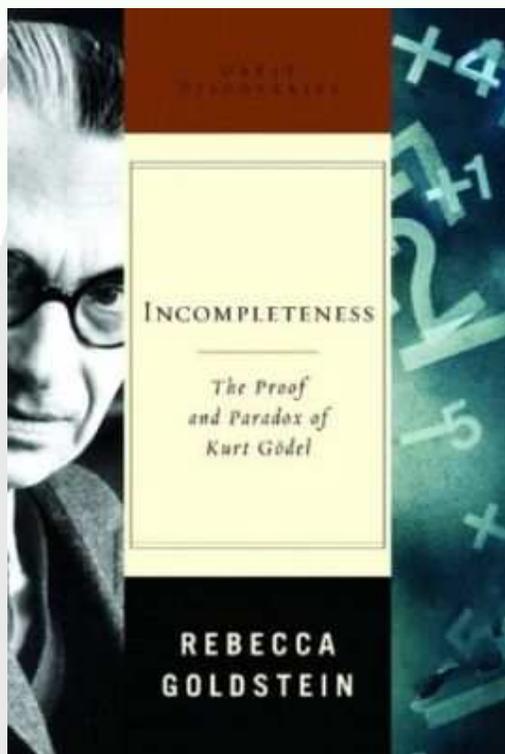


ASALTO AL BLOG

La necesidad de lo incompleto



Incompleteness: The proof and paradox of Kurt Gödel
Rebecca Goldstein
W. W. Norton (2004)

El teorema de Gödel es quizá el teorema más famoso de las matemáticas. Justamente, su fama deriva de su importancia, al haber modificado revolucionariamente el conocimiento existente y abrir rutas nuevas -e insospechadas- para su desarrollo posterior. Sin embargo, el teorema de Gödel es tan complejo, que incluso enunciarlo es difícil. Esto ha provocado, comprensiblemente, que tan famoso teorema sea frecuentemente malinterpretado.

Lo enunciado en párrafo anterior revela cuán poco famosas son las matemáticas. Con todo y ser posiblemente el teorema más famoso, muy pocas personas han oído el nombre y menos aún conocen, siquiera remotamente, el contenido del teorema. Si acaso, las mal-interpretaciones de que ha sido objeto han contribuido a aliviar un poco esta oscuridad, ya que lo han convertido en una especie de lugar común entre posmodernistas con deseos de encontrar munición contra el racionalismo.

Cuatro aspectos de la vida y la obra de Gödel pueden destacarse. Su origen centro-europeo y la realización de su obra ahí en los primeros años del siglo XX. Su amistad con Einstein y los paralelos de la vida y la obra de los dos contemporáneos. Su exilio en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Y el contenido de su descubrimiento. Estos cuatro aspectos son tratados con todo detalle en el libro de Goldstein, entretejidos continuamente con las innumerables anécdotas acerca de la singular personalidad de Gödel siempre en el borde de la locura.



Goldstein en una entrevista. Einstein y Gödel frente a la casa de Albert en Princeton

Empecemos con el enunciado del teorema mismo. Goldstein cita la entrada correspondiente en la

Enciclopedia de Filosofía:

Se entiende en general por teorema de Gödel la siguiente afirmación:

En cualquier sistema formal que sirva para la teoría de números, existe una fórmula indecidible -es decir, una fórmula que no es demostrable y cuya negación tampoco es demostrable. (Ocasionalmente se hace referencia a este enunciado como el primer teorema de Gödel.)

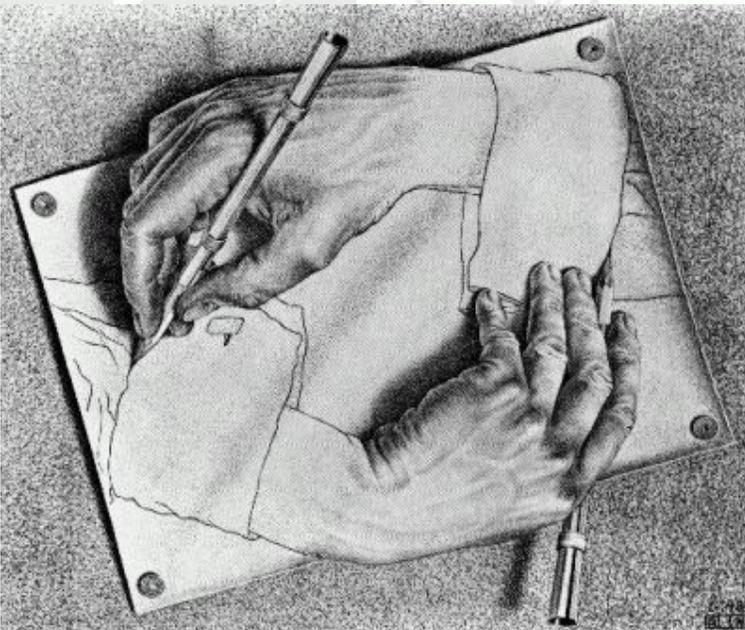
Un corolario de este teorema es que la consistencia de un sistema formal que sirva para la teoría de números no puede demostrarse dentro del mismo sistema. (Algunas veces es a este corolario a lo que se denomina teorema de Gödel; también se le conoce como segundo teorema de Gödel.)

El contexto en el que este teorema está inmerso es el de los sistemas axiomáticos. La idea es que a partir de unas cuantas declaraciones que se suponen verdaderas -axiomas- podemos utilizar las reglas de la deducción lógica para demostrar otras declaraciones -teoremas-. O bien, que dada una declaración, podemos decidir si ésta es verdadera -demostrable- o falsa. Se busca la consistencia del sistema, es decir, se busca que todas las declaraciones puedan ser calificadas como verdaderas o falsas. Y que sea imposible construir dos declaraciones, correctamente deducidas a partir de los axiomas, que resulten contradictorias entre sí. Desde luego el universo de las declaraciones que se pueden construir dentro de un sistema está limitado por la naturaleza de las cosas a las que se aplica ese sistema. La exigencia de que las declaraciones sean verdaderas o falsas se restringe a las declaraciones propias del sistema.

El primer ejemplo de una construcción axiomática es el de la geometría. Cinco axiomas forman la base de todo resultado geométrico:

1. dados dos puntos, existe solamente una recta que los une
2. cualquier segmento de recta se puede extender indefinidamente
3. dado cualquier segmento de recta se puede dibujar un círculo que tiene al segmento como radio y a uno de los extremos del segmento como centro
4. todos los ángulos rectos son iguales
5. por un punto externo a una recta solo pasa una recta que nunca toca a la primera

Todas las declaraciones que conciernan a la geometría se pueden mostrar como falsas o verdaderas con base en estos axiomas y en las reglas de la deducción lógica. El sistema es consistente.



Otros sistemas axiomáticos son más complicados. El de la teoría de conjuntos tiene diez axiomas (uno de ellos dice que existe el conjunto vacío, por ejemplo). Pero no es más complicado solamente por su mayor número de axiomas. Sino porque permite que dentro de él, se pueda construir una declaración como la contenida en la Paradoja de Russell que no puede ser caracterizada como cierta ni tampoco como falsa. Vamos a describir la paradoja de Russell.

Empezamos con la idea de que existen conjuntos que se tienen a sí mismos como uno de sus miembros. Por ejemplo, supongamos que definimos un conjunto, al que llamaremos el conjunto R, que tiene como elementos todos los conjuntos que están mencionados en esta reseña. El conjunto R, contiene obviamente, como uno

de sus elementos al conjunto R porque lo acabamos de mencionar, además del conjunto vacío que se mencionó en el párrafo anterior. Así que hay conjuntos que se tienen a sí mismos como elementos.

Ahora pensemos en el conjunto formado por todos los conjuntos que se contienen a sí mismos. Uno de

los elementos de este último conjunto es R , pero seguramente tiene muchos más. Y pensemos en su complemento, el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. La paradoja de Russel consiste en que la declaración "el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos no se contiene a sí mismo" no puede considerarse verdadera. Porque si en efecto ese conjunto no se contiene a sí mismo debiera estar en el conjunto de los que no se contienen a sí mismos y la declaración sería falsa. Pero si la declaración es falsa su negación es verdadera. Así que la declaración "el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos se contiene a sí mismo" debe ser verdadera. Pero no lo es, porque si se contiene a sí mismo no puede estar en el conjunto.

Este enredado galimatías es un ejemplo de una declaración indecible, paradójica, contradictoria. El sistema axiomático de la teoría de conjuntos permite que exista una declaración así y, por tanto, no es consistente.

Así que hay sistemas axiomáticos que son consistentes y otros que no lo son. ¿De qué depende? Para poder estudiar este problema de manera general se planteó un abordaje abstracto, la referencia a sistemas axiomáticos formales. En estos, los objetos de los axiomas no son objetos específicos sino objetos formales cuyas características detalladas no hace falta definir. Los sistemas formales serán más o menos complicados. Un sistema formal de ciertas características puede servir -si se especifican ahora sí las propiedades de sus objetos- para describir la geometría pero puede no alcanzar a describir la teoría de conjuntos. El teorema de Gödel demuestra que un sistema formal, suficientemente complejo para poder describir la teoría de números, no puede ser consistente. Por tanto la teoría de números no puede ser formulada en un sistema axiomático consistente.



La teoría de números tiene, entonces, una limitación fundamental. Pero la teoría de números está en el fundamento de todas las matemáticas -o casi. Así que las matemáticas no pueden formularse como un sistema axiomático consistente. Hay lugar para verdades matemáticas indemostrables. Esto es una bomba. Pero dejemos para más adelante la descripción de los daños que esta bomba causó.



Regresemos por un momento al teorema de Gödel. Porque un teorema consta de dos cosas. Una es lo que afirma, otra es su demostración. Ya sabemos -más o menos- lo que afirma el teorema de Gödel. Falta la demostración. No hay manera de seguir la demostración sin exigir conocimientos avanzados y requerir decenas de páginas de densas matemáticas. Sin embargo se puede describir la demostración. Vale la pena porque una de sus dos puntos cruciales es un razonamiento lógico ingenioso que se puede comprender con cierta facilidad, a la manera del razonamiento de la paradoja de Russell.

La idea es demostrar que existe una proposición que es cierta aunque no se pueda probar. (Interesante planteamiento este de que haya cosas ciertas que no se pueden probar. Cuando menos porque, después de todo, en la vida real estamos

acostumbrados a vivir con situaciones similares. En nuestros tratos cotidianos con la realidad aceptamos como ciertas muchas cosas sin que nos preocupe mayormente si tenemos pruebas. Quien profesa una religión lo hace todo el tiempo. Quien cree en lo que dice un político también. De hecho, casi todo lo que creemos como cierto no está demostrado. Pero en las matemáticas la cosa es distinta. Su esencia es que sus afirmaciones pueden ser demostradas. Y esa demostración está más allá de cualquier duda. Lo demostrado en matemáticas es cierto. Punto. Y se esperaba que todo lo cierto en matemáticas se pudiera probar. ¿De qué otra manera saber si no que algo es cierto?)

Llamaremos G a la proposición que tiene esta notable característica:

G : Esta proposición no se puede demostrar

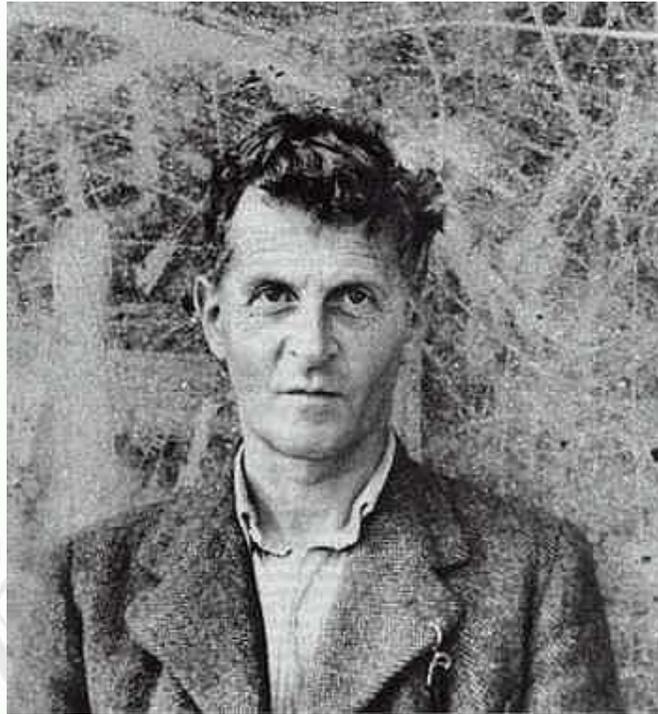
Desde luego la negación de G , $\sim G$, es

$\sim G$: Esta proposición se puede demostrar

Ahora empieza el lío. Si G se puede demostrar, G es falsa, porque afirma que no se puede. Pero si G se puede probar, es cierta, porque todo lo que se ha demostrado es cierto. Así que si G se puede probar, G es cierta y es falsa. Por tanto G no se puede demostrar y es cierta.

Aquí tenemos lo que buscamos: una proposición que no se puede probar y que es cierta. Encontrar esta proposición es, como dijimos, ingenioso; pero la verdadera genialidad del trabajo de Gödel, la que necesita conocimientos profundos de matemáticas y muchas páginas, y la que requirió de más trabajo de su parte, es el establecimiento de una correspondencia entre cada una de las declaraciones del sistema formal y una declaración numérica. El sistema de numeración de Gödel, consiste en una serie de reglas que le asignan un valor numérico -en los números enteros- a cada declaración del sistema formal. La asignación es tal que las declaraciones de una deducción lógica tienen valores numéricos que corresponden a igualdades numéricas. Simplificando exageradamente y sólo con el ánimo de ilustrar la idea, es como si las reglas del sistema de numeración de Gödel le asignaran a la declaración "Todos los hombres son mortales", el valor de 13, a la declaración "Sócrates es un hombre" el valor de 25, y a la declaración "Sócrates es mortal" el valor de 38. El razonamiento lógico que a partir de las premisas "Todos los hombres son mortales" y "Sócrates es un hombre", concluye que "Sócrates es mortal" corresponde a que $13+25=38$. Así, mediante el sistema de numeración de Gödel, hay una operación que corresponde a la declaración G . Y esa operación, como la declaración G , no puede demostrarse a pesar de que es verdadera. Así demostró Gödel su teorema.

La descripción del trabajo de Gödel es mucho más precisa en el libro de Goldstein. Sin embargo, no deja de ser una descripción. Quizá esa sea la razón de fondo de porque el público en general conoce tan poco acerca de las matemáticas: hace falta mucha especialización para poder hablar de lo esencial.



Wittgenstein

Gödel desarrolló sus teoremas a temprana edad, de acuerdo con la evidencia empírica de que las mejores matemáticas se hacen antes de los treinta. El ambiente en que los desarrolló es el de la Viena de entreguerras. Sus maestros e interlocutores parecen el Quién es quién de la cultura occidental ---falocéntrica, diría Mendiola--- del siglo XX: Russell, Popper, Wittgenstein. Este último es quizá quien prefigura el bando de los intérpretes posmodernistas ---¿todavía se usa esa palabra?--- del teorema de Gödel. Sin ser un intérprete de Gödel en sí mismo, Wittgenstein consideraba los resultados matemáticos como tautologías carentes de contenido adicional. Todo está, según él, especificado por la sintaxis y la gramática del lenguaje que se usa. Así, en el *Tractatus Logico-Philosophicus* se lee: "6.125 Por tanto, la lógica no puede nunca producir sorpresas".

La sorpresa del teorema de Gödel es reinterpretada en el bando posmodernista como la justificación de la futilidad de la objetividad y de la fatalidad del subjetivismo esencial. Goldstein cita un párrafo de un libro de texto clásico, de William Barrett,

Los resultados de Gödel tienen consecuencias más profundas [que las de la Incertidumbre de Heisenberg o la Complementaridad de Bohr], cuando uno considera que en la tradición occidental, desde los Pitagóricos y Platón hasta la fecha, las matemáticas como modelo de intelegibilidad han sido la fortaleza del racionalismo. Ahora resulta que incluso en la más precisa de las ciencias ---en el terreno donde la razón parecía todopoderosa--- el hombre no puede escaparse de su esencial finitud; todo sistema matemático que construya está condenado a la incompletitud. Gödel ha mostrado que las matemáticas tienen problemas insolubles y que por tanto



nunca podrán ser formalizadas en un sistema completo... Los matemáticos saben ahora que nunca podrán llegar al fondo esencial de las cosas, que de hecho, no existe un fondo esencial, ya que las matemáticas no tienen una realidad autosustentable independiente de la actividad humana que los matemáticos realizan.

Una interpretación diametralmente opuesta es posible. Que las matemáticas tienen una realidad autosustentable independiente de la actividad humana que los matemáticos realizan. Y que esa realidad es tan compleja que los humanos, en nuestra esencial finitud, no podemos formalizar su descripción en un sistema completo. Y sin embargo somos capaces de descubrir, mediante procesos que no se pueden sistematizar ---y que incluyen la intuición, la inspiración, la abducción---, verdades pertenecientes a la realidad matemática. En otras palabras, que la actividad de la mente humana no se puede reducir a los algoritmos mecánicos que se utilizan para programar computadoras.

Gödel, al igual que Einstein, resintió siempre esa interpretación de su trabajo. (La relatividad de Einstein, que a menudo se reduce a la declaración tópica "todo es relativo", tiene como esencia el hecho de que la velocidad de la luz es siempre constante.) Su participación en la comunidad intelectual se vio afectada por ese sentimiento. Su actitud fue la del exilado intelectual. Eso, combinado con su exilio físico real en Princeton, contribuyó al agravamiento de sus excentricidades. Y a la profundización de su amistad con Einstein, también exilado en Princeton.

Finalmente un comentario acerca de cómo se escriben estos libros en las grandes ligas. Goldstein relata una anécdota en la que Gödel manifiesta su desconfianza en la teoría de la evolución -en conversación ni más ni menos que con el héroe de La Jornada, Noam Chomsky- y escribe en una nota al pie:



Noam Chomsky

La hostilidad de Gödel contra la teoría de la evolución se vuelve más comprensible conforme más conoce uno la forma de pensar del personaje. Un racionalista como Gödel quiere proscribir lo circunstancial y aleatorio, mientras que la selección natural invoca al azar y a la contingencia como factores fundamentales en sus explicaciones. Al nivel de la microevolución (los cambios de generación en generación), la teoría otorga un papel central a las mutaciones y recombinaciones aleatorias. Al nivel de la macroevolución (los patrones en la historia de la vida), le otorga un papel central a la contingencia histórica, por ejemplo a las impredecibles

variaciones de la geología y el clima, o a eventos aleatorios como el del impacto de un meteorito con la Tierra que bloquea la luz solar y acaba con los dinosaurios, circunstancia que permite que los mamíferos ocupen los nichos ecológicos vacantes. (Le agradezco a Steven Pinker esta explicación.)

La obra de Goldstein es impecable. Su inteligencia, su conocimiento y su disciplina de trabajo son incuestionables. Y además con el apoyo de esos amigos...

Goldstein estudió en Princeton, y vio a Gödel en persona una vez en 1973, cuatro años antes de su muerte. Junto con ella, los estudiantes de posgrado se quedaron mudos ante la aparición del genio, y nadie atinó a decir palabra.

Rebecca Goldstein:



Vídeo

NB. El libro de Rebecca Goldstein es parte de una colección titulada Great Discoveries Series. Cada libro trata de la vida y la obra de un eminente descubridor: Einstein, Curie, Turing, Lavoisier, Rutherford, Hubble, Arquímedes, Copérnico, Darwin.

<http://elamador.blogspot.com/2005/09/la-necesidad-de-lo-incompleto.html>

NEWTON •