Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 193-199 (1990)

DETERMINACION DE ARBOLES GENERADORES MINIMALES EN REDES CON ARCOS DE DOBLE PESO ALEATORIO

J. Sicilia, M.T. Ramos y R.M. Ramos

Departamento de Estadística e I.O., Universidad de La Laguna
38204-La Laguna. España

ABSTRACT

This paper develops a method for the determination of the spanning trees in a undirected network, where each arc is double-weighted and the weights of the arcs are independent and continue random variables.

Palabras Claves: Grafos biobjetivos estocásticos, árboles generadores minimales.

INTRODUCCION

El problema del árbol generador minimal en redes deterministas es una cuestión ya clásica y bien resuelta desde mediados de los años cincuenta, cuando se obtuvieron adecuados algoritmos computacionalmente eficientes, por parte de Kruskal(4) y Prim(6).

Dicho problema permite dos tipos de generalizaciones: Primero, considerar que no hay un único peso asociado a cada arco, esto es, se permite varias ponderaciones, lo que lleva a trabajar con diversas funciones objetivo. Segundo, admitir que el peso no sea una variable determinista sino estocástica.

Para la primera generalización, los métodos de resolución de problemas multiobjetivos deben ser bastante útiles; mientras que para la segunda, el cálculo de probabilidades y los procesos estocásticos ofrecen herramientas teóricas de indudable interés.

La extensión al caso biobjetivo, donde en general no es posible encontrar un único árbol generador minimal, sino un conjunto de árboles generadores no dominados extremos respecto a ambas funciones objetivo fue estudiado en Sicilia, Ramos y González (7).

Por otro lado, en los últimos años, el estudio del árbol generador minimal estocástico ha sido abordado por diversos autores: Frieze (1), Hiroaki y otros (2), Ichimori y otros (3), y Kulkarni (5).

El presente trabajo recoge las ideas expuestas en Sicilia y Ramos (8).

abordando el problema del árbol generador minimal biobjetivo con pesos estocásticos, y el mismo pretende adaptar el estudio de las redes estocásticas al caso biobjetivo.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea $G = (V,A)$ un grafo no dirigido, siendo V el conjunto de vértices ($n = |V|$) y A el conjunto de aristas ($m = |A|$). Un árbol generador T es un grafo parcial conexo de G, sin ciclos y que tiene exactamente $n-1$ arcos. Denotemos por τ el conjunto de árboles generadores del grafo G.

Consideremos dos variables aleatorias continuas no negativas m-dimensionales ξ y η definidas sobre el conjunto de aristas A, de forma que cualquier arista $a=(i,j) \in A$ tendrá como pesos las variables aleatorias $\xi(i,j)$ y $\eta(i,j)$. Supondremos independencia entre las variables aleatorias. Todo árbol $T \in \tau$ tiene asociado la variable aleatoria bidimensional $(\xi(T),\eta(T))$ que representa el valor del árbol T con respecto a dos objetivos $\xi(T)$ y $\eta(T)$, donde $\xi(T) = \sum_{(i,j)\in T} \xi(i,j)$ y $\eta(T) = \sum_{(i,j)\in T} \eta(i,j)$. El problema consistirá en determinar el T^* tal que $(\xi(T^*),\eta(T^*)) = \min_{T\in\tau} (\xi(T),\eta(T))$ donde por mín se entiende la operación del mínimo extendida a las dos variables aleatorias $\xi(T)$ y $\eta(T)$.

Obviamente T^* será una variable que tomará valores en τ de la forma siguiente: $T^* = T_o \leftrightarrow \xi(T^*) = \xi(T_o)$ y $\eta(T^*) = \eta(T_o)$. Sin embargo, ocurre en general, que $T^* = T_o$, si elegimos $\xi(T)$ y $T^* = T_1$, considerando $\eta(T)$. Esto es, el árbol obtenido por la variable T^* tomando el primer objetivo es distinto al obtenido para el segundo objetivo; se llega así a un conflicto de intereses lo cual nos obliga a que en lugar de determinar una única variable T^* que me dé los posibles árboles generadores mínimos, necesitemos dar a cambio un conjunto de posibles variables aleatorias no dominadas que me permitan obtener árboles generadores minimales.

Antes de exponer el procedimiento seguido para la construcción del conjunto de v.a. T^* no dominadas, veamos la metodología seguida para la obtención de la distribución de la v.a. T^* corrrespondiente a una sola función objetivo aleatoria $\xi(T)$.

OBTENCION DEL ARBOL GENERADOR MINIMAL ALEATORIO PARA UN OBJETIVO

Al considerar un único objetivo, tendremos que la v.a. T^* toma valores en τ de forma tal que $T^* = T \longleftrightarrow \xi(T^*) = \xi(T)$. El problema consistirá en determinar la distribución conjunta de la v. a. $(T^*, \xi(T^*))$, es decir $F(T,t) = p(T^*=T, \xi(T^*)\leq t)$, con $t\geq 0$ y $T\in\tau$. Conocida ésta, es posible determinar las distribuciones marginales de T^*, $\xi(T^*)$ y la condicionada $\xi(T^*) | T^* = T$.

Kulkarni (5) da un procedimiento, sencillo en sus fundamentos pero no falto de complejidad en sus cálculos, para obtener expresiones de dichas distribuciones. Comienza construyendo un proceso estocástico que servirá de base para el desarrollo posterior. Para ello, considera que en cada arco (i,j) existe un corredor que va de un extremo a otro del arco, tardando en completar el viaje un tiempo aleatorio dado por $\xi(i,j)$. Cuando un corredor alcanza su destino es considerado como "corredor exitoso" y al arco correspondiente se le coloca en un conjunto B de "arcos exitosos". Al mismo tiempo, todos los corredores asociados a arcos pertenecientes al conjunto $C(B) = \{(i,j) \in A-B \mid B \cup (i,j) \text{ contiene un ciclo}\}$ son considerados "no exitosos" y paran, dejando de correr; mientras tanto los otros corredores siguen su carrera sin interrupción. El proceso termina tan pronto hayan n-1 corredores exitosos.

El proceso estocástico $\{X(t) \mid t\geq 0\}$ representará al conjunto de arcos exitosos en el tiempo t. El espacio de estados E del proceso estará formado por todos los subconjuntos acíclicos de A, incluyendo el vacío ($X(o) = \emptyset$). Los subconjuntos acíclicos de cardinalidad n-1 representan los árboles generadores de G y por tanto $\tau \subset E$. Además, todos los estados en τ son absorventes y los de $E-\tau$ son transitorios. El proceso $\{X(t) \mid t\geq 0\}$ será una cadena de markov en tiempo continuo, con matriz de transición $P(t)$ dependiente de las distribuciones de las v.a. $\xi(a)$, $\forall\, a\in A$.

Si $B = \{a,b\}$ y $B' = \{a,b,c\}$ son dos estados del proceso, entonces de la independencia de las variables aleatorias asociadas a los arcos, la probabilidad de transición en el tiempo t será

$$p_{BB'}(t) = F_{\xi(c)}(t) \prod_{v\in D} [1-F_{\xi(v)}(t)] \quad \text{siendo} \quad D = A-(B'\cup C(B))$$

La variable aleatoria $t_o = \min\ \{t\geq 0 \mid X(t)\in\tau\}$ permitirá visualizar las trayectorias del proceso con sus respectivas probabilidades. En base a dichas trayectorias podremos determinar las distribuciones de T^* y $\xi(T^*)$.

ARBOLES GENERADORES MINIMALES BIOBJETIVOS ESTOCASTICOS

Como comentamos en el planteamiento del problema, cuando cada arco del grafo lleva asociado dos variables aleatorias, la determinación del árbol generador minimal es un problema complejo debido a que, salvo en raras ocasiones, el árbol generador minimal para un objetivo es diferente al que se obtiene para el otro objetivo y así, las variables aleatorias obtenidas no tendrían la misma distribución. Tampoco podemos afirmar que una de ellas sea la solución adecuada ya que al carecer de nueva información que me permita decidir, debemos conformarnos con dar un conjunto de posibles variables T^* que nos ofrezcan árboles generadores minimales estocásticos respecto a los objetivos considerados.

Para abordar el desarrollo posterior es necesario comenzar dando algunas definiciones. Así, Dadas dos v.a. θ y ζ definidas sobre un mismo espacio Ω, diremos que la variable θ es mejor que ζ (se denota por $\theta<\zeta$) si θ coincide casi seguro con la variable aleatoria $\psi = \min\{\theta,\zeta\}$. Tal condición es algo restrictiva, por lo que se podría elegir cualquier otra medida como la media, moda, mediana, coeficiente de variación, etc. que me permitiría comparar las variables, pero dichas medidas podrían llevarnos a descuidar soluciones factibles del problema. Una v.a. θ perteneciente a un conjunto de variables aleatorias se dice no dominada si no existe otra v.a. ζ de dicho conjunto tal que $\zeta<\theta$.

Un árbol $T'\in\tau$ se dice eficiente o no dominado si $\forall\ T\in\tau$ cumpliendo $(\xi(T),\eta(T)) \leq (\xi(T'),\eta(T'))$ se sigue que $(\xi(T),\eta(T)) = (\xi(T'),\eta(T'))$. Obviamente, los árboles generadores minimales pertenecen al conjunto de árboles eficientes. El algoritmo que desarrollaremos nos permitirá obtener los correspondientes árboles eficientes.

En principio, y antes de exponer el método para obtener dichos árboles, se deben construir dos procesos estocásticos independientes $\{X(t) \mid t\geq 0\}$ e $\{Y(t) \mid t\geq 0\}$ por el procedimiento comentado en el epígrafe anterior, los cuales nos permitirán caracterizar la distribución de las v.a. bidimensionales $(T^*,\xi(T^*))$ y $(T^{**},\eta(T^{**}))$ correspondientes a los árboles generadores minimales para cada objetivo por separado. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que ambos procesos tienen un mismo espacio de estados E en común, el cual puede particionarse en n subconjuntos $E_0,E_1,\ldots,E_{n-1}$, de forma que $B\in E_i$ si $|B| = i$. Por tanto, $E_0 = \{\emptyset\}$ y $E_{n-1} = \tau$.

Algoritmo

Paso 0: Caracterizar la v.a. T^* respecto al primer objetivo ξ mediante la utilización del proceso $\{X(t)\mid t\geq 0\}$ descrito en el epígrafe anterior. Junto con la v.a. T^* tendremos el par de variables $(\xi(T^*),\eta(T^*))$.

Determinar por igual procedimiento la v.a. T^{**} para el segundo objetivo η utilizando ahora el proceso $\{Y(t)\mid t\geq 0\}$. Sean las variables asociadas $(\xi(T^{**}),\eta(T^{**}))$.

Almacenar T^* y T^{**} en una lista L de v.a. correspondientes a árboles generadores eficientes. Considerar dichas variables como fijas en L.

Paso 1: Si las variables $\eta(T^*)$ y $\eta(T^{**})$ son iguales, entonces la terna $(T^*,\xi(T^*),\eta(T^*))$ nos ofrece la solución óptima de nuestro problema. Parar.

En otro caso, sea p=1 y $T^P = T^*$. Ir al paso 2.

Paso 2: En relación con la v.a. T^P, se definen n v.a. $\gamma_0^P,\gamma_1^P,\ldots,\gamma_{n-1}^P$ donde γ_i^P toma valores en el subconjunto E_i del espacio de estados E. La variable γ_i^P alcanza el estado $\{a_1,a_2,\ldots,a_i\}$ con probabilidad la suma de las probabilidades de aquellas trayectorias del proceso utilizado para determinar T^P, cuyos primeros i arcos coincidan con $\{a_1,a_2,\ldots,a_i\}$.

Además, la variable γ_i^P lleva asociada otras dos v.a. $(\xi(\gamma_i^P),\eta(\gamma_i^P))$, definidas por $\xi(\gamma_i^P) = \sum_{k=1}^{i}\xi(a_k)$ y $\eta(\gamma_i^P) = \sum_{k=1}^{i}\eta(a_k)$.

Consideremos $T=T^P$ y r=2.

Paso 3: Si r=n+1 y en L hay variables no fijadas, elegir una variable T cuya variable asociada $\xi(T)$ sea no dominada de entre las variables pertenecientes a L y que no han sido fijadas. Poner p=p+1, llamar a dicha variable T^P y hacerla fija en L. Ir al paso 2.

Si r=n+1 y todas las variables en L están fijadas, parar. La lista L forma el conjunto de árboles estocásticos no dominados.

Si r≠n+1, ir al paso 4.

Paso 4: A partir de la v.a. γ_{n-r}^P y su correspondiente par de variables $(\xi(\gamma_{n-r}^P),\eta(\gamma_{n-r}^P))$ definir $t_1 = \min\{t\geq 0\mid X(t)\in E_{n-r}\}$ y construir un nuevo proceso $\{Z(t)\mid t\geq t_1\}$ de la forma siguiente: $Z(t_1)=\gamma_{n-r}^P$ y Z(t), para $t>t_1$, será el conjunto de arcos que se forman al unir los que habían en la variable γ_{n-r}^P junto con el arco cuyo corredor ha llegado segundo en el tiempo t, de entre los que siguen en carrera. (El conjunto de estados estará formado por conjuntos B correspondientes a estados de γ^{p}_{n-r} y nuevos conjuntos $B'=B\cup\{a_l\}$, $a_l \in A-(B\cup C(B))$. Los primeros serán estados transitorios y los segundos absorventes).

<u>Paso</u> <u>5</u>: Cuando el proceso Z(t) alcance el estado $B'=B\cup\{a_l\}$ con $B\in E_{n-r}$ y $a_l \in A-(B\cup C(B))$, entonces definir $t_2=t_1+\min\{t\geq 0 \mid Z(t)\in E_{n-r+1}\}$ y a partir de aquí, seguir con el proceso $\{X(t)\mid t\geq t_2\}$ hasta completar una nueva v.a. T^{p}_{r} que me ofrezca árboles generadores minimales. Determinar las corresponndientes v.a. $\xi(T^{p}_{r})$ y $\eta(T^{p}_{r})$.

<u>Paso</u> <u>6</u>: ¿Existe alguna variable T' de la lista L, cumpliendo que $(\xi(T'),\eta(T'))<(\xi(T^{p}_{r}),\eta(T^{p}_{r}))$?. En caso de existir tal variable , poner r=r+1 y volver al paso 3. En caso negativo, ir al paso 7.

<u>Paso</u> <u>7</u>: ¿Existe alguna variable T' de la lista L tal que $(\xi(T'),\eta(T'))>(\xi(T^{p}_{r}),\eta(T^{p}_{r}))$?. Si la respuesta es afirmativa, quitar T' de L y repetir la pregunta. En otro caso, almacenar T^{p}_{r} en la lista L como no fija, poner r=r+1 y volver al paso 3.

CONCLUSIONES

Hemos visto un procedimiento para caracterizar los árboles generadores minimales en grafos cuyos arcos están ponderados por dos funciones estocásticas. Tal procedimiento se basa fundamentalmente en la construcción de dos procesos estocásticos X(t) e Y(t) que representan los conjuntos de arcos exitosos en el tiempo t para cada función objetivo; pero también requiere de otras variables como γ^{p}_{i} (paso 2 del agoritmo) t_1 (paso 4), t_2 (paso 5) y del proceso Z(t) que recoge al corredor que ha llegado segundo en el tiempo t.

En virtud de todo ello, se puede pensar que la metodología expuesta es algo complicada, aunque la misma podría justificarse desde dos perspectivas: Primera, el hecho de que el problema planteado es un problema de tipo enumerativo (hay que dar todas las soluciones factibles y no basta con especificar una); y segunda, la de ser un problema que por su naturaleza puede ser conveniente su modelización por medio de procesos estocásticos.

Por otro lado, la ordenación de variables definida al principio del epígrafe cuarto y utilizada en el algoritmo, es bastante restrictiva lo que nos lleva a que se amplíe considerablemente la lista L de soluciones del problema. Pensamos que para reducir dicha lista, podría ser conveniente fijar un umbral o nivel de manera que rechazemos aquellas soluciones cuya frecuencia de ocurrencia, siguiendo un proceso de simulación, quedará por debajo del umbral elegido.

BIBLIOGRAFIA

(1) A.M. Frieze: "On the value of a random minimum spanning tree problem". Discrete Appl. Math. 10 (1985) 47-56.

(2) I. Hiroaki, S. Shiode y T. Nishida: "Stochastic spanning tree problem". Discrete Appl. Math. 3 (1981) 263-273.

(3) T. Ichimori, S. Shiode, I. Hiroaki y T. Nishida: "Minimum spanning tree with normal variates as weights". J. Oper. Res. Soc. Japan 24 1 (1981) 61-66.

(4) J.B.Jr. Kruskal: "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem". Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956) 48-50.

(5) V.G. Kulkarni: "Minimal Spanning trees in undirected networks with exponentially distributed arc weights". Networks 18 (1988) 111-124.

(6) R.C. Prim: "Shortest connection networks and some generalizations". Bell Syst. Tech. Jl. 36 (1957) 1389-1401.

(7) J. Sicilia, R.M. Ramos y C. González: "Obtención de árboles generadores biobjetivos". XVII Reunión Nacional de Estadadística, I.O. e Informática. Benidorm 1988.

(8) J. Sicilia y M.T. Ramos: "Arboles generadores minimales biobjetivos estocásticos". XVIII Reunión Nacional de Estadística, I.O. e Informática. Santiago de Compostela. 1989.

(9) E.A. Timofeev: "Random minimal trees". Theory Prob. Appl. 29(1) (1985) 134-141.