la que lleva a introducir pares ordenados de números reales para justificar el álgebra de los números complejos (en realidad, para probar la consistencia con el sistema de los números reales), sin agregar ninguna nueva propiedad.

Desde un punto de vista didáctico, parece sensato proveer de algún contenido a unas operaciones que suelen tomarse como axiomas para la construcción formal del Análisis Dimensional [2].

Comencemos revisando el concepto de medición geométrica, para lo cual adoptamos a $\mathbf{R}^3$ como modelo del espacio geométrico ordinario. Como es usual, por ***congruencia*** entendemos una aplicación de $\mathbf{R}^3$ en sí mismo que preserva la distancia euclidiana, y el segmento con extremos M y N será denotado por MN.

2. LONGITUD.

El ***problema de la longitud*** consiste en asignar a cada segmento S en R^3 un número no negativo λ (S) de modo tal que se cumplan las siguientes propiedades:

1) Si S_1 y S_2 son congruentes, entonces $\lambda(S_1) = \lambda(S_2)$.

2) Si S_1 y S_2 son segmentos consecutivos sobre una misma recta, entonces

$$\lambda(S_1 \cup S_2) = \lambda(S_1) + \lambda(S_2).$$

Una función λ que satisfaga dichas condiciones se llamará ***una longitud***. El problema planteado tiene infinitas soluciones, como lo expresa con precisión el siguiente teorema.

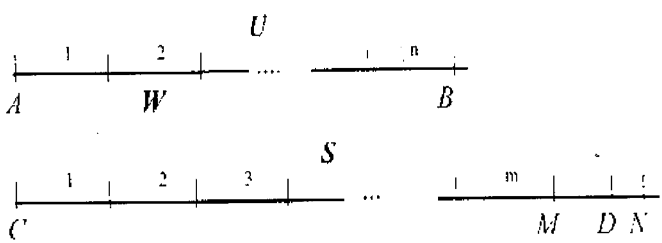
Teorema 1. Dados un segmento U y un número u>0, existe una única longitud λ que satisface $\lambda(U) = u$.

Para cada segmento S, el número $\lambda(S)$ dado por la función del teorema precedente se llamará ***la longitud*** de S.

La Longitud de cada segmento puede escribirse en la forma $\lambda(S) = \rho u$. El coeficiente ρ, que como veremos depende sólo de los segmentos S y U, se llama ***medida*** de S con respecto a U.

La demostración del teorema es sencilla: una función λ que satisfaga las condiciones del enunciado se construye usando la norma euclidiana del espacio. En cuanto a la unicidad, supongamos que λ y μ son dos longitudes que satisfacen $\lambda(U) = \mu(U) = u$. Denotemos por medio de A y B los extremos de U y por C y D los de un segmento S arbitrariamente elegido, de modo que U = AB y S = CD.

Dado un entero positivo n, dividamos U en n segmentos congruentes y sea W uno de estos segmentos más pequeños, de modo tal que $\lambda(W) = u/n$, $\mu(W) = u/n$



A continuación, sobre la semirrecta $CD\rightarrow$, a partir de C, consideremos una sucesión de segmentos consecutivos congruentes a W hasta que el punto D quede comprendido en uno de ellos, digamos MN.

Claramente, $\lambda(CM) \leq \lambda(CD) \leq \lambda(CN)$, así que llamando m al número de segmentos congruentes a W incluidos en CM, tendremos

$$m\frac{u}{n} \leq \lambda\ (S) \leq\ (m+1)\cdot\frac{u}{n}$$

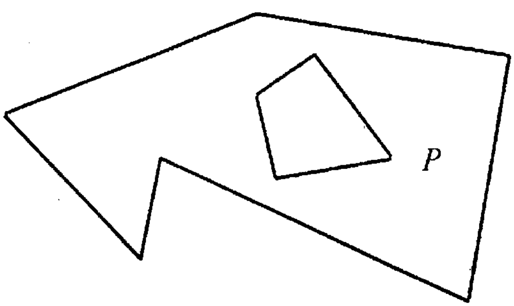
Pero, por las mismas razones, $\mu(S)$ está comprendido entre las mismas cotas, de lo que se sigue que $|\lambda(S) - \mu(S)| \leq u/n$.

Puesto que la elección de n es arbitraria, concluimos que $\lambda(S) = \mu(S)$, como queríamos probar. Notemos de paso que si $\lambda(S) = \rho\, u$, el número racional $r_n = m/n$ difiere de ρ en menos que $1/n$. Puesto que la sucesión (r_n), que sólo depende de S y U, converge hacia ρ cuando $n \rightarrow \infty$, se sigue que ρ depende sólo de dichos segmentos.

Definición. El par ordenado (U,u) será llamado una **unidad de longitud.**

3. AÉREA

Como es usual, llamaremos ***polígono*** a una región del plano limitada por un número finito de poligonales cerradas. Recordemos que dos polígonos P_1 y P_2 situados en un mismo plano se llaman ***adyacentes*** si tienen en común algún lado o parte de él, pero no hay ningún punto del plano que sea interior a ambos.



El ***problema del área*** consiste en asignar a cada polígono P un número no negativo $\varnothing$ (P) de modo tal que se cumplan las siguientes condiciones:

1) Si P_1 y P_2 son polígonos congruentes, entonces $\varnothing(P_1) = \varnothing(P_2)$.

2) Si P_1 y P_2 son polígonos adyacentes, entonces

$$\varnothing(P_1 \cup P_2) = \varnothing(P_1) + \varnothing(P_2).$$

En lo que sigue denotaremos por Q un cuadrado cuyos lados son congruentes con el segmento unitario U de la sesión anterior, al que hemos asignado la longitud u. Ahora sí, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema fundamental:

Teorema 2. Dado un número $C > 0$, existe una única función $\varnothing$ que satisface las condiciones anteriores y verifica $\varnothing(Q) = C$. A un rectángulo R cuyos lados tengan longitudes $a = \alpha u$ y $b = \beta u$ **dicha función le asigna el número**

$$\varnothing(R) = C\alpha\beta = (C/u^2)ab.$$

Una demostración puramente geométrica de la existencia de $\varnothing$ basada en una bonita idea de Schur y Gerard puede estudiarse en la monografía de Lebesgue [3]. La segunda afirmación del enunciado (relativa al rectángulo) conduce fácilmente a la unicidad de $\varnothing$ y constituye un excelente ejercicio en la teoría elemental de la medida.

Es sabido que $\varnothing$ puede extenderse de manera única a la clase formada por las figuras planas medibles Jordan, manteniendo sus propiedades básicas de aditividad e invariancia bajo congruencias. En lo que sigue entenderemos por figura a un conjunto plano medible Jordan.
Para elegir un valor cómodo de C (en relación con los rectángulos) se nos presentan dos alternativas igualmente razonables:

1) $C = 1$
2) $C = u^2$.

Por supuesto, no existe ninguna diferencia si declaramos que $u = 1$ como se hace algunas veces para simplificar la expresión de las magnitudes geométricas; pero ello trae aparejado un inconveniente: la teoría se aparta de sus aplicaciones y de la vida real, donde la referencia a unas unidades concretas es inedulible.

Por tal motivo preferimos elegir $C = u^2$. Además, para cada figura F el número $\varnothing(F)$, ahora determinado por la elección realizada, será llamado ***el área*** de F asociada al sistema (U,u). Entonces, el área del rectángulo R será

$$\varnothing(R) = ab = \alpha \beta u^2.$$

Más generalmente, cada figura F tiene un área que puede expresarse en la forma $\varnothing(F) = \sigma u^2$. El coeficiente σ es la medida de F, con respecto al cuadrado Q cuya área es $\varnothing(Q) = u^2$.

Aquí, u^2 no es meramente ***"un símbolo que representa la unidad de área"***, sino el cuadrado del número u introducido en la sección anterior.

4. CAMBIO DE UNIDADES

El significado de cambiar unidades merece una consideración. Para tal fin será suficiente analizar los casos de la longitud y el área.

Supongamos que λ y μ son dos longitudes no idénticamente nulas. Sobre la base del teorema 1 se prueba fácilmente que para cualquier par de segmentos S y T,

$$\lambda(S)\mu(T) = \lambda(T)\mu(S).$$

En efecto, como función de S solamente (para un T fijo), cada miembro de la ecuación es una longitud y ambos miembros coinciden cuando S = T.

Esto nos permite definir el cociente S/T por medio de la fórmula

$$\frac{S}{T} = \frac{\lambda(S)}{\lambda(T)}$$

gracias a que el miembro derecho es independiente de λ.

Supongamos ahora que $\lambda(U) = u$, $\mu(V) = v$, $\tau = V/U$, y que para cierto segmento S se tiene

$$\lambda(S) = \alpha u \ , \quad \mu(S) = \beta v.$$

Observación: Puesto que $\alpha = \lambda(S)/u = \lambda(S)/\lambda(U) = S/U$, obtenemos una nueva demostración de que la medida de S con respecto a U depende sólo de dichos sementos; pero nuestro problema actual es otro.

Para que valga $\lambda = \mu$ sólo necesitamos que se cumpla $\lambda(V) = \mu(V) = v$. Puesto que $\tau = \lambda(V)/\lambda(U) = \lambda(V)/u$, la condición para la igualdad entre λ y μ es $v = \tau u$.

Si convenimos en relacionar u y v por medio de la última ecuación, entonces tendremos $\alpha u = ßv = ß\tau u$, es decir, $ß = \tau^{-1}\alpha$. Denotando por ψ el área asociada al sistema (V,v) y por Q' un cuadrado cuyos lados tienen longitud v, tendremos $\psi(Q') = v^2 = \varnothing(Q')$, lo que implica que $\psi = \varnothing$. Por tanto, si una figura plana F tiene área $\varnothing(F) = \sigma u^2$, entonces

$$\psi(F) = \sigma(\tau^{-1} v)^2 = (\tau^{-2}\sigma)v^2.$$

5. TIEMPO

Cuando se trata de medir el tiempo, la duración de un intervalo temporal juega un papel análogo al de la longitud de un segmento. Los símbolos h (hora) y s (segudo) representan los números reales -arbitrarios- que asignamos a ciertos intervalos definidos por los relojes. Sin embargo, para que la duración de un intervalo expresada en una de dichas unidades pueda igualarse a dicha expresión en la otra debemos aceptar la relación lineal $h = 3600s$ entre las variables h y s.

Unas consideraciones análogas pueden hacerse en relación con otras magnitudes de la Física Clásica, donde la aditividad de las medidas es una hipótesis básica. En cualquier caso, los símbolos de las unidades fundamentales son parámetros positivos y las reglas usuales para operar con ellos son consistentes con esa interpretación.

BIBLIOGRAFÍA

1. S. Dobrot, *On the foundations of Dimensional Analsis*, Studia Mathematica 14 (1953), 84-99.
2. R. Kurth, *Dimensional Analysis and Group Theory in Astrophysics*, Capítulo II. Pergamon Press, 1972.

3. H. Lebesgue, *Sur la mesure des grandeurs*, L'Enseignement mathématique, Tom XXXI (1931) to XXXIV (1935).

4. N. Rouche, *Magnitudes in the teaching of Geometry* (ICMI Study), Proceedings of the Catania Conference on the Teaching of Geometry, Catania (Italy), 1995.