NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 40, diciembre de 1999, páginas 45-53

Límites del conocimiento y de la acción

Jesús Mosterín

Óptimos imposibles

En el siglo pasado muchos compartieron la creencia optimista e ingenua de que todo lo que es deseable sería a la larga realizable, de que todo óptimo es posible. Hoy sabemos que eso no es así. Hay óptimos imposibles. Hay situaciones deseables pero irrealizables, hay límites insuperables a lo que podemos hacer o saber.

Hay cosas que no podemos hacer porque no tenemos bastante dinero, o porque nuestra técnica todavía no ha progresado lo suficiente, o porque nosotros no somos tan listos como para saber hacerlas. Obviamente la falta de dinero está frenando el avance científico en muchos frentes, como en la física de partículas, que requiere costosos aceleradores. Los progresos de la técnica están posibilitando hacer cosas antes impensables, como viajar a la Luna o colocar un telescopio en el espacio, o comunicarse en tiempo real con cualquier lugar del planeta mediante el teléfono o la Internet. Nuestra capacidad psicológica es limitada. Conforme los problemas van haciéndose más y más difíciles y complejos, nos cuesta más entenderlos, y es posible que en algún momento nuestro cerebro no dé más de sí. Pero este tipo de limitaciones fácticas se superarían si tuviésemos más dinero, o si fuésemos más listos, o si la tecnología nos proporcionase nuevas oportunidades. No es de estas limitaciones fácticas de las que voy a hablar aquí, sino de aquellas otras limitaciones que nos limitan por principio, imposibles de superar cualesquiera que fuesen los recursos de dinero, técnica e inteligencia de que dispusiéramos.

Desde mediados del siglo XIX hasta ahora se han ido postulando una serie de principios y se han ido probando una serie de teoremas de imposibilidad, que ponen límites absolutos a lo que podemos hacer o saber. Estos teoremas no nos dicen cómo son las cosas, sino cómo no pueden ser. Así como las leyes de tráfico excluyen ciertas conductas, sin por eso determinar unívocamente el camino a seguir, así también los teoremas de imposibilidad establecen que ciertas metas o ideales son inalcanzables, sin por eso indicarnos qué hacer ni cómo hacerlo.

Termodinámica

En el siglo XVIII la máquina de vapor fue inventada por Thomas Newcomen y perfeccionada por James Watt, que incrementó considerablemente su eficiencia (el porcentaje de la energía del combustible que efectivamente se transforma en trabajo mecánico, frente al que se desperdicia). El motor de vapor venía a sustituir con ventaja a la fuerza muscular en muchas aplicaciones industriales, mineras y de transporte. Entrado el siglo XIX, siguieron construyéndose máquinas de vapor cada vez más eficientes. El ingeniero francés Sadi Carnot trató de determinar hasta qué punto se podía incrementar la eficiencia de los motores. Pronto se vio que ese incremento tropezaría con límites infranqueables. Estos estudios culminaron a mediados del siglo XIX con la formulación de las leyes de la termodinámica por Lord Kelvin y Rudolf Clausius.

La *primera ley de la termodinámica* dice que la energía se conserva en todos los procesos. Por tanto, no puede haber perpetuos móviles del primer tipo, es decir, motores que suministren trabajo mecánico indefinidamente sin recibir combustible o ningún otro aporte de energía.

La *segunda ley de la termodinámica* dice que la energía se degrada (es decir, la entropía aumenta) en todos los procesos irreversibles. Es imposible convertir calor completamente en trabajo (Kelvin). No es posible un proceso cuyo único resultado sea transferir energía de un cuerpo más frío a otro más caliente (Clausius). Por tanto, no puede haber perpetuos móviles del segundo tipo, es decir, motores que extraigan calor (energía térmica) del agua o del aire y lo conviertan en trabajo mecánico (por ejemplo, un barco que moviese sus hélices sin otro aporte energético que el calor del mar).

Si la primera ley de la termodinámica dice que la cantidad de energía siempre se conserva, la segunda afirma que la calidad de la energía siempre se degrada. Aunque la energía no disminuye, cada vez es de peor calidad. Puesto que la entropía siempre aumenta en los procesos irreversibles, la energía libre (que es la parte de la energía total disponible para hacer cosas con ella) siempre disminuye.

Lo que nos interesa de estas leyes es que no nos dicen cómo se pueden construir motores eficientes. Lo único que nos dicen es que cierto tipo de eficiencias deseables son imposibles.

Incluso la *tercera ley de la termodinámica*, formulada posteriormente (1906) por Hermann Nerst, viene a decir que por mucho que enfriemos algo, nunca podremos enfriarlo del todo: No es posible alcanzar la temperatura del cero absoluto.

Estas leyes de la termodinámica fueron las primeras leyes físicas que pusieron límites absolutos a lo que se puede hacer.

Relatividad especial

En 1905 Albert Einstein puso límites a la velocidad a que pueden moverse objetos o transmitirse señales o efectos. La teoría especial de la relatividad de Einstein se basa en dos principios. El primero de ellos dice que las leyes de la física son invariantes respecto a transformaciones de Lorenz, es decir, que las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas inerciales. El segundo principio —que es el que aquí nos interesa— dice que la velocidad de una señal u objeto físico no puede exceder la velocidad de la luz en el vacío, que es una constante c idéntica para todos los observadores.

Este principio limita lo que podamos hacer; por ejemplo, la velocidad a la que podamos viajar. Nunca, por mucho que progrese la tecnología, podremos viajar más deprisa que la luz, y ni siquiera a la velocidad de la luz, sólo accesible a las partículas sin masa (como los fotones) y no a las masivas (como los protones, neutrones y electrones de que estamos hechos nosotros). De los dos principios de la relatividad especial se sigue que la masa (no nula) de un objeto se incrementa con su velocidad. A la velocidad de la luz, su masa sería infinita, lo que es imposible. Por tanto, un objeto masivo no puede alcanzar la velocidad de la luz.

El axioma de la constancia de la velocidad de la luz también limita lo que podemos observar y saber. En principio nos sería posible observar los eventos situados a una distancia espacial (expresada en tiempo luz) de nosotros inferior o igual a la distancia temporal que nos separa de ellos, es decir, los eventos situados en nuestro cono de luz pasado. Pero sería imposible por principio observar o recibir señal alguna de los objetos situados a una distancia espacial (expresada en tiempo luz) superior a su distancia temporal, es decir, los objetos situados fuera del cono de luz. Otra consecuencia gnoseológica de este principio es que sólo podemos conocer el pasado lejano (no el presente) de los objetos astronómicos. Vemos a nuestra galaxia vecina, Andrómeda, tal y como era hace casi tres millones de años (el tiempo que tarda su luz en llegar a nosotros). No podemos verla tal y como es ahora. Incluso podría haber desaparecido hace dos millones de años, y todavía tardaríamos casi otro millón más de años en enterarnos. No vemos las cosas lejanas tal y como son ahora, sino tal y como eran hace mucho tiempo. Esta es una de esas limitaciones que nunca podremos superan por mucho dinero, inteligencia y progreso tecnológico del que dispongamos.

Las leyes de la termodinámica y de la relatividad especial excluyen ya de entrada muchos óptimos deseables. Por ejemplo, nunca podremos fabricar un automóvil perfecto. En efecto, el automóvil ideal alcanzaría una velocidad infinita o ilimitada (lo que está excluido por la relatividad) y tendría un consumo nulo o, al menos, una eficiencia perfecta (lo cual está prohibido por la termodinámica). El automóvil perfecto no puede existir, es una utopía.

Principio de incertidumbre

Si el principio einsteiniano de la constancia de la velocidad de la luz pone límites a lo que podemos observar, el principio de incertidumbre de Heisenberg pone límites insuperables a nuestra capacidad de medir con precisión lo que observamos. El principio de incertidumbre —uno de los puntales de la mecánica cuántica— fue formulado por Werner Heisenberg en 1927.

Según el principio de incertidumbre, ciertos pares de magnitudes complementarias no pueden ser medidas simultáneamente con arbitraria precisión. Podemos medir precisamente una u otra, pero no ambas a la vez. Cuanto más precisamente midamos la una, tanto más se nos escapará la otra. Por ejemplo, es imposible medir a vez con exactitud la posición y el momento de una partícula. Podemos determinar la posición de la partícula, pero esa determinación cambia y emborrona su momento, que resulta imposible de medir con precisión. A la inversa, podemos medir con precisión el momento (o la velocidad) de la partícula, pero entonces no podemos medir con precisión su posición. De hecho, una partícula cuya posición está siendo medida no tiene un momento preciso, y una partícula cuyo momento está siendo medido carece de posición precisa. Esta limitación es absoluta. La frecuencia de un fotón y el instante de su llegada tampoco pueden medirse a la vez con arbitraria precisión. Cuanto más precisamente midamos su frecuencia, tanto menos podremos determinar con exactitud el tiempo de su llegada, y a la inversa.

Teorema de Gödel

Los teoremas de imposibilidad considerados hasta ahora se refieren a la física, que en definitiva es una ciencia empírica. La matemática pura siempre se había considerado como un paradigma de seguridad, como un mundo perfecto e ideal, al que son ajenas tales limitaciones. Es cierto que a principios de nuestro siglo las paradojas de la teoría de conjuntos introdujeron cierta preocupación entre los matemáticos, pero los problemas detectados fueron pronto resueltos mediante la introducción de la teoría de tipos y la axiomatización de la teoría de conjuntos. El más famoso matemático de aquella época, David Hilbert, formuló el luego llamado «programa de Hilbert»: Para asegurar la matemática de una vez por todas se trataba de (1) axiomatizar de un modo completo y exacto todas las teorías matemáticas, y (2) probar —por medios finitarios indudables— que todas las teorías matemáticas así axiomatizadas son consistentes. La aplicación del programa empezaría por la teoría más básica de todas, la aritmética elemental, y se iría extendiendo a otras teorías más potentes o avanzadas.

Por todo ello, cayó como una bomba la demostración por Kurt Gödel en 1931 del llamado teorema de incompletud de Gödel, que en especial implicaba que la teoría aritmética perfecta no puede existir. Ni siquiera en el mundo ideal de la matemática son posibles todos los óptimos deseables.

Antes de formular el teorema, conviene repasar la terminología empleada en su formulación. Una sentencia es una fórmula sin variables libres. Una teoría es un conjunto de sentencias (los teoremas de la teoría) clausurado respecto a la relación de consecuencia, es decir, un conjunto de sentencias que incluye todas sus consecuencias. Una teoría es consistente si y sólo si no incluye contradicciones, es decir, no incluye dos teoremas tales que el uno sea la negación del otro. Esto equivale a decir que la teoría es distinta de su lenguaje. Una teoría es axiomatizable si y sólo si es recursivamente numerable, es decir, si y sólo si es el recorrido de una función computable sobre los números naturales. Esto equivale a que todos sus teoremas sean deducibles de un conjunto decidible de teoremas (los axiomas). Una teoría es completa si y sólo si da respuesta a todas las preguntas que puedan formularse en su lenguaje, es decir, si y sólo si para cada sentencia α, α es un teorema o $\neg\alpha$ es un teorema.

Una teoría aritmética es una teoría cuyo lenguaje incluye signos para el cero, el siguiente, la suma, el producto, el exponente y la relación de ser menor que, y tal que en ella son definibles las funciones primitivas recursivas (es decir, las funciones numéricas más elementales, tales como la adición, la multiplicación y la exponenciación). Una teoría aritmética T es correcta si y sólo si todos sus teoremas son verdaderos en el modelo estándar de los números naturales.

Obviamente tanto el ser consistente, como el ser axiomatizable y el ser completa son propiedades deseables de una teoría. Sin embargo, las tres propiedades no pueden darse conjuntamente. Esa conjunción constituye una utopía, un ideal inalcanzable. El teorema de incompletud de Gödel (1931) dice que una teoría aritmética no puede ser a la vez consistente, axiomatizable y completa. Puede ser dos de esas cosas, pero no las tres. De aquí se sigue en especial para cualquier teoría aritmética T: si T es consistente y axiomatizable, entonces T es incompleta. Por ejemplo, la aritmética de Peano de primer orden es axiomatizable y consistente, pero no es completa. Gödel nos indicó cómo construir una sentencia aritmética verdadera que no es teorema suyo. Podríamos añadir esa sentencia como nuevo axioma, pero no adelantaríamos nada: en función de ese sistema axiomático así ampliado podríamos volver a construir otra sentencia verdadera que no sería un teorema. El proceso no se acabaría nunca. Mientras siguiese siendo axiomatizable y consistente, la nueva teoría siempre seguiría siendo incompleta.

La limitación así puesta de manifiesto por el teorema de Gödel vale no sólo para la aritmética elemental, sino para cualquier otra teoría matemática que la contenga, es decir, para casi todas las teorías matemáticas interesantes, incluido el análisis matemático, el cálculo vectorial, la teoría de conjuntos, etc. Además, esa limitación no es la única descubierta, sino sólo la primera de una larga serie de limitaciones. Así, en 1931 el mismo Gödel probó también que si una teoría aritmética T es consistente, entonces la consistencia de T no puede probarse en T (o con los recursos conceptuales de T). En 1936 Alfred Tarski probó que la noción de verdad (semántica, en el modelo estándar de los números naturales) en una teoría aritmética T no es definible en T. Es decir, no hay una fórmula $\beta(x)$ tal que α es verdad en T si y sólo $\beta(\#\alpha) \in T$, donde $\#\alpha$ es una adecuada codificación numérica de α.

Muchas limitaciones de las teorías matemáticas se deben a limitaciones de la lógica subyacente. La lógica de primer orden sólo admite cuantificaciones sobre objetos (por ejemplo, sobre números), mientras que la lógica de segundo orden admite también la cuantificación sobre conjuntos de objetos (por ejemplo, sobre conjuntos de números). Si una teoría aritmética T es correcta, entonces T no es decidible. Esto se sigue ya del resultado de que la lógica de primer orden no es decidible. La lógica de segundo orden no es recursivamente numerable; es decir, su relación de consecuencia no es representable por un cálculo, el conjunto de sus fórmulas válidas no es axiomatizable. Otra limitación (esta vez semántica): Si la teoría T es axiomatizable (y tiene algún modelo infinito), entonces T no es categórica, es decir, tiene modelos no isomorfos al modelo estándar, es decir, tiene modelos no estándar, no buscados ni pretendidos. Por tanto, es imposible caracterizar unívocamente (hasta isomorfía) el modelo estándar de los números naturales (o el de los reales, o el espacio euclídeo). En segundo orden sí es posible caracterizar el modelo estándar, pero esa caracterización no es operativa, pues la lógica de segundo orden no es algoritmizable.

Todos somos testigos de los enormes progresos de la computación en nuestro tiempo. Sin embargo, también ésta se topa con límites infranqueables. Todo lo que pueda hacer un computador posible de cualquier tipo lo puede hacer una máquina de Turing (una noción matemática idealizada de computador, introducida por Alan Turing). Pues bien, el mismo Turing probó que no es posible construir una máquina de Turing que decida si un programa cualquiera dado puede ser ejecutado en un número finito de pasos por una máquina de Turing cualquiera dada. En general, la prueba de que una máquina de Turing (que, como computadora real, siempre sería muy lenta e ineficiente) puede computar algo carece de interés. Sin embargo, probar que la máquina de Turing no puede hacer algo es sumamente interesante, pues implica que nunca computador alguno podrá hacerlo, por mucha tecnología, dinero e inteligencia de la que dispongamos. La incomputabilidad de Turing es siempre incomputabilidad por principio, incomputabilidad insuperable.

También somos testigos de espectaculares progresos en las telecomunicaciones. Y también en este campo se han probado importantes teoremas de imposibilidad. Quizás el más conocido es el teorema probado por Claude Shannon en 1948, que implica que el canal perfecto de comunicación no puede existir. En efecto, el teorema de Shannon dice que no es posible transmitir señales a un ritmo superior a C/H, donde C es la capacidad (en bits por segundo) del canal, y H es la entropía (en bits por símbolo) de la fuente.

Teorema de Arrow

Los teoremas de imposibilidad no se limitan a la matemática, la ciencia y la tecnología. También se dan en el campo de la teoría política, como muestra el famoso teorema que Kenneth Arrow (Premio Nobel de Economía en 1972) probó por vez primera en 1951 (y perfeccionó en 1983), que establece límites a la posibilidad de perfeccionar la democracia, mostrando que el sistema perfecto de votación no existe.

Aunque la democracia es el menos malo de los sistemas políticos conocidos, todos los sistemas políticos conocidos dejan mucho que desear. Antes podía pensarse que los obvios defectos del sistema democrático serían todos subsanables, pero eso no es así. La democracia se basa en la votación, y las investigaciones fundamentales de Arrow han mostrado que la votación democrática perfecta es imposible. Arrow definió una serie de características que intuitivamente parecen deseables en cualquier sistema razonable de votación democrática y mostró que son incompatibles entre sí, es decir, que del supuesto de que un sistema de votación las tuviera todas se siguen contradicciones. Lo único que podemos hacer es elegir entre unos sistemas de votación imperfectos y malos en un sentido, y otros malos en otro sentido. Lo que no podemos es elegir el sistema de votación perfecto, pues es utópico, imposible. La situación recuerda a la que plantea el teorema de Gödel.

La democracia es un sistema para agregar las preferencias individuales en decisiones colectivas. La decisión colectiva se refiere a la elección entre varias alternativas. Se supone que cada miembro del grupo social tiene su propia relación de preferencia entre las alternativas consideradas. Introduzcamos un poco de terminología relativa a ciertas condiciones deseables mínimas que debe satisfacer una regla democrática de decisión social:

Condición de racionalidad colectiva: (1) La relación de preferencia colectiva (resultante de la agregación) ordena débilmente el conjunto de todos los estados sociales posibles alternativos (por ejemplo, es transitiva, es decir, si se prefiere el estado A al B, y B al C, entonces se prefiere A a C). (2) De entre cualquier subconjunto de estados posibles realizables, se elige el más preferido (o uno de los más preferidos, si hay más de uno).

Condición de Pareto: Si cada individuo del grupo prefiere la alternativa A a la B, entonces el grupo prefiere A a B.

Condición de no dictadura: no hay un individuo cuyas preferencias automáticamente se convierten en las preferencias del grupo, con independencia de las preferencias de los otros miembros.

Independencia de alternativas irrelevantes: La elección que el grupo hace entre las alternativas disponibles en un momento dado depende sólo de las preferencias de los individuos respecto a esas alternativas.

Las condiciones de racionalidad colectiva, de Pareto, de no dictadura y de independencia de alternativas irrelevantes parecen condiciones razonablemente exigibles de cualquier regla democrática de decisión colectiva (es decir, de agregación de preferencias individuales). Se trata de condiciones meramente necesarias, aunque no suficientes, de una democracia perfecta. Pero ni siquiera este modesto ideal es alcanzable. En efecto, el teorema de imposibilidad de Arrow (1951, 1983) establece que es imposible construir una regla de agregación colectiva de preferencias individuales que satisfaga estas cuatro condiciones mencionadas (racionalidad colectiva, Pareto, no dictadura e independencia de altenativas irrelevantes).

La democracia perfecta no puede existir. Aunque no hubiera estupidez ni corrupción, aunque todos fuésemos buenos y listos, el sistema democrático perfecto de votación no podría existir. La mera hipótesis de que existiese conduce a contradicciones matemáticas.

Más allá del conformismo y del utopismo

Desde los dominios más abstrusos de las matemáticas puras hasta los campos prácticos de la política y de los sistemas de votación, pasando por la eficiencia de los motores y la precisión de las mediciones cuánticas, todo lo que podemos saber y lo que podemos hacer está estrechamente acotado por una serie de límites u horizontes de nuestro conocimiento y de nuestra acción. El descubrimiento paulatino de esos límites nos ha situado en una situación intelectual menos ingenua y optimista que la que compartían los intelectuales decimonónicos, tan dados al utopismo.

Algunos filósofos, como Leibniz, habían considerado que el mundo actual es óptimo y es el mejor de los mundos posibles, por lo que cualquier cambio que se produjese sería para peor. Esta conclusión se ha argumentado a veces teológicamente, señalando que este mundo no podría ser mejor, pues es obra de un Dios omnisciente y omnipotente. Este conformismo de base teológica ya fue ridiculizado en el siglo XVIII por Voltaire, pero pronto se impuso un utopismo igualmente ingenuo, que pensaba que cualquier óptimo es posible y cualquier situación deseable es realizable. Ya hemos visto que ello no es así.

Ni el conformismo ni el utopismo conducen a ninguna parte. Es obvio que muchas cosas de este mundo pueden y deben ser mejoradas, pero ello no implica que cualquier ideal deseable que se nos ocurra sea realizable. El tratar de descubrir cosas imposibles de conocer sólo puede conducir a perder el tiempo y el dinero. El perseguir ideales políticos imposibles de realizar sólo puede conducir al sufrimiento inútil y a la frustración. Sin embargo, hay muchas cosas desconocidas por descubrir y muchas mejoras practicables por realizar. La investigación de los límites y horizontes de lo factible y lo cognoscible nos ayuda a canalizar nuestros esfuerzos hacia aquellas metas no sólo deseables, sino además alcanzables, al menos en principio.

Jesús Mosterín es catedrático de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Barcelona; profesor de Investigación del Instituto de Filosofía del CSIC; miembro titular del Institut International de Philosophie, de la Academia Europea, de la International Academy of Philosophy of Science, fellow del Center for Philosophy of Science de Pittsburg, etc. Autor de 21 libros y numerosos artículos.

Artículo publicado en el Boletín Informativo de la Fundación Juan March (agosto-septiembre 1999).