

La desventaja de la media aritmética: cómo tratarla en clases

Carlos M. Rodríguez Arteaga (Centro Universitario. Isla de la Juventud. Cuba)

Alcides Cabrera Campos (Universidad de las Ciencias Informáticas. Cuba)

Fecha de recepción: 4 de diciembre de 2009

Fecha de aceptación: 6 de abril de 2010

Resumen

La enseñanza de la media aritmética dentro del programa de Estadística se realiza desde la enseñanza primaria hasta la universitaria pero no es frecuente tratar, con ejemplos prácticos, la desventaja de este estadístico ante la presencia de datos extremos. El presente artículo expone una experiencia de clases donde es necesario tener en cuenta esta desventaja.

Palabras clave

Media aritmética, EOS, mediana, experiencia de aula

Abstract

The teaching of the arithmetic mean inside the program of Statistics is carried out since the elementary education to the university student but is not frequent to treat, with practical examples, the disadvantage of this statistician before the presence of extreme data. The present article exposes an experience of classroom where is necessary to keep in mind this disadvantage.

Keywords

Arithmetic mean, classroom experience, EOS, median

1. Introducción

El establecimiento de estándares en los sistemas educativos de diversos países es una realidad. Lo anterior exige que profesores, investigadores y autoridades educativas analicen y valoren el panorama actual de la enseñanza de la Estadística en sus instituciones, incluyendo el método que lo fundamenta (Cuevas e Ibáñez, 2008, pp.34-38). Según estos autores los estándares propuestos por el National Council of Teachers of Mathematics en el año 2000 (NCTM, 2000) presentaron una tendencia hacia una enseñanza de la Estadística orientada a los datos.

En dichas recomendaciones se plantearon como propósitos, entre otros tantos, que los estudiantes de tercero a quinto grados debían ser capaces de usar las medidas de posición central, particularmente la mediana y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos mientras que para el sexto al octavo grados se planteó que estos alumnos fueran capaces de encontrar, usar e interpretar medidas de tendencia central y de dispersión, incluyendo la media y rango intercuartil.

La media aritmética es uno de los objetos matemáticos que se introducen desde edades tempranas. Ella, además de ser uno de los principales conceptos estadísticos, tiene muchas aplicaciones en cuestiones prácticas de la vida diaria. La formación de este concepto presenta gran complejidad, es por ello que varios autores abordan su enseñanza a través de investigaciones con



estudiantes de todas las enseñanzas. (Mochón y Tlachy 2003, pp.5-28), (García, I. y García Cruz, J. A 2004, pp.7-27) y (García Cruz, J.A y Garret, A. 2008, pp.49-66).

La media aritmética presenta ventajas y desventajas. Las ventajas son:

1. Es el estadístico más comúnmente usado
2. Es fácil de calcular
3. Se entiende fácilmente
4. Se presta a operaciones algebraicas

En cuanto a desventajas presenta una que es muy importante en la vida cotidiana y sobre la cual se trata en este artículo. Esta desventaja es que la misma está desproporcionalmente afectada por los valores extremos y que, por consiguiente, puede estar muy lejos de ser una representación de la muestra, por lo que no es recomendable usarla en distribuciones muy asimétricas.

2. Antecedentes

Batanero (2001) en su *Didáctica de la Estadística* describe un modelo de la actividad matemática basada en lo que después sus autores lo denominaron “Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática” (EOS) de Godino y colaboradores (2007) donde se desarrolla un marco teórico para la *Didáctica de las Matemáticas* desde un enfoque ontológico y semiótico el cual destaca la articulación de las facetas institucionales y personales del conocimiento matemático, la atribución de un papel clave a la actividad de resolución de problemas, a los recursos expresivos y la asunción coherente de supuestos pragmáticos y realistas sobre el significado de los objetos matemáticos.

La autora citada usa el concepto de media para contextualizar la discusión en el que se problematiza la naturaleza del objeto matemático media. Explica Batanero (2001, pp.68-75) que los astrónomos de Babilonia resolvieron problemas calculando la suma total de las observaciones y dividiendo por el número de datos, práctica que se ha conservado hasta nuestros días, dando origen a lo que hoy conocemos por media aritmética. Así este concepto evolucionó primero como útil implícito en la solución de problemas prácticos, más tarde como objeto de estudio en sí mismo.

Batanero (2001, pp.68-75) refiere que el estudio y caracterización de sus propiedades llevó progresivamente a la aplicación del concepto en la solución de otras situaciones problemáticas como las siguientes:

Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

La mencionada autora cita otros problemas similares donde se necesita obtener una cantidad equitativa a repartir para conseguir una distribución uniforme y que, como en el ejemplo, se toma la media aritmética.

La media aritmética posee propiedades interesantes tales como, entre otras, las dos siguientes que resultan de interés particular:

1. La suma de las desviaciones a partir de la media aritmética es cero
2. La suma de los cuadrados de las desviaciones a partir de la media aritmética es menor que la suma de los cuadrados de las desviaciones a partir de cualquier otro valor

En relación con la primera, en los textos escolares, la media aritmética es mostrada como elemento representativo de un conjunto de valores dados, cuya distribución es aproximadamente simétrica, o sea, que para representar un conjunto de datos se toma la media por sus propiedades de localización central, por ser "centro de gravedad" del espacio de valores muestrales o poblacionales pero, ¿qué ocurre cuando estas condiciones no se cumplen?, ¿qué conducta seguir cuando la distribución es muy asimétrica?.

Cuando en un conjunto de valores hay datos aberrantes (extremos) la media se desplaza hacia uno de los extremos y la moda (el valor más frecuente) o la mediana (el valor central en el conjunto de datos ordenados) serían un valor más representativo del conjunto de datos (Batanero et al., 1994, pp.4-6). Pero ¿qué debe ser enseñado a los estudiantes?

En el presente artículo se exponen las experiencias de los autores en el tratamiento de esta propiedad de la media aritmética y que es frecuente en la descripción de datos.

3. ¿Cómo abordan los autores este problema?

En problemas más avanzados se necesita conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población. Por ejemplo, al predecir la esperanza de vida o el rendimiento promedio esperado, se toma la media de la variable en la población como predicción, como valor esperado, por sus propiedades muestrales derivadas del teorema central del límite.

En muchos libros se suele presentar usando la simbología siguiente:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Para alumnos con poca base matemática, en lugar de facilitar la comprensión del significado de la media lo oscurece. Más aún cuando los datos aparecen agrupados y entonces aparece el error de cálculo reportado en la literatura (Del Puerto et.al, 2007, pp. 4-5) que no tiene en cuenta la frecuencia de cada dato.

Este error, frecuentemente reportado, también ha estado presente en los estudiantes de los autores. En clases de ejercitación se propone el cálculo de la media aritmética, primero en datos no agrupados y posteriormente ya agrupados para un mismo conjunto. En aquellos casos de datos continuos se les hace ver como a veces la media aritmética no es exactamente igual. Con el agrupamiento se pierde el detalle de la muestra.

En el caso de la propiedad

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 0$$

Afectada por datos aberrantes o extremos se les presenta a los estudiantes un problema del deporte conocido por casi todos. Primero y con la participación activa se analiza la situación descrita a



partir del desarrollo del conocimiento del contexto para comprender la dinámica del sistema de preparación de atletas, algo familiar a la mayoría de los alumnos.

El ejercicio que sirve de modelo para exponer la experiencia fue tomado de la guía de estudio de la carrera de licenciatura en Economía de la Universidad de la Habana de la profesora Daysi Espallargas que, por su contenido, se vincula fácilmente a la realidad contextual conocida por los estudiantes.

El ejercicio es el siguiente:

Un entrenador de pista debe decidir cual de los dos corredores debe elegir para la próxima carrera de 100 metros planos. El entrenador basará su decisión en los resultados que tiene registrados de cinco carreras entre los dos atletas realizados en un período de una hora con descanso de 15 segundos.

Carreras

| Atleta | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|------|------|------|------|------|
| X | 12,1 | 12 | 12 | 16,8 | 12,1 |
| Y | 12,3 | 12,4 | 12,4 | 12,5 | 12,4 |

- Sobre la base de los datos anteriores, halle la media aritmética. ¿Cuál de los dos corredores debe elegir y por qué?
- ¿Debería ser diferente la selección si el entrenador supiera que el atleta X se cayó al principio de la cuarta carrera? Fundamente con la mediana.
- Comente la diferencia entre los conceptos media aritmética y mediana como medidas de tendencia central y su relación con los incisos a) y b).

Respondiendo a la primera interrogante la solución ofrece como alternativa la opción del atleta Y porque posee menos tiempo promedio. A continuación se procede a analizar lo que ocurrió en cada carrera y se llega a la contradicción de que en todas las pruebas excepto en la cuarta, el estudiante X llegó primero. Este razonamiento permite valorar con los estudiantes el cumplimiento de la propiedad de la media mencionada en clases y que simbólicamente se presenta de la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 0$$

Para que los estudiantes comprendan mejor la propiedad muchas veces, un instrumento de limpieza presente en el aula como es la escoba o barredera, permite hacer visible en el instrumento el efecto que tiene la presencia de su parte más gruesa y que provoca el desplazamiento de su centro de gravedad hacia este lugar.

Este sencillo recurso visual ayuda mucho en la comprensión de la propiedad y es a veces ignorado por los docentes. Sáenz (2006, pp. 113-126) lo incluye dentro de los componentes estratégicos de la Teoría de la Elaboración en la enseñanza de la Estadística, lo define como analogía y es muy utilizado en la enseñanza de un concepto problemático como es el de la media aritmética, asociándolo al concepto de centro de gravedad.

La solución del segundo inciso del ejercicio ofrece la oportunidad para tomar una correcta decisión para la selección del mejor atleta. La mediana representa mejor la problemática y describe mejor el comportamiento medio de ambos atletas. El inciso final hace meditar sobre ambas medidas. En este momento puede valorarse la solución práctica que se toma con la aplicación de la llamada media aritmética recortada, usada precisamente en otros deportes.

En las clases de los autores este sencillo proceder ha posibilitado mejorar la comprensión de esta propiedad de la media que tanto afecta a problemas reales.

4. Conclusiones

En los juicios o toma de decisiones la experiencia personal o la evidencia de tipo anecdótico no son fiables y puede llevar a confusión porque muchas situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de los datos recogidos en forma adecuada. En este proceso la media aritmética es muy utilizada pero en ocasiones no se tiene en cuenta que ante la presencia de datos extremos la media deja de ser un buen representante del comportamiento medio de la variable siendo necesario entonces su cálculo con exclusión de parte de la información o la utilización de otros estadísticos de tendencia central.

La experiencia de clase expuesta logra poner en evidencia este problema con una situación muy sencilla que puede ser entendida por estudiantes de diferentes grados o niveles.

Bibliografía

- Batanero C., Godino J.; Vallecillos, A., Green D.; Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547. Recuperado el 19 de Enero de 2008 de <http://www.ugr.es/local/batanero>.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. ISBN: 84-699-4295-6. Recuperado el 19 de Enero de 2008, de <http://www.ugr.es/local/batanero>.
- Cuevas, J. e Ibáñez, C. (2008). Estándares en educación estadística: Necesidad de conocer la base teórica y empírica que los sustentan. *Revista Iberoamericana de Educación Estadística*. Septiembre de 2008. No. 15. pág.: 33-45. Recuperado el 29 de Noviembre de 2009, de <http://www.oei.es/noticias/spip.php?article4177>
- Del Puerto, S.; Seminara, S. y Minnaard, C. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. *Revista Iberoamericana de Educación*. No. 43 (3). Junio de 2007.
- García, I. y García Cruz, J.A. (2004). La media aritmética. *Form. Profesorado Investig. Educ. Mat.* Vol. 6, pág.: 197-217.
- García Cruz, J.A. y Garret, A. (2008). Understanding the Arithmetic Mean: A Study with Secondary and University Students. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*. Vol. 12, No. 1, pág.: 49-66. Recuperado el 29 de Noviembre de 2009, de <http://www.alexgarras@yahoo.com.br>
- Godino, J. D; Batanero C. y Font. V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 39 (1-2): 127-135. Recuperado el 19 de Enero de 2008, de <http://www.ugr.es/local/batanero>.
- Mochón, S. y Tlachy, M.M. (2003). Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos. *Educación Matemática*. Vol. 15, No. 3, pág.: 5-28. Recuperado el 29 de Noviembre de 2009, de <http://www.aliavi@prodigy.net.mx>.



Sáenz, C. (2006). Aplicación de la teoría de la elaboración en la enseñanza de la Estadística. *Tarbiya: Revista de investigación e innovación educativa*. No. 38, pág.: 113-126. Recuperado el 29 de Noviembre de 2009, de <http://www.cesar.saenz@uam.es>.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265. Recuperado el 19 de Enero de 2008, de <http://www.ugr.es/local/batanero>.

Carlos M. Rodríguez Arteaga. Centro Universitario. Isla de la Juventud. Cuba. Licenciado en Matemática. Profesor de Matemática y Estadística. Tiene una Maestría en Matemática Aplicada. Ha publicado artículos científicos referidos al tamaño de muestra en revista científicas de Cuba y sobre temas de la educación estadística y pedagogía en revistas electrónicas y la revista de la Universidad del Chocó en Colombia.

Email: crodriguez@cuij.co.cu

Alcides Cabrera Campos. Universidad de las Ciencias Informáticas. Cuba. Licenciado en Educación. Profesor de Estadística. Doctor en Ciencias. Ha publicado en diversas revistas nacionales e internacionales artículos científicos sobre diseño de muestreos secuenciales y Estadística Matemática.

Email: alcides@uci.cu