Problemas comentados

A cargo del Club Matemático

Una vez más un nuevo curso se inicia.

Una vez más nos llegan pocas reseñas de esta sección.

Una vez más cumplimos con nuestra cita trimestral.

Una de nuestras intenciones al elegir y comentar estos problemas, es la de brindar a los compañeros un material que sea aprovechable en clase o en las actividades de popularización de las matemáticas que puedan programarse en el centro. Ya comentamos en el artículo anterior la participación de una alumna en tales actividades. No se trata de problemas de la llamada matemática recreativa o que se resuelvan con una idea feliz; más bien se trata de problemas en los que hay que trabajar de una manera ordenada y sistemática aplicando los conocimientos y la experiencia adquiridos anteriormente, que pueden servir de planteamiento inicial antes de un tema o para utilizar unas propiedades después de haberlas explicado.

Pero sólo tenemos contadas referencias del uso que dan a este material alguno de nuestros colegas, y aunque ánimos no faltan, nos vendría bien algún comentario de los lectores. Ya saben nuestras direcciones electrónicas. Escriban.

Comenzamos con las soluciones a los ejercicios propuestos en el artículo anterior. Se usan técnicas semejantes para su resolución: encontrar las combinaciones posibles utilizando propiedades de los números que restringen el amplio abanico de valores posibles.

Problema nº. 14

Juanito compra lápices de colores a 18 céntimos cada uno; al cabo de un rato vuelve a comprar más, y esta vez el dueño de la papelería, en vista de que es tan buen cliente, se los deja a 17 céntimos cada uno. En total, Juanito se gasta en los lápices 351 céntimos. ¿Cuántos lápices ha comprado?

Planteamiento inicial

Siendo a el número de lápices que compra a 18 cent y b el número de lápices que compra a 17 cent, se cumplirá:

$$18\,a + 17\,\mathrm{b} = 351 \text{ cent}$$

Razonamiento

El razonamiento es muy sencillo:

Si los hubiera comprado todos a 17 cent, le hubieran dado 20 lápices por 340 cent

Si ha tenido que pagar 11 cent más (351), es porque 11 de los lápices valían 18 cent en lugar de 17.

Es decir, ha comprado 11 lápices a 18 cent y el resto a 17 cent

Respuesta. Juanito compró en total 20 lápices, 11 a 18 cent Y 9 a 17 cent

Claro que también se puede resolver como una ecuación diofántica, por ensayo y error, mediante el uso de una tabla y dando valores a las variables, buscando las combinaciones posibles. Pero parece más interesante el razonarlo de la forma anterior, ¿no es cierto?

Problema nº. 15

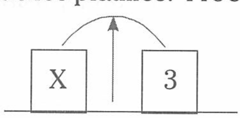
Tenemos una balanza y cinco pesas, respectivamente de 3, 6, 8, 12 y 16 gramos. Queremos pesar cantidades comprendidas entre 1 y 33 gramos (ambas inclusive); sin embargo, hay una (y sólo una) cantidad que no podremos pesar, con las cinco pesas de que disponemos en una única pesada. ¿Cuál es la pesada imposible?

Diagrama

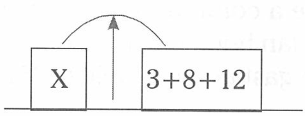
En una balanza de brazos iguales hay dos modos de pesar:

a) Las pesas en sólo uno de los platillos. Procedimiento que llamaremos aditivo.

una sola pesa: X = 3 g

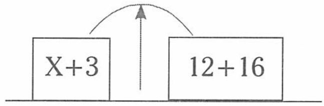


o varios pesas: X = 3+8+12 = 23 g



b) Pesas en los dos platillos. Procedimiento al que nombramos como sustractivo.

$X = 12+16-3 = 25$ g



Razonamiento

Un procedimiento para encontrar la pesada que falla se inicia buscando las combinaciones posibles por suma (a): primero con dos pesas, luego con tres, con cuatro y, no siendo necesario el hacerlo con las cinco, sin olvidar las pesas en solitario. Los valores que no se obtengan debemos intentarlos restando (b) a las combinaciones anteriores una o más de las pesas que no intervinieron en la combinación.

Otro consistiría en escribir los valores desde 1 a 33 y tratar de hallar una combinación de tipo aditivo o sustractivo que dé ese resultado.

En realidad, la mejor manera es un método mixto, empezando de forma sistemática para "pescar" el máximo de valores, y luego de manera más detallada para tratar de encontrar los valores que fallan.

Un cuadro de doble entrada puede simplificar los cálculos.

	3	**6**	**8**	**12**	**16**
3		9	11	15	19
6			14	18	22
8				20	24
12					28
16					

Ya tenemos pesadas para objetos de: 3, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 24 y 28 g.

Veamos cuando intervienen tres pesas en un platillo. (Obsérvese la forma en la que se ha construido la tabla)

	Las otras con 3				Con 6			Con 8		12
	9	**11**	**15**	**19**	**14**	**18**	**22**	**20**	**24**	**28**
3					17	21	25	23	27	31
6		17	21	25				26	30	34
8	17		23	27		26	30			36
12	21	23		31	26		34		36	
16	25	27	31		30	34		36		

ampliamos la lista de valores a: 3, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30 y 31 g (dentro de los valores 1 a 33 impuestos por el enunciado)

Es el momento de establecer qué valores nos faltan y buscarlos.

Faltan: 1, 2, 4, 5, 7, 10, 13, 29, 32 y 33.

Los cuadros anteriores nos ayudan a encontrar algunos de estos valores, especialmente los más pequeños, por diferencias.

Por ejemplo, 1 es la diferencia de 19 y 18 (primer cuadro); así que pondríamos en un platillo el objeto X+6+12 y en el otro 16+3. Al equilibrarse indican que X = 1 g. Cualquier otra pareja que no esté en una misma fila o columna, sirve para ser restada: 15 y 14, 26 y 27, ...

Para 2, nos valen 20 y 22: X+8+12 = 16+3.

Para 7= 18-11: X+8+3 = 12+6

Para 4 usamos las pesas de 12 y 8: X+8 = 12.

Para 5, las de 8 y 3: X+3 = 8.

Para 10, las de 6 y 16: X+6 = 16.

Para 13, las de 3 y 16: X+3 = 16.

Pero 29, 32 y 33 no se pueden obtener así. Veamos cómo entonces.

29 = 3+6+8+12, usando cuatro de las pesas.

33 = 3+6+8+16, de análoga manera

32 debe ser suma o resta de pesas o pesadas pares, pero no es posible: faltarían 4 g para 16+12+ ..., y no se pueden obtener sin usar las pesas de 16 y 12, ya necesarias, pues 4 es 16-12 ó 12-8..

Sólo sería posible obtenerlo combinando 12+16+8-x o 12+16+6-x, donde x representa otra de las restantes pesas, es decir: 36–6 = 30, 36–3 = 33, 34–8 = 26, 34–3 = 31.

Tampoco usando las combinaciones ya estudiadas, así que ésta es la pesada imposible

Respuesta. La pesada imposible, con esas pesas, consiste en conseguir pesar un objeto de 32 gramos.

Problema nº. 16

En un número de siete cifras (formado con el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), la suma de cada pareja de cifras sucesivas es siempre igual a la suma de la primera pareja o a la suma de la última. Encuentra al menos tres soluciones.

El número de 7 cifras supone 6 parejas que sumar:

a b c d e f g

Veamos las posibles sumas con las siete cifras:

	1	2	3	4	5	6	7
1		3	4	5	6	7	8
2			5	6	7	8	9
3				7	8	9	10
4					9	10	11
5						11	12
6							13
7							

Al ser seis las sumas, descartamos los totales de 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12 y 13 pues sólo hay una o dos maneras de obtenerlos. En otras palabras, pueden intervenir solamente las sumas 7, 8 y 9. Esto simplifica el problema. Si un extremo suma 7, el otro sumará 8 ó 9. Esto nos limita bastante las 7! permutaciones posibles.

Veamos otras limitaciones:

las cifras usadas en la pareja de la izquierda no pueden usarse en la pareja del extremo derecho. Así, si usamos el 3 y el 4 a la izquierda, a la derecha sólo son posibles las parejas 2 y 6 ó 7 y 1, para sumar 8, ó 7 y 2 para sumar 9.

las cifra para las tres posiciones centrales deben, dos a dos, sumar 7, 8 ó 9.

Lo intentamos comenzando con 34 a la izquierda y suma 8 a la derecha:

3 4 _ _ _ 2 6: nos dejaría 1, 5 y 7 para las posiciones intermedias; 5 y 7 no

pueden estar contiguos y por tanto las ordenaciones posibles son: 517 o 715, produciéndose en ambos casos una suma 6 que incumple las condiciones del enunciado.

Razonando análogamente para las terminaciones 71 (ó 17) y 72 (ó 27) vemos que, empezando por 34, no es posible una solución. Lo intentamos comenzando con 43 y hallamos que 4352617 sí cumple con las condiciones. También lo hace su invertido 7162534.

Las otras soluciones son:

1726354 y su invertido 4536271, y 1634527 junto a 7254361.

Respuesta. Hay seis soluciones en total: 4352617, 7162534, 1726354, 4536271, 1634527 y 7254361.

En la clase es difícil estimular al alumno para que aprenda las estrategias de resolución de problemas. Es un tema que debe ser complementado fuera del colegio.

Una buena ayuda consiste en conseguir que los niños y niñas resuelvan problemas fuera de la clase y sean ayudados para ello por otras personas. Sus padres o sus hermanos no les ayudarán en la ejecución de las tareas. No conocen las matemáticas que se precisan o están cansados para ello. Pero nunca dirán que no a resolver con sus hijos un problema de ingenio.

El CONCURSO DE PROBLEMAS DE INGENIO en la escuela tiene carácter trimestral o anual, según se quiera, y participan en él todos los alumnos de un determinado ciclo o todo el nivel, si se considera conveniente. Cada semana se plantean uno o varios problemas y cada alumno recibe la puntuación correspondiente al número de problemas bien resueltos. La hoja de problemas se entrega a todos los alumnos el lunes a primera hora. Se da una pequeña explicación y se indica el plazo de presentación: el viernes, antes del final de las clases.

Los alumnos tienen toda la semana la hoja de problemas en casa y la trabajan con las ayudas que quieran.

Se pueden conceder tres premios, globalmente o por ciclos. Los premios se piden a las casas colaboradoras o a la Asociación de Padres de Alumnos.

Las incidencias y puntuaciones se exponen en el tablero del Rincón. Los soluciones a los problemas se buscan o exponen colectivamente y haciendo hincapié en las estrategias utilizadas.

En el tablero del Rincón también se exponen las soluciones posibles, así como las mejores respuestas de los alumnos.

Cuando se quiere comenzar este tipo de actividad se calienta primero el ambiente haciendo propuestas sueltas de problemas atrayentes y vistosos, haciendo reuniones con los cursos para explicar la dinámica, etc.

La idea se puede completar haciendo que el día de la entrega de premios sea una fiesta en el colegio, con los ganadores de protagonistas. Esa fiesta puede tener además el carácter de Fiesta Matemática. Se puede organizar una carrera de obstáculos matemáticos del mismo tipo que las actividades del Taller, un espectáculo de Magia Matemática y la presentación de un juego nuevo que se jugaría en el patio, en un tablero de tamaño gigante, con los propios alumnos de piezas. Luego se pasaría al Taller donde los niños y niñas lo construirían en tamaño normal y le servirá de recuerdo durante el verano. Y a nosotros nos reconfortará.

Otra actividad muy reconfortante es la de reunirse con el grupo de alumnos que por su historial nos parezcan adecuados para presentarse al Torneo de Matemáticas para alumnos de 2º de la ESO que organiza anualmente la Sociedad Isaac Newton (la primera fase se celebrará en abril) y plantear problemas y ejercicios que sirvan de entrenamiento para su participación. Como saben nuestros socios, en la página WEB de la sociedad están los enunciados de los propuestos en los últimos Torneos; algunas de sus soluciones posiblemente se publicarán también en la página www.sinewton.org próximamente. Algunos los hemos publicado aquí.

Para ello basta con reunirse una vez a la semana con los alumnos, y pueden hacerlo, turnándose, los miembros del Departamento de Matemáticas incluyendo esta hora entre las no lectivas del horario, como actividad de biblioteca, de refuerzo, o cualquiera de las que la normativa permite.

Para continuar con problemas numéricos, ahí van estos dos:

Problema nº. 17

Un supersticioso tiene 159 monedas. Para evitar que se las roben, las dispone en montones de 13 y de 17, pues cree que estos números "nefastos" detendrán a posibles ladrones. ¿Cuántos montones de monedas ha formado?

Problema nº. 18:

Hallar el número entero más pequeño tal que, si la cifra de su extremo izquierdo se mueve a su extremo derecho, el nuevo número es tres veces y media el número original.

(Tomado de Mathematical Bafflers, Ed. Angela Dunn, 1964)

Y aquí queda todo de momento. Hágannos caso. Escriban mensajes a esta sección y cuenten sus soluciones y experiencias o, si lo prefieren, propongan sus propios problemas. Como siempre, esperamos sus noticias a la espera del próximo *NÚMEROS*.

Club Matemático.

El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón, del IES Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y Manuel García Déniz, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife).

mgarciadeniz@sinewton.org / jaruperezpadron@sinewton.org

Nota: En la sesión Problemas comentados del volumen 54 de *NÚMEROS*, en la página 63, segunda línea, dice 3.13.17.37 y debe decir 3.17.19.37.