LA CIENCIA DEL CAOS

Rafael de la Llave

Los orígenes de la teoría

La humanidad siempre ha tratado de comprender los fenómenos naturales y de predecirlos. Muy pronto se descubrieron dos tipos de regularidades útiles para hacer predicciones. Unas, las regularidades que suceden siempre (por ejemplo los movimientos de los planetas). Otras, las regularidades que suceden en promedio. Por ejemplo, se puede decir con mucha seguridad que agosto es más caliente que enero, aunque sea muy difícil decir cuál va a ser la temperatura de un día determinado.

La matemática del caos

Las matemáticas de los sistemas deterministas se formulan en el siglo XVII con el cálculo infinitesimal y la teoría de ecuaciones diferenciales. Dada una ley de la naturaleza conocida con exactitud y unas condiciones iniciales también exactas, se puede predecir el futuro con precisión completa.

Hasta el siglo XIX, la teoría de ecuaciones diferenciales se basa en manipular fórmulas que dan el movimiento de manera exacta o bastante aproximada recurriendo al cálculo numérico. No obstante, el método de encontrar fórmulas que proporcionen soluciones exactas tiene inconvenientes. Por ejemplo, teorías físicas muy semejantes (que llevan a resultados medibles cuantitativamente muy semejantes) pueden llevar a fórmulas muy diferentes. Peor aún, se demuestra en el siglo XIX que hay ecuaciones cuyas soluciones no pueden representarse con las funciones cuyas teclas aparecen en todas las calculadoras (senos, cosenos, logaritmos...) y los matemáticos empiezan a estudiar cada vez más funciones (elípticas, de Bessel, hipergeométricas, etc.) que permitan expresar los resultados. Pronto se descubre que esto aún es insuficiente y que, de hecho, hay ecuaciones cuyas soluciones no pueden representarse por fórmulas medianamente manejables. 97

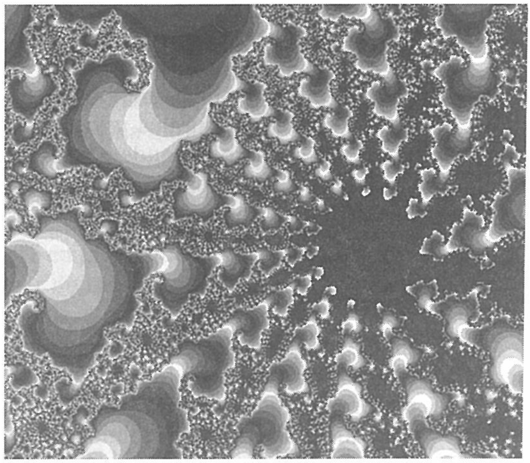
Las nuevas ideas que en ecuaciones diferenciales llevaron finalmente a la teoría del caos tienen su origen en los trabajos de Poincaré, Lyapunov, Birkhoff, entre otros, a finales del XIX y principios del XX. La observación fundamental de Poincaré fue que muchas de las cuestiones que nos interesan son esencialmente cualitativas (¿Habrá un choque de planetas?, ¿Hay una órbita que salga cerca de la Tierra y vaya cerca de la Luna sin gastar combustible?). La respuesta a estas preguntas debería poder obtenerse sin pasar por fórmulas, debería bastar con razonar sobre aspectos cualitativos. Recuérdese que las matemáticas son solamente un método que permite razonar con una seguridad perfecta. Si se es bastante cuidadoso e imaginativo se puede hacer una teoría matemática de cualquier aspecto del mundo.

Un típico ejemplo de estos razonamientos cualitativos en ecuaciones diferenciales es la observación de que si se nos dice que tenemos una corriente que está siempre entrando en cada punto de la superficie de una esfera, entonces dentro de la esfera tenemos un punto en el que la corriente está quieta. Este método de razonar fue bautizado por Poincaré con el nombre de *Analysis Situs* y es conocido hoy en día con el nombre de topología. Desde su creación a finales del siglo XIX, la topología pasó por un periodo fundacional y el descubrimiento de nuevas aplicaciones en otras áreas. Pero fue a finales de los años sesenta cuando muchos topólogos que habían refinado enormemente su arsenal volvieron a lo que era el origen de su disciplina: las ecuaciones diferenciales.

Uno de los descubrimientos que básicamente se remontan a esa época es la llamada *dependencia sensitiva a las condiciones iniciales*, el llamado *efecto mariposa*. Este pintoresco nombre viene del meteorólogo E. Lorentz, que observó en los años sesenta que un error imperceptible, como el causado por el batir de las alas de una mariposa, incluido en las ecuaciones de la atmósfera podía crecer hasta ser del tamaño de un huracán en unas semanas. Este efecto ya se conocía entre matemáticos como Lyapunov, pero el paso fundamental fue darse cuenta de que no era sólo una patología elucubrada por matemáticos, sino que solía ocurrir en la naturaleza. Este efecto viene a decir que en muchos sistemas, si las condiciones iniciales sólo se conocen con una precisión limitada, al cabo de poco tiempo el conocimiento de las trayectorias se pierde por completo. Nótese que si se conocen las condiciones iniciales con una precisión completa también las trayectorias están determinadas con una precisión completa pero si la precisión no es total, entonces las trayectorias parecen impredecibles y caóticas. O sea, los errores crecen exponencialmente como el interés compuesto del dinero en el banco.

97 La teoría de cómo describir las regularidades en promedio y de cómo hacer predicciones sobre ellas fue desarrollada de una manera tentativa por Laplace. Estas regularidades eran muy sorprendentes (por ejemplo, se aplicaban a hechos tan íntimos como el número de bodas o de nacimientos) pero también perfectamente verificables. Sin embargo, aparte de sus innegables éxitos prácticos, la estadística y la teoría de probabilidades no han tenido una base firme hasta hace muy poco. Kolmogorov en los años treinta se da cuenta de que si se hace un diccionario en el que probabilidad se sustituye por medida y las construcciones del cálculo de probabilidades se traducen en otras de la teoría de la medida, se obtiene una teoría matemática coherente. Resulta así que los razonamientos en medida o probabilidad no son distintos, son simplemente razonamientos en un idioma distinto. Un idioma tan próximo que de hecho la traducción es mecánica. Kolmogorov puede entonces aprovecharse del trabajo desarrollado poco antes por Lebesgue y otros, obteniendo así una base perfectamente coherente para el cálculo de probabilidades. Kolmogorov y sus discípulos no se quedaron ahí. Armados de este poderoso lenguaje, atacaron muchos problemas que antes ni siquiera podrían haber formulado. Desarrollaron asimismo una enorme cantidad de herramientas. Algunas de ellas, como la noción de entropía de Kolmogorov-Sinai es fundamental para la teoría del caos. Hay que destacar también que la entropía de Kolmogorov-Sinai es exactamente el mismo objeto que aparece en la teoría de la información de Shannon, uno de los logros más brillantes de la vida intelectual de este siglo que, además de elegante, ha hecho posible todo el desarrollo moderno de la ingeniería de comunicaciones.

Todas estas teorías, y algunas otras que mencionaremos más tarde, convergen en los años cincuenta y sesenta. Esta época es desde el punto de vista de las matemáticas puras los años de la explosión de la teoría del caos. A ésta pertenecen los teoremas KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) y la teoría de sistemas hiperbólicos que aun hoy son las bases de la teoría del caos. Un poco más tarde el ordenador se une a estas herramientas; al ser los razonamientos necesarios muy cualitativos los cálculos con ordenador, siempre afectados de error, son aceptables. Ya a finales de los setenta los ordenadores desarrollan capacidades visuales y empiezan a producir dibujos con una cantidad razonable de esfuerzo y gasto.



Con todos los personajes ya en escena, sólo quedaba esperar la señal de partida. Para los matemáticos, la revolución del caos estaba servida. Los físicos necesitaron un poco más de tiempo hasta que empezaron a usar el lenguaje y ver que se aplicaba a la realidad.

La física del caos

Otro de los desarrollos que convergieron en la revolución del caos fue la formulación matemática de la mecánica estadística. Era ésta una disciplina un poco mágica iniciada al final del siglo XIX por L. Boltzman y el nombre utilizado para denominar a la teoría era ya una paradoja. No estaba claro qué tenía que ver la mecánica determinista con la estadística. La idea básica era que si suponemos que las partículas tienen propiedades estadísticas y las hacemos evolucionar de acuerdo con una ley determinista, algunas de estas propiedades estadísticas se conservan. Desgraciadamente, a pesar de enormes éxitos tales como predecir la viscosidad de los gases, aspectos cuantitativos del movimiento browniano y otras cosas, la mecánica estadística estaba plagada de paradojas y de argumentos incomprensibles. 97

Una versión de la mecánica estadística del equilibrio que era rigurosa empezó a aparecer en los años sesenta en los trabajos de Dobrushin, Ruelle, Lanford, Sinai, Gallavotti y otros. Desde el punto de vista de la teoría del caos que ahora nos ocupa, el punto culminante es el trabajo de Sinai (seguido después por Ruelle y Bowen) que demuestra que las probabilidades de ocupación de puntos en un sistema caótico pueden ser descritas y calculadas con los métodos de la mecánica estadística. Aparte de una nueva tecnología para hacer cálculos, esto brinda un nuevo conjunto de intuiciones: a algunos fenómenos caóticos se les pueden aplicar los métodos de la termodinámica.

La unificación de ideas alcanza entonces un nuevo nivel. Los matemáticos que trabajaban en la teoría del caos en los sesenta, hablaban un lenguaje que unificaba a la vez los fenómenos deterministas, los estadísticos, la teoría de la medida y aspectos de la termodinámica. Al ser las matemáticas las mismas pueden sacar partido de intuiciones y conceptos de todos esos campos. Problemas imposibles de formular hasta entonces pueden resolverse inmediatamente.

Uno de los avances que galvanizan a los físicos es el descubrimiento, simultáneo e independiente por M. Feigenbaum en EE. UU. y P. Coullet, C. Tresser en Francia, de que existen unas leyes de escala universales; es decir, en el momento en el que empieza el caos en algunos sistemas, magnificando las trayectorias por un numero mágico que no depende del sistema, se obtiene un dibujo muy parecido al original. Esto aclara muchas observaciones (descriptivas) de Mandelbrot que había encontrado fenómenos semejantes en muchos aspectos de las ciencias naturales y los había popularizado con gran celo. Más tarde, este fenómeno se extiende a más variables y se formula de una manera matemáticamente precisa por J. P. Eckmann, J. Epstein, P. Collett, H. Koch y O. Lanford.

Conclusión

Una vez que este conocimiento se propaga, van apareciendo en campos muy diversos nuevos fenómenos que encajan en el paradigma. Ciertamente en astronomía y mecánica celeste, pero también en análisis numérico, en láseres y en muchas otras disciplinas experimentales como la química, la biología e incluso en campos no experimentales como la economía. El desarrollo del útil matemático ha permitido enunciar o interpretar nuevamente las leyes físicas. La verificación experimental de estas leyes ha cambiado nuestra visión del mundo.

97 De cara al futuro se desarrollan nuevas aplicaciones en todas las fronteras de las ciencias naturales y humanas mientras se precisan nuevas técnicas matemáticas. En mi opinión, algo muy fructífero en los próximos años será el desarrollo de una teoría de ecuaciones en derivadas parciales semejante a la desarrollada para las ecuaciones ordinarias. Hay patrones y formas (espirales, rectángulos) que se reproducen en fenómenos muy diversos y es muy posible que tengan una explicación muy semejante. Por otra parte, los métodos numéricos necesitarán también un desarrollo más profundo.

Bibliografía

Baker, R. y Gollub, J.: *Chaotic Dynamics*, Cambridge Univ. Press 1996; una lectura que introduce los problemas científicos con muy pocos requisitos.

Dahan Dalmedico, A. et al. (eds.): *Chaos et determinisme*. Editions du Seuil, 1992; una colección de ensayos de muy alto nivel.

Gleick, J.: *Caos*. Seix Barral, 1988; una historia (no siempre precisa) pero muy legible.

Nusse, H. y Yorke, J.: *Dynamics*. Springer 1997; una introducción visual con muy buen software.

Ruelle, D.: *Chance and Chaos*. Princeton Univ. Press (1991); es una visión general.

[**Nota:** Estas notas han sido preparadas con la ayuda de Angel de la Llave y Ramona González a partir de un texto más amplio].