

## Problemas comentados

### A cargo del Club Matemático

En el número 47 de la Revista, correspondiente al mes de septiembre, comentamos dos problemas de los que decíamos que eran sencillos, aptos para ser utilizados con alumnos de cualquier edad, que podían ser resueltos sin grandes conocimientos matemáticos y cuyo principal objetivo era enseñar a pensar a nuestros alumnos, utilizar el razonamiento como herramienta fundamental de la resolución de problemas.

Al final de esa primera entrega de la sección invitábamos a la participación de los lectores para convertirla en algo interesante y vivo. Es demasiado pronto para recibir aportaciones, lo sabemos, y por ello reiteramos la invitación. Envíen nuevos comentarios a los problemas presentados, aportando rectificaciones, valoraciones, nuevos enfoques, experimentaciones en clase y sus resultados, nuevos problemas que consideren interesantes. En los próximos números esperamos que el contenido de la sección gire más alrededor de las aportaciones de los lectores que de las nuestras propias, que se limitarán a coordinar o estimular.

A través de la resolución de problemas debemos considerar qué objetivos nos proponemos y qué herramientas utilizaremos al plantear esta actividad en la clase. En primer lugar es importante entender que, básicamente, pretendemos enseñar a los alumnos a resolver problemas no habituales en la clase, donde casi siempre son de aplicación de conocimientos relacionados con el tema en curso. Eso significa que debemos al mismo tiempo dotarles de las herramientas de resolución necesarias para que tengan éxito en la tarea. Por otra parte, no debemos olvidar que con estos problemas se pueden introducir elementos de conocimiento matemático más profundos o refinados que los ya expuestos en la clase y permitir así un mayor rendimiento sin aparente esfuerzo.

Con respecto a la primera consideración, en el transcurso de la elaboración y después en la corrección que debe ser colectiva, de manera preferente, debemos enseñar y utilizar aspectos de estrategia, de herramientas y de pensamiento lógico de una manera progresiva y consciente. Nosotros, en particular, hemos simplificado la estrategia general de resolución condensándola en tres momentos básicos: la comprensión, la ejecución y la solución. Así damos a esos tres pasos los nombres de Diagrama-Razonamiento-Respuesta, y exigimos que se detengan en ellos y los expresen por escrito como transcripción fiel de su pensamiento y su manera de hacer.

En el primer paso del proceso tratamos siempre de enseñar herramientas que ayuden a la comprensión de la situación, explicando una serie de diagramas lógicos, gráficos, algebraicos, o de cualquier tipo que sean útiles para expresar abreviadamente la misma. En el segundo paso introducimos la conciencia de los modos y estilos de pensamiento, además de los conocimientos matemáticos, que deben utilizar en forma de estrategias específicas, apropiadas a cada problema en particular, y combinarlas para garantizar el éxito de la ejecución. Finalmente, hacemos que los problemas terminen siempre con una respuesta escrita que consistiría simplemente en terminar la historia que nos plantea la situación problemática o contestando a la pregunta que realiza el problema; de esa manera, garantizamos que manipulen la solución del paso anterior y la conviertan en una verdadera respuesta, permitiendo la comprobación en los casos oportunos, la aparición de respuestas múltiples o, incluso, la generalización en los casos que se crea conveniente.

Para ejemplificar lo dicho anteriormente, traemos en esta ocasión otros dos problemas para comentar.

El primero, de razonamiento numérico, nos permite introducir algunos conceptos acerca de la estimación, el error, tipos de errores y valores intermedios. Simultáneamente, nos permite hablar de modos de trabajo y de pensamiento matemático como son la eliminación y la exhaustividad, herramientas que pueden utilizar más tarde en otros problemas diferentes a éste, pero con estructura similar.

**Problema n.º 1: En un concurso de televisión tres concursantes intentan acertar el número de judías que contiene un tarro de cristal. D. José dice que hay 260, D<sup>a</sup> María cree que hay 274 y D<sup>a</sup> Carmen propone que hay 234 judías. Sabemos que un concursante se ha equivocado en 9 judías, otro en 17 y otro en 31. ¿Puedes deducir cuál es el número de judías del tarro?**

### **Diagrama**

**Estimar** consiste en tratar de medir o contar una cantidad de una magnitud sin utilizar técnicas ni instrumentos de medida o conteo.

Al hacerlo es evidente y normal que se producirán errores. **Error** es la cantidad en que nos hemos equivocado al hacer la estimación. Ese error se puede calcular después al hacer uso de los aparatos de medida convenientes. Cuanto menor sea el error mejor es la estimación. Pero el error se

puede cometer de dos maneras: dando más de lo correcto (**por exceso**) o dando menos de lo correcto (**por defecto**).

Cuando se conoce la estimación y el error, la cantidad correcta se puede expresar así:

$$\text{Estimación} \pm \text{error} = \text{valor correcto}$$

### Razonamiento

Siendo las estimaciones 260, 274 y 234, y los errores 9, 17 y 31, el problema consiste en que no sabemos si esos errores son por defecto o por exceso o a qué cantidades son aplicables, y, por tanto, habrá que realizar todas las combinaciones posibles entre ellos.

$260 \pm 9$	$260 \pm 17$	$260 \pm 31$
$274 \pm 9$	$274 \pm 17$	$274 \pm 31$
$234 \pm 9$	$234 \pm 17$	$234 \pm 31$

Es decir, habrá dieciocho valores posibles. La respuesta será el único resultado que se encuentre en cada una de las tres columnas.

Esta manera de razonar se llama SER EXHAUSTIVO, escribir TODAS las posibilidades de un problema.

Pero si se razona un poco más, se puede evitar el tener que hacer todos esos cálculos. Se trata ahora de ELIMINAR aquellos cálculos que NO son posibles.

Para ello debemos tener en cuenta los siguiente:

- Puede que las tres estimaciones sean por exceso. Que las tres los sean por defecto. O que unas lo sean por exceso y otras por defecto.
- Si el mayor error es 31 y la menor estimación es 234, al sumar  $234 + 31$  obtenemos 265, que es un valor menor que la estimación mayor, 274. Eso quiere decir que el valor correcto deberá ser un valor intermedio, es decir, mayor que 234 y menor que 274. Estos dos valores tienen, entonces, error por defecto (274) y por exceso (234), respectivamente. Del valor 260 no sabemos nada.

Por lo tanto, para establecer el valor correcto no es necesario hacer los dieciocho cálculos anteriormente estudiados. Basta con estudiar tres por defecto para la tercera fila, los seis para la primera fila y otros tres por exceso para la segunda:

$234 + 9 = 243$

$234 + 17 = 251$

$234 + 31 = 265$

$260 + 9 = 269$

$260 + 17 = 277$

$260 + 31 = 291$

$260 - 9 = 251$

$260 - 17 = 243$

$260 - 31 = 229$

$274 - 9 = 265$

$274 - 17 = 257$

$274 - 31 = 243$

Ese único valor, 243, nos permite decir que la estimación de D. José tenía un error por exceso de 17 judías, la de D<sup>a</sup> María tenía un error por exceso de 31 judías y la de D<sup>a</sup> Carmen tenía un error por defecto de 9 judías.

Por lo tanto el número de judías del tarro era de 243 judías.

### Respuesta

#### El tarro tenía 243 judías.

El segundo problema es de un tipo muy conocido, porque es habitual encontrarlo en periódicos y revistas. Es de lógica y lo fundamental está en enseñarle a usar una herramienta tan útil como el cuadro de doble entrada y a desmenuzar la información dada por el problema, diferenciando las que son seguras, de las dudosas o de las inútiles, pero revisando continuamente la situación, porque a medida que se va obteniendo información clara, los aspectos dudosos o inútiles pueden cambiar y convertirse en informaciones claves.

**Problema n.º 2: Últimamente, a muchos jóvenes les ha dado por hacerse un tatuaje. Descubre en qué parte de su cuerpo los llevan cuatro de ellos, qué motivos eligieron y cuánto tiempo tardaron en dibujárselos. Para lograrlo, cruza todos los datos que se te aportan. Da la solución en el diagrama final.**

1. Marina lleva su tatuaje en el hombro.
2. Se necesitó el doble de tiempo para tatuar la serpiente que para grabar el delfín.
3. Juan se dibujó en la piel un corazón.
4. Quien se tatuó el tobillo dedicó 16 horas.
5. El tatuaje de Ernesto quedó listo tras 8 horas de paciente trabajo.
6. Silvia lleva tatuado un unicornio.
7. Quien lo lleva en la espalda tardó en tenerlo dibujado la mitad de tiempo que Silvia.

Nombres: JUAN, ERNESTO, MARINA, SILVIA.

Motivo: CORAZÓN, DELFÍN, SERPIENTE, UNICORNIO.

Parte del cuerpo: BRAZO, ESPALDA, HOMBRO, TOBILLO.

Tiempo de trabajo: 4 HORAS, 5 HORAS, 8 HORAS, 16 HORAS.

## Diagrama

Para razonar el problema es conveniente utilizar alguna manera de presentar los pasos del proceso de pensamiento uno a uno, de manera que estén siempre ordenados y tengamos presente qué cosas tenemos resueltas, cuáles dudosas y sobre qué otras aún no podemos tomar decisiones. Un buen diagrama es una TABLA DE DOBLE ENTRADA, donde cada columna aparezca encabezada por el tema común a los elementos que se colocan en ella. En este caso serían:

Nombre	Motivo	Parte del cuerpo	Tiempo

Aunque éste es el diagrama para la solución, debe retocarse un poco para razonar sobre él. Lo mejor es volver a dividir cada columna en cuatro partes, una para cada uno de los valores que puede tomar.

## Razonamiento

Dividiendo la tabla y denominando con la letra inicial cada opción, obtenemos la tabla siguiente:

Nombre	Motivo				Parte del cuerpo				Tiempo			
	C	D	S	U	B	E	H	T	4	5	8	16
Juan												
Ernesto												
Marina												
Silvia												

Ahora se toman las frases cuya información es completa y se trasladan a la tabla. Cada información supone un SÍ en el cuadro correcto y tres NO en horizontal y vertical.

Las frases 1, 3, 5 y 6 dan información completa. Traslada a la tabla, tendremos:

Nombre	Motivo				Parte del cuerpo				Tiempo			
	C	D	S	U	B	E	H	T	4	5	8	16
Juan	Sí	No	No	No			No				No	
Ernesto	No			No			No		No	No	Sí	No
Marina	No			No	No	No	Sí	No			No	
Silvia	No	No	No	Sí			No				No	

A partir de aquí, trataremos de encajar las restantes informaciones, dudosas o incompletas, dadas por las frases 2, 4 y 7.

La frase 7 indica una relación de doble-mitad con respecto a Silvia y al que está tatuado en la espalda. Como el tiempo de 8 horas ya está asignado a Ernesto, a Silvia le debe corresponder necesariamente el tiempo de 16 horas y, consecuentemente, el de la mitad es Ernesto que, por tanto, lo llevará en la espalda.

Nombre	Motivo				Parte del cuerpo				Tiempo			
	C	D	S	U	B	E	H	T	4	5	8	16
Juan	Sí	No	No	No		No	No				No	No
Ernesto	No			No	No	Sí	No	No	No	No	Sí	No
Marina	No			No	No	No	Sí	No			No	No
Silvia	No	No	No	Sí		No	No		No	No	No	Sí

La frase 4 indica ahora claramente que Silvia se tatuó en el tobillo.

Nombre	Motivo				Parte del cuerpo				Tiempo			
	C	D	S	U	B	E	H	T	4	5	8	16
Juan	Sí	No	No	No		No	No	No			No	No
Ernesto	No			No	No	Sí	No	No	No	No	Sí	No
Marina	No			No	No	No	Sí	No			No	No
Silvia	No	No	No	Sí	No	No	No	Sí	No	No	No	Sí

La frase 2 relaciona a los tatuajes de la serpiente y al delfín en doble-mitad. Descartadas las 16 horas que le corresponden a Silvia con un tatuaje de unicornio, sólo quedan las 8 horas de Ernesto para la serpiente y las 4 horas para el delfín que, por eliminación ha de ser de Marina.

Nombre	Motivo				Parte del cuerpo				Tiempo			
	C	D	S	U	B	E	H	T	4	5	8	16
Juan	Sí	No	No	No		No	No	No	No		No	No
Ernesto	No	No	Sí	No	No	Sí	No	No	No	No	Sí	No
Marina	No	Sí	No	No	No	No	Sí	No	Sí	No	No	No
Silvia	No	No	No	Sí	No	No	No	Sí	No	No	No	Sí

Por eliminación final, sólo queda asignar a Juan el tatuaje en el brazo y con una duración de 5 horas.

### Respuesta

Nombre	Motivo	Parte del cuerpo	Tiempo
Juan	Corazón	Brazo	5 horas
Ernesto	Serpiente	Espalda	8 horas
Marina	Delfín	Hombro	4 horas
Silvia	Unicornio	Tobillo	16 horas

Pues bien, esto ha sido la aportación de hoy. Esperamos sus comentarios, que se pueden hacer por escrito o mediante correo electrónico, dirigidos a la Revista o a la Sociedad, para la Sección de Problemas Comentados.

Para facilitar un poco más la comunicación se nos ocurre presentar dos problemitas extraídos de una revista portuguesa, con la intención de que sean los lectores quienes hagan el comentario sobre ellos. Cómo presentarlos, cómo resolverlos y cómo realizar la corrección y explicación posterior con los alumnos.

**Problema n.º 3: Celia, Edith y Mario pusieron el dinero que tenían sobre la mesa y comenzaron un juego en el que, quien pierde, divide el dine-**

ro que tiene en partes iguales para los otros dos. Hicieron seis jugadas y, al final, Celia se quedó con 11 euros, Edith con 3 euros y Mario sin nada. Ninguno de ellos perdió dos juegos seguidos. ¿Cuántos euros tenía cada uno al comienzo?

Problema n.º 4: El dueño de una cafetería recibe un nuevo lote de 20 kilogramos de café y quiere embalarlo en paquetes de 2 kilogramos. El problema está en que solamente dispone de una balanza de platos iguales y de dos pesas: una de 3 kilos y otra de 7 kilos. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que deberá hacer?

Bien, pues aquí queda todo de momento. De ustedes, lectores, depende la bondad de esta sección y su continuidad.

Ánimo y hasta el próximo *NÚMEROS*.

**Club Matemático.**