NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 33, marzo de 1998, páginas 27-38

Jugando con potencias y raíces

José Muñoz Santonja, Jesús Fernández Domínguez y Virginia Carmona Soto

Resumen

En el artículo se presentan una serie de actividades basadas en juegos y pasatiempos matemáticos de la prensa, pero adaptados a los conceptos de potencias y raices.

Abstract

In this article we present some activities based on mathematical games and puzzles from newspapers and magazines, adapted to power and root concepts.

Introducción

En estas páginas queremos presentar algunas actividades basadas en juegos y pasatiempos matemáticos clásicos de la prensa, adaptados por nosotros a los conceptos de potencias y raíces.

Juegos y pasatiempos en clase de matemáticas

Desde hace años estamos preocupados por la dificultad que entraña motivar a nuestros alumnos en la clase de matemáticas. Suelen llegar con una predisposión negativa hacia la asignatura, lo que muchas veces crea una barrera infranqueable. Para derribar esta barrera y motivarles, hemos procurado hacer las matemáticas atractivas y divertidas, dentro de lo posible. Así, trabajan la materia con más dedicación de la que demuestran normalmente.

Utilizamos desde hace tiempo en nuestras clases juegos matemáticos del estilo a los que utiliza el grupo Azarquiel para el tema de Algebra (Azarquiel; 1991) o pasatiempos sacados de las revistas y prensa en general, sobre todo en el apartado de Números (Cuadro aritmético, Sucesión, Apunten, Sumafrutas, Buscanúmeros, Mutación numérica, etc...) de los que se pueden encontrar en los libros de Secundaria, pero siempre procuramos sacarle el mayor rendimiento posible, ampliando un poco las exigencias o cálculos por hacer.

Como ejemplo de lo que hemos hecho en clase con lo sacado de los periódicos, partamos de un clásico «Enlosado numérico» de los que presenta

JURJO en el suplemento semanal de pasatiempos de El País.

Partiendo de la casilla que señala la flecha, pasando de casilla en casilla y efectuando las operaciones que correspondan (según marcan las flechas), hasta salir por una de las casillas superiores, con un resultado igual al indicado sobre la parrila. Sólo se puede pasar una vez por una casilla. Por las negras no se pasa.

9	0	■
1	4	8
1	2	■
6	5	9
■	3	0
	↑	

(suma) ↑ ← →

(resta) ↓

(multiplica) ↖ ↗

(divide) ↙ ↘

Como ocurre con cualquier otro recurso didáctico, cuando se utilizan en las clases pasatiempos sacados directamente de revistas o periódicos, es conveniente que el profesor los haya trabajado previamente; pues no es raro que haya algún error en el enunciado o en la solución, o lo que es mucho más frecuente, que existan soluciones distintas a la señalada, con las que los alumnos nos sorprenden en medio de la clase. Por ejemplo, en el ejercicio antes señalado, la solución que aparecía en el suplemento de pasatiempos era: (3×9×2:6+1+1+9=20); mientras que los alumnos encontraron otra mucho más evidente: (3+5+6+1+1+4+0=20).

En este ejemplo en particular, aparte del problema planteado en el suplemento del diario, nosotros hemos trabajado otros aspectos: encontrar todos los caminos posibles (si existen más de uno) e indicar cuál es el que pasa por menos casillas; una vez encontrado el camino, escribir la serie de números y operaciones que dan lugar al resultado. Al hacerlo no es raro que aparezcan problemas con la jerarquía de operaciones y la falta de paréntesis, ya que escriben tal como van dando los pasos en la cuadrícula (se puede utilizar una calculadora jerárquica o hacer los cálculos en la pizarra, para que se den cuenta de las posibles equivocaciones). Hemos utilizado este tipo de ejercicio para insistirles en la necesidad de escribir correctamente las operaciones.

Otra posibilidad es desechar el número final (20) y pedirles que encuentren qué camino dará lugar al mayor número y cuál al menor. O manteniendo el 20 final pedirles que razonen si puede existir algún camino que incluya la casilla que tiene el número 8.

Como se puede ver, un mismo problema puede dar lugar a muchas cuestiones distintas. Nosotros procuramos siempre añadir preguntas variadas para los distintos niveles de conocimientos que hay en la clase. Así, hay alumnos que se quedan en la mera búsqueda del camino y otros que pueden idear estrategias de optimización. Lo cierto es que todos comienzan a hacer matemáticas, cada uno dentro de sus posibilidades, y ninguno queda descolgado.

Planteamiento del trabajo

Utilizábamos estos pasatiempos y juegos en distintas partes de la materia de primero de B.U.P., pero había un tema que siempre se nos «resistía» a esas posibilidades. Nos referimos a las potencias y a las raíces. Nos parecía una parte muy repetitiva y por más que intentábamos buscar actividades que motivaran a los alumnos, no encontrábamos nada de nuestro gusto. En la parte de potencias habíamos intentado aprovechar noticias científicas de la prensa, como la actividad que aparece en el Anexo I, pero el resto de operaciones nos parecían muy áridas.

Por tanto, decidimos adaptar las actividades que usábamos en otras partes a las potencias y raíces; así aparecieron las que vamos a presentar a continuación. Hemos hecho una selección y las traemos aquí tal como se les presentan a los alumnos. Además, hemos querido añadir comentarios sobre cómo llevarlas a la clase o algún problema que se nos haya presentado en el desarrollo de la actividad.

Actividades con potencias y raíces

1.- Cuadrado mágico de potencias

En el siguiente cuadrado mágico todos los números que aparecen son potencias de base 2. Escríbelos como potencia y comprueba que el *producto* (ojo, no la suma) de las filas, columnas y diagonales da lugar a un mismo número. ¿Cuál es ese número? ¿Qué número debe aparecer en el lugar de la interrogación para que sea de verdad un cuadrado mágico multiplicativo?

16	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{8}$	2	?
4	8	$\frac{1}{4}$

Comentario:

Se puede hacer también un cuadrado de cuatro por cuatro, aunque en ese caso convendría situar más interrogantes en las casillas.

Así mismo, es posible sustituir las fracciones por decimales (es decir, 1/8 por 0'125) con lo que tienen previamente que pasar a fracción los decimales. Siempre hay que insistirles en que trabajen con los números como potencias, pues si no, los multiplican directamente. Se podría poner potencias de «a» en lugar de 2, pero entonces se pierden los cálculos de tener que convertir los números en potencias.

Algunos alumnos tienen problemas con el 1, pero así repasamos las potencias de exponente cero.

2.- Damero de potencias

Partiendo de cualquier casilla blanca de la fila inferior, buscar un camino, realizando el movimiento de la dama, sabiendo que ⇖ divide y ⇗ multiplica, hasta salir por una de las casillas superiores con un resultado igual al indicado.

1

2		2^2	
	2^4		2
2^5		2^3	
	2^2		2^4

6

$2\cdot3$		$3^2 2^2$	
	$2^2 3$		2^2
$2\cdot3$		$2\cdot3^2$	
	$2^3 3$		$2^2 3$

1

5		5^{-1}	
	5^2		5^{-3}
5^4		5^{-2}	
	5^3		5

Comentario:

Se han puesto los números expresados como potencias. Se podría haber hecho, como en el caso anterior, sustituyéndolos por el resultado de los productos (para que tuvieran que descomponer en factores), pero ya buscar el camino plantea suficiente dificultad como para complicarlo aún más. Se podría escribir uno de los tres (por ejemplo el de enmedio) con las potencias multiplicadas, para aquéllos que tienen más destreza en encontrar los caminos.

3.- Enlosados radicales

a) Partiendo de la casilla inferior marcada, y sabiendo que ↑ suma, ← → restan y ⇖ ⇗ multiplican, alcanza el número indicado, saliendo por cualquier casilla de la fila superior.

b) Escribe la expresión radical del camino elegido, respetando la prioridad de operaciones, y opera, para comprobar si el resultado es correcto.

18

$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	-6
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$

↑

4.- Laberinto de radicales

Partiendo de la casilla superior izquierda, buscar un camino, pasando de una casilla a otra lateral, superior o inferior, sabiendo que los radicales de ambas casillas tienen que ser equivalentes, hasta salir por la casilla inferior derecha.

$\sqrt{8}$	$8^{\frac{1}{2}}$	$4^{\frac{1}{4}}$	8
$\sqrt{2^3}$	$2\sqrt{2}$	$2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$	$4^{\frac{1}{3}}$
$2^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[4]{2^6}$	$2^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt[4]{4^3}$
$\sqrt[4]{16}$	4	$2^{\frac{6}{4}}$	$\sqrt[4]{64}$

Comentario:

Se puede pedir a los que encuentren pronto el camino que agrupen las distintas raíces y potencias por conjuntos equivalentes.

Hasta el momento hemos planteado actividades para realizar individualmente, aunque también se pueden hacer por parejas, según como estén sentados. Las que siguen son para realizar en pequeños grupo.

5.- El dado radical

Participantes y material:

- Cuatro jugadores
- Dado cúbico

Reglas del juego:

1) En cada turno de juego uno de los cuatro alumnos actuará de árbitro. La primera vez se tirará el dado y comenzará de árbitro el que saque mayor puntuación. Después por turno irán pasando los demás por el puesto.
2) El que actúa de árbitro lanza el dado dos veces, el primer número representa el índice de una raíz y el segundo el exponente del radicando cuya base será 3.
3) Los participantes deben simplificar el radical que ha aparecido. Pasados 30 segundos, el árbitro comprobará quién lo ha hecho correctamente y se le anotará un punto. El árbitro es el encargado de asegurarse de que los participantes no se copian unos a otros.
4) Cada juego constará de 8 turnos (dos para cada alumno haciendo de árbitro). Al final de ellos se sumarán los puntos conseguidos y ganará el alumno que haya conseguido mayor puntuación.

PUNTUACION DEL GRUPO

JUGADORES \ TURNOS	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Total

Comentario:

Con la misma idea del juego, se pueden cambiar algunas reglas para hacerlo más fluido.

Se puede dejar la base desconocida de entrada y a cada grupo indicarle una base distinta. O cambiar la base según el juego que se esté haciendo (pues se puede repetir varias veces el juego en una misma sesión de clase), así, se les puede indicar en sucesivos juegos las bases del radicando como 9, 27, 81, etc... con lo que tienen que trabajar más las potencias.

Si es difícil impedir que se copien los alumnos, se puede cambiar la regla nº 3, puntuando solamente el primero que lo resuelva correctamente. En este caso, para impedir que acapare toda la puntuación el que tenga más destreza resolutiva, se puede poner la condición de que el que gane un turno actúa de árbitro en el turno siguiente.

A partir de este juego y basado en los juegos de fracciones y divisores del Grupo Cero, montamos el juego siguiente (al que conviene jugar después de haber practicado varias veces con el anterior).

6.- Juego de radicales

Participantes y material:

- Dos jugadores.
- Un dado tetraédrico.
- Un dado cúbico.
- Cuatro fichas (de distinto color) para cada jugador.
- Un tablero como el que se acompaña.

2		2^3	$2 \cdot \sqrt[5]{2}$
$\sqrt[5]{2^4}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{2^2}$	
	$2 \cdot \sqrt[5]{2^3}$	$2^2 \cdot \sqrt[3]{2}$	2^4
$2 \cdot \sqrt[3]{2}$	2^2		1

Reglas del juego:

1) Cada jugador lanza el dado cúbico y el que saque mayor puntuación comienza. Se juega por turnos.
2) El jugador que tiene el turno lanza los dos dados. Si en alguno de ellos sale un uno, vuelve a lanzarlo hasta que consiga un número distinto de uno.
3) El número obtenido en el dado cúbico será el índice de la raíz y el del dado tetraédrico será el exponente del radicando cuya base será el número 4. El participante debe simplificar el radical obtenido y colocar una ficha en el tablero en el valor simplificado, siempre que no haya puesto ya con anterioridad una ficha en dicho lugar. Si no puede hacerlo, pierde su turno. Si el contrincante observa que ha simplificado mal, la ficha es retirada del tablero y el jugador pierde el turno.
4) Gana el juego el primero que consigue colocar sus cuatro fichas sobre el tablero.

Comentario:

Se puede aumentar el número de fichas de 4 a 6, según lo que se desee que dure el juego.

Para obligar a los alumnos a hacer todas las operaciones y no aprovecharse de las que ya haya hecho el contricante, se puede poner la restricción de no colocar ficha donde haya una puesta, sea propia o del contrario.

Si se quiere, se puede jugar con el mismo tablero y sin la restricción de quitar los valores 1 de cada dado. Basta indicar en el apartado 3 que si el valor simplificado no aparece en la tabla o ya está ocupado por otra ficha, se pasa el turno.

7.- Puzzle de potencias

En el Anexo II figura un puzzle basado en los puzzles algebraicos del Grupo Azarquiel, en el que hay que trabajar todos los conceptos que se ven en los números, desde operaciones con fracciones, decimales, simplificaciones y potencias de exponente entero.

La forma de utilizarlo es la siguiente: A los alumnos, distribuidos en grupos de cuatro o cinco, se les entrega una copia del puzzle ya cortada (lo ideal es fotocopiar el puzzle en cartulina y una vez recortado plastificar las 24 fichas, así sirve para más sesiones). El juego consiste en construir correctamente el puzzle. Tal como está proyectada esta actividad requiere más de una clase para poder montarlo completamente, incluso para los alumnos con más soltura. Queda a juicio del profesor la posibilidad de recortarla, eliminando alguna columna o algunas filas de tarjetas.

Se debe pedir a los alumnos que escriban en su cuaderno todas las operaciones que hagan para emparejar expresiones, y así les sirve de repaso de la materia.

Conviene avisar a los alumnos que tengan mucho cuidado con los signos menos, pues hay resultados que sólo se diferencian en un menos como 4^2 y -4^2. Esta ha sido una de las actividades que nos ha dado más frutos, pues permite, al acabar el bloque de Números (que es cuando se propondría) repasar prácticamente todas las operaciones que se han visto. Además, suelen aparecer los errores tipo de este bloque, en cuyo caso es imposible de montar el puzzle. Esto nos sirve para volver a insistir en esos errores.

Aunque nosotros siempre lo hemos utilizado en clase, se podría fotocopiar el puzzle desordenado y mandarlo como trabajo para casa, teniendo los alumnos que traerlo bien montado.

Comentario general a las actividades

Las actividades anteriores, que se resuelven de forma individual, las hemos propuesto tanto en clase normal como en los ejercicios o controles que hemos puesto a nuestros alumnos, es decir, también han sido preguntas de examen (por supuesto, después de haber trabajado de forma análoga en clase).

En general, salvo indicaciones ya expuestas, todas las actividades requieren poco tiempo para ser resueltas. Una sesión de clase permite hacer varios juegos. Por supuesto, las primeras veces que se llevan actividades de este tipo el alumno tiene que dedicar mucho más tiempo, pero poco a poco las resuelve o las afronta con más decisión y con menos errores.

Estas actividades deben plantearse como refuerzo a los conceptos que presentan, es decir, deben llevarse al aula cuando los alumnos ya han realizado esas operaciones previamente. Y nosotros las hemos comenzado a utilizar cuando los alumnos ya habían practicado previamente con los pasatiempos numéricos sacados de la prensa, con lo cual la dinámica de trabajo ya la conocían, por ello no les ha resultado complicado entender las reglas.

Con nuestra experiencia de años anteriores, hay que decir que los alumnos toman estos ejercicios con más interes que los clásicos que poníamos de descomponer en productos de potencias o hacer operaciones con raíces. Quizás no se den cuenta de que cuando juegan también hacen matemáticas.

Conclusión

Como se ha comprobado por los ejemplos anteriores, no hemos pretendido ser originales a la hora de inventarnos actividades para jugar con las potencias y raíces, simplemente hemos adaptado a nuestras necesidades las que conocíamos, o a partir de ellas hemos creado otras.

La idea de este artículo, aparte de presentaros lo que hemos hecho en nuestras clases, es demostrar que cualquier profesor con un poco de interés puede adaptar elementos que tiene alrededor, como los pasatiempos matemáticos de la prensa, que por ser entretenidos y distintos a los problemas «normales» son atractivos para nuestros alumnos. Por supuesto, también os animamos a que utilicéis en clase las actividades que os proponemos, pues, al menos en nuestro caso, han resultado interesantes y motivadoras; además se consigue que prácticamente ningún alumno se descuelgue por principio. Y desde luego, los profesores nos hemos entretenido más que con una visión clásica de esta parte de la materia.

Y por último como diría el profesor Claudi Alsina, sólo añadir: «Sean felices».

Bibliografía:

Azarquiel, Grupo (1991): "Ideas y actividades para enseñar Algebra". *Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje nº 33*. Editorial Síntesis. Madrid.

Cero, Grupo (1990): De 12 a 16. *Un proyecto de curriculum de matemáticas. 6 vol.* Conselleria de Cultura, Educació i Ciéncia, Generalitat Valenciana. Valencia

José Muñoz Santonja
Jesús Fernández Domínguez
I.E.S. Macarena (Sevilla)

Virginia Carmona Soto
I.E.S. Benacazón (Sevilla)

Anexo I:

MIÉRCOLES 9-11-94 **CIENCIA**

Descubierta la galaxia más lejana del Universo con un telescopio de Canarias

Está situada a más de ocho mil millones de años-luz de la Tierra

Madrid. A. Aguirre de Cárcer

La galaxia más lejana del Universo ha sido descubierta en la Constelación del Dragón por astrofísicos británicos, holandeses y de EE.UU. con ayuda del telescopio William Herschel, situado en el Instituto Astrofísico de Canarias. Aunque la distancia en años luz de la galaxia no ha sido calculada con precisión, está tan lejos de nuestro planeta que el Universo sólo ocupaba un 19 por 100 de su tamaño actual cuando la luz de la galaxia empezó su viaje hacia la Tierra.

Lee con atención el encabezamiento del artículo adjunto tomado del periódico ABC de Sevilla.

Escribe en notación científica, la cantidad de años luz que separa la Tierra de la galaxia descubierta.

Sabiendo que un año luz equivale a $9{,}46\times10^{15}$ metros, escribe aproximadamente la distancia que existe entre la Tierra y la nueva galaxia, expresada en metros.

Si una nave espacial pudiera viajar a la velocidad de la luz que es 299.800 km/seg., ¿cuántos años solares tardaría en llegar a esa galaxia desde la Tierra?

Anexo II:

$\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-4}$

3^6

$\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{8}$

$\left(\frac{3}{4}:\frac{5}{6}\right)^3$

---

c^2

-4^2

3^2-2^2

$\left[\frac{3^2(-2)}{6}\right]^2$

$2^{-3}3^6 5^{-3}$

$3^5\cdot 10^{-15}$

$[-3^2]^3$

$\frac{a^2+ab}{a}$

3^2

-3^6

a^2+b

$\left(1-\frac{2}{5}\right)^3$

$a+b$

$-a$

3^{-4}

$\left(2-\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$3^3 5^{-3}$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

$a+ab$

$\left(1'3-\frac{4}{5}\right)^{-2}$

$\frac{2}{3}$

$a^2\cdot 10^{-2}$

$2\cdot(-1)^{325}$

$-\left(1'\widehat{3}:\frac{12}{9}\right)^{-2}$

4

-2

$\frac{b}{a}$

$a^2a^3a^{-1}a$

-1

$-\frac{4}{3}$

$2+2^{-1}$

$\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^3\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^3$

---

a^5

$\frac{5}{2}$

$1'7\widehat{32}$

$(1'\widehat{11}\cdot 3)^{-2}$

$\left(-\frac{3}{5}\right)^{15}$

-2^5

$\left(\frac{4}{3}\right)^3\left(\frac{3}{2}\right)^4$

3^9

$(0'3)^2$

$2^2\cdot 3$

$\left(11-\frac{1}{2}\right)^3$

$2^5 7$

3^{18}

$-3\cdot 10^{-5}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

5^{3}

$\frac{1}{2}$ $(-4)^{5}:(-4)^{3}$

$\left[\frac{(-2)(-3)^{3}}{9}\right]^{2}$

6^{2}

7 10^{0}

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

2^{-10}

$3^{2}\cdot 2^{4}$ 10^{-8}

$\left(1+\frac{2}{3}\right)^{2}\left(1-\frac{2}{5}\right)^{3}$

$\frac{3}{5}$

10^{8} 3^{-2}

$\left[\left(\frac{3}{2}-4\right):\left(1-\frac{8}{3}\right)\right]^{4}$

$3^{4}\cdot 2^{-4}$

$\frac{(a-b)^{2}}{c}$ $[(-a)^{3}]^{-3}$

$(-3)^{2}(-3)^{3}(-3)$

$-\frac{4}{5}$

3^{-4} $(-3^{3})^{2}$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}:\left(-\frac{2}{3}\right)$

$2^{2}\cdot 3^{-2}$

4^{2} $\left(\frac{3}{10^{3}}\right)^{5}$

$\left(-1+\frac{1}{4}\right)^{2}$

$3^{2}\cdot 2^{-4}$

1 $(-a)^{3}:a^{2}$

$\left(\frac{5}{4}+10\right)^{2}$

$3^{4}\cdot 5^{2}\cdot 2^{-4}$

$(0'01)^{4}$ $(0'a)^{2}$

$\left(\frac{16}{5}-1'2\right)^{-3}$

2^{-3}

$\frac{1}{3^{2}}$ $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$

$\left(1-\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$-\frac{6}{7}$

$-a^{-9}$ $(-2)^{3}\cdot 2^{2}$

17