Los algoritmos en el contecto escolar. Algunos ejemplos para la obtención de la raíz cuadrada

José Carrillo Yáñez
Luis Carlos Contreras González

En el presente trabajo intentamos sintetizar algunas aportaciones relevantes respecto de la definición de algoritmo y su lugar en la educación matemática, tras lo que se realiza un estudio de los algoritmos de la raíz cuadrada, desde una óptica manipulativa primero, a una más formal y abstracta, justificando así el argumento de diversidad que se defiende en contra de la unicidad con que parecen ser tratados los algoritmos en el contexto escolar. El trabajo finaliza con una reflexión que relaciona alguno de sus puntos con elementos de análisis curricular.

¿Qué es un algoritmo?

Puesto que vamos a realizar algunas reflexiones sobre el cálculo algorítmico y su papel en la educación matemática, vale la pena que nos paremos un instante a exponer lo que entendemos por algoritmo.

Sería poco más que pretencioso ofrecer una definición determinante de un término que en matemáticas ha gozado de innumerables proposiciones y contenidos semánticos.

Es posible encontrar distintas definiciones, acepciones e incluso concepciones, dependiendo de que la referencia sea etimológica, cotidiana,..(Gómez, 1989), sobre un término que parece proceder de la latinización del nombre del matemático persa de principios de siglo IX Muhammed Ibn Musà, Al-Khuarizmi, autor de un libro cuya versión latina sería **Algoritmi de numero indorum** (Rey Pastor y Babini, 1984).

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS (EXP., SOC. Y MAT.) FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN UNIVERSIDAD DE SEVILLA (HUELVA)

Si buscamos en una enciclopedia (AA.VV., 1980), podemos encontrar dos términos con la misma raíz que algoritmo: ***algoritmo y algorítmico.*** Del primer término encontraremos que es "un conjunto de símbolos y procedimientos de los cálculos matemáticos..." y, respecto del segundo, lo encontraremos como *cálculo algorítmico,* referido a los usos, cuya procedencia se cifra en la Edad Media, para el cálculo escrito "en contraposición al realizado con fichas o tablas de calcular,... que ha dado origen a los modernos métodos del cálculo aritmético elemental."

De esta definición podría deducirse que un algoritmo tiene dos componentes; una ligada al campo de los *hechos* relativos a los símbolos o expresiones algebraicas que utiliza o contiene, y otra vinculada a los *procedimientos* o estructura interna que poseen y que se justifica con algún tipo de argumentación racional.

En efecto, esa doble componente permite contemplar los algoritmos, bien por su uso, como *una forma de cálculo* (normalmente escrito y denominada algorítmico), bien por el *proceso constructivo racional* que lo sustenta (Maza, 1991).

Estos dos aspectos, en el uso social del algoritmo, no tienen por qué estar vinculados. De hecho, la mayoría de las veces tratamos los algoritmos a nivel de usuario sin ser conscientes de su fundamento. Lo que importa es que funcione (que permita obtener resultados de operaciones planteadas) y que descargue de tareas al individuo (con la rapidez que proporcionan).

Entendido así, un algoritmo es, en definitiva, un "método utilizado en la resolución de un problema,...,procedimiento que describe todo el proceso de cálculo de alguna proposición, enunciado, relación o problema,... cualquier procedimiento de computación" (Valiente, 1988,p.19).

No obstante, todas estas versiones que mantienen una especial relación con la matemática, podrían ampliarse con la concepción social actual de algoritmo como serie de instrucciones que permite el uso de un determinado artilugio, máquina o instrumento

(Nesher, 1986).

Para nuestros efectos y en una somera síntesis de lo expuesto hasta ahora, entenderemos que, *para el usuario*, un algoritmo es una colección de instrucciones (que suelen llevar implícitos determinados cálculos aritméticos) cuya ejecución ordenada conduce a un resultado buscado para un problema o colección de problemas (de un mismo tipo). Esas instrucciones pueden parecer piezas inconexas de información, pero encierran un fundamento constructivo y racional, unas veces inductivo y otras deductivo.

Esas instrucciones "deben estar expresadas en un texto de longitud finita y su descripción debe ser concreta, sin ninguna ambigüedad. Es decir, el método dado por un algoritmo se puede comunicar a otra persona mediante un número finito de indicaciones sobre cómo actuar en cada etapa del cálculo" (Carrillo et. al., 1981), por lo que dicho proceso no interactúa con la persona que lo ejecuta.

Existen algoritmos cuyo proceso es terminal, es decir, tras un número finito de pasos se concluye el algoritmo y se obtiene la solución buscada (Algoritmo de Euclides), mientras que otros tienen un carácter no limitado (como sucede en el caso de obtención de la raíz cuadrada de un número natural que no sea cuadrado perfecto) (Carrillo et al., 1981).

Permítasenos, como síntesis, destacar los elementos de un algoritmo con idea de profundizar en su comprensión.

Podemos decir que un algoritmo tiene:

Pasos. Son las instrucciones u órdenes a ejecutar, que aparecen *explícitas* para el sujeto que las aplica conscientemente. Asociados a estos pasos, pueden existir otros de carácter *oculto*, imprescindibles para obtener el resultado final, que corresponden a la lógica del proceso y que no son aplicados conscientemente por el usuario.

Jerarquía. Las instrucciones han de ser ejecutadas en un determinado orden para que funcione el algoritmo.

Objetivo. Es el resultado y da nombre al algoritmo.

Los algoritmos en el contexto escolar.

Nos podemos hacer una idea de la incidencia que tuvo en la Edad Media el *descubrimiento* del cálculo escrito, pensando, solamente, en la influencia que actualmente tiene en la sociedad y, particularmente, en el contexto escolar, influencia sólo atenuada por el uso de las calculadoras.

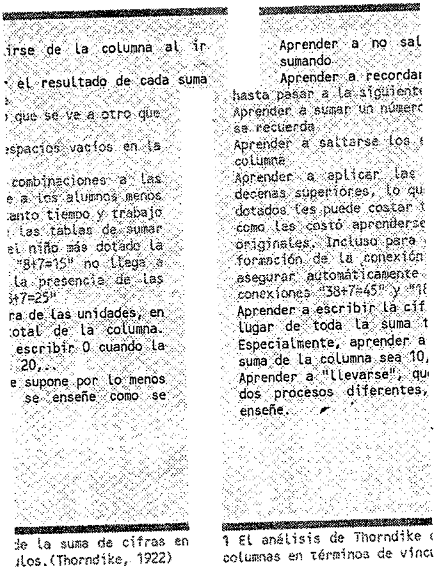
Evidentemente, disponer de medios que permitan descargar la memoria, que reduzcan el margen de error y el tiempo que precisamos para realizar una serie de cálculos mecánicos, nos permite dedicar un mayor esfuerzo en ámbitos creativos (Resnick y Ford, 1981). Si además el *artilugio* sirve para una gama de situaciones y no sólo para un problema concreto, la justificación del uso de algoritmos puede parecer ociosa.

Pocas veces el contexto escolar ha asumido el aprendizaje de determinado instrumento social con tanta vehemencia como con los algoritmos convencionales de la aritmética elemental; tan es así que, a veces, parecen tener un fin en sí mismos.

Sería aventurado aportar una justificación de este hecho, pero permítasenos sospechar la posible influencia de trabajos como los de Thorndike (1922) basados en la Teoría Asociacionista (ver cuadro 1) que aún mantiene una fuerte vigencia en el contexto escolar.

En este sentido, nos gustaría destacar los aspectos más relevantes de los algoritmos en ese contexto:

a) **Normalmente los algoritmos están carentes de significado.** En efecto, en el quehacer cotidiano escolar, los algoritmos son justificaciones racionales. Algunos, los más usados, quedan integrados en nuestra estructura de memoria, aunque a veces (la mayoría) no los usamos para resolver determinadas situaciones problemáticas (fuera de la escuela) en las que aplicamos otras estrategias personales de resolución (Cockcroft, 1982) (que podrían ser objeto de un proceso algorítmico). Otros, como el de la obtención de la raíz cuadrada, caen pronto en el olvido y apenas somos capaces de *ponerlos en pie*, en su totalidad o en algunos de sus pasos.


irse de la columna al ir
el resultado de cada suma
que se ve a otro que
espacios vacíos en la
combinaciones a las
e a los alumnos menos
anto tiempo y trabajo
las tablas de sumar
el niño más dotado la
"8+7=15" no llega a
la presencia de las
3+7=25"
ra de las unidades, en
otal de la columna.
escribir 0 cuando la
20,..
e supone por lo menos
se enseñe como se

Aprender a no sal
sumando
Aprender a recordar
hasta pasar a la siguiente
Aprender a sumar un número
se recuerda
Aprender a saltarse los
columna
Aprender a aplicar las
decenas superiores, lo qu
dotados les puede costar t
como les costó aprenderse
originales. Incluso para
formación de la conexión
asegurar automáticamente
conexiones "38+7=45" y "18
Aprender a escribir la cif
lugar de toda la suma t
Especialmente, aprender a
suma de la columna sea 10,
Aprender a "llevarse", qu
dos procesos diferentes,
enseñe.

de la suma de cifras en
los. (Thorndike, 1922)

1 El análisis de Thorndike
columnas en términos de vinc

Algunos algoritmos ocultan estructuras conceptuales básicas que son ignoradas en el proceso de aprendizaje de aquéllos. Por ejemplo, el algoritmo convencional de la suma de números enteros está basado en los principios que fundamentan nuestro sistema de numeración decimal; sin embargo, la mayor parte de las veces es enseñado prescindiendo de éstos. Esta omisión es la causa de errores tipificados en al cálculo escrito (p.e. el escribir 916 como resultado de 39 más 67, porque 9 y 7 son **16** y 6 y 3 suman **9**) y de posteriores problemas de aprendizaje de las matemáticas (Carpenter y Moser, 1983).

b) **La escuela no da cabida a la explicitación de las estrategias personales, fomentando lo que podríamos llamar *pasividad mental.*** Para una determinada operación aritmética, la escuela ofrece un algoritmo predeterminado (el que el profesor ha aprendido, el que todos hemos aprendido, el de siempre) sin reflexionar sobre la existencia de otros alternativos que permitiera efectuar una elección razonada, ni analizar las estrategias personales de resolución que los alumnos usan fuera de las aulas y de las que, probablemente, podría obtenerse un algoritmo (Udina, 1989). Así, los algoritmos se convierten en algo rígido, aburrido, standard, y el usuario debe limitarse a un uso incomprensivo y mecánico del mismo.

c) **Son el prematuro punto de partida.** Un algoritmo aritmético tiene sentido cuando la operación u operaciones que pretende abreviar han sido comprendidas en su estructura por el usuario. La comprensión racional es susceptible de ser desarrollada en paralelo con el *juicioso empleo* del algoritmo (Orton, 1988); sin embargo, muchas veces (como es el caso de adición y sustracción de números enteros) el algoritmo es el *prematuro* punto de partida. Sumar, para esta concepción, no es más que conocer y aplicar el algoritmo convencional de la suma y, en la misma línea, *sumar llevándose* es más complejo, aunque esta complejidad no sea compartida por los ejecutores de acciones de agregar, juntar, unir, etc., cuando sólo se les pide un cardinal final y se les supone un nivel adecuado de comprensión del concepto de número y, por tanto, de la secuencia numérica.

d) **No desarrollan actitudes que capaciten para enfrentarse a situaciones extraescolares.** Como ya hemos comentado, cuando nos encontramos ante un problema aritmético y no disponemos de medios o tiempo para utilizar los algoritmos usuales, recurrimos a otras estrategias personales (ver cuadro II), posiblemente más lentas, pero indiscutiblemente válidas. Sin embargo el trabajo escolar con los algoritmos no desarrolla estas estrategias (Cockcroft, 1982). Si a los algoritmos llegamos mediante un proceso personalizado con cabida para la discusión y la crítica que, de paso, permita conocer los *pasos ocultos* de los algoritmos usuales (Gómez y Jaime, 1983; Gómez, 1989), éstos ganarían en significatividad e, indudablemente, en relevancia.

Por ejemplo, si un alumno ha de resolver el problema de saber la velocidad media (en km/h) a la que ha recorrido un coche 200 km, sabiendo que ha empleado 1 h 25 min, es claro que debe saber que v=200km/(1+25/60)h, ahora bien, si no se halla en la escuela, sino en el coche de su padre, y sin calculadora a mano, ese procedimiento no le valdrá de mucho, debiendo utilizar uno personal:

1h25min=85min	trabaja en min para no emplear números decimales
200/85=40/17	divide espacio entre tiempo, buscando velocidad simplifica fracción para facilitar cálculo mentala
60km/h, cada min	piensa en la posibilidad de utilizar una regla fácil que relaciona minutos con km
40=2x17+6 se recorre 1km	busca múltiplos de 17, pues cada grupo de 17 equivale a una velocidad de 60km/h
=aprox. 2x17+1/3 17	aproxima por necesidad del cálculo mental
v=aprox. 2x60+1/3 60= =aprox. 140km/h	asocia los grupos de 17 con grupos de 60km/h de velocidad, obteniendo una aproximacióndev

Cuadro 2

Algoritmos para la obtención de la raíz cuadrada.

1. El Algoritmo babilónico

Naturalmente, dentro de la diversidad algorítmica para el cálculo de la raíz cuadrada, no todos los algoritmos proporcionan un valor *exacto*. Concretamente, uno de los primeros que se conocen y que ponen de manifiesto la extrema habilidad de los babilonios en estas tareas (Boyer, 1968), es de carácter aproximativo.

Este sencillo algoritmo, que ha sido atribuido a diversos matemáticos a lo largo de la historia, se desarrolla como sigue:

* sea $r = \sqrt{a}$, y sea $\mathbf{a_1}$ una primera aproximación de r

* construimos $\mathbf{b_1}=a/a_1$ que es una nueva aproximación de a.

Comienza aquí un proceso iterativo de aproximaciones por defecto y por exceso; si a_1 era *demasiado pequeña* b_1 será *demasiado grande* y, en tal caso, la media aritmética de ambas será una aproximación mejor,

* tomamos $\mathbf{a_2}=(a_1+b_1)/2$ y

construimos $b_2=a/a_2$

Así, dependiendo del grado de aproximación deseado, con la expresión general

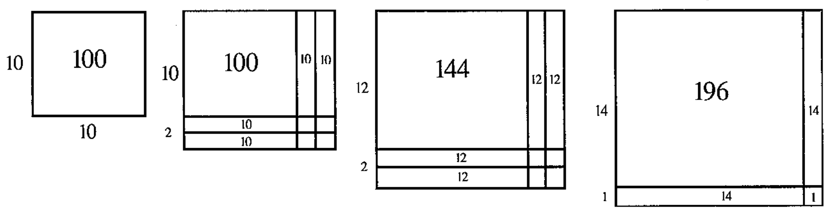
$$a_n=(b_{n-1}+a_{n-1})/2 \quad y \quad b_{n-1}=a/a_{n-1}$$

pueden obtenerse los items de esta sucesión recurrente.

2. Con los bloques multibase.

Es de todos conocido el método que sugieren muchos maestros a sus alumnos para la obtención de la raíz cuadrada de un número. Les dan una cantidad de cubitos y éstos han de formar un cuadrado. El número de cubitos del lado será la raíz, pudiendo sobrar unos cuantos cubitos.

Debemos hacer resaltar la gran cantidad de significado que conlleva este procedimiento, asociando la obtención de un número que multiplicado por sí mismo dé el inicial con la construcción de un cuadrado geométrico.



En el ejemplo, se muestra el proceso seguido por un alumno para obtener la raíz cuadrada entera de 215, para lo cual se le han facilitado 215 cubitos. El primer paso es una "apuesta" por la se-guridad en lo conocido. A continuación va formando cuadrados hasta que no tiene suficientes cubitos para continuar. De esta forma, calcula la raíz (lado del último cuadrado construido) y el resto (cantidad de cubitos sobrantes). Cuando los alumnos se enfrentan libremente al problema, intentan directamente formar el mayor cuadrado posible con los cubitos dados.

3. El algoritmo usual: justificación pitagórica.

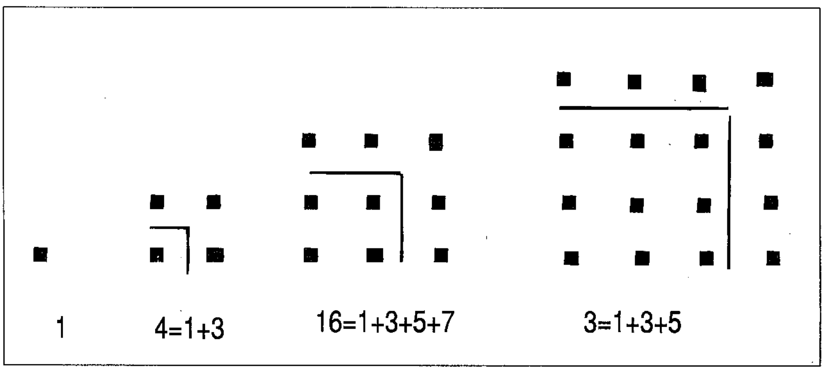
Nos parece adecuado, en primer lugar, aclarar la denominación elegida para esta justificación del algoritmo usual de la raíz cuadrada que veremos a continuación.

Como se verá, una pieza clave (Edge, 1979, cit. por Gómez, 1989) del tal justificación radica en el hecho siguiente

$$(1) \qquad n^2 = \sum_{k=1}^{n} 2k-1 \qquad n\varepsilon \mathbf{N}$$

expresión algebraica que parece tener su origen en los números cuadrados (ver cuadro 3), dentro de la gama de números figurados utilizados en la escuela pitagórica en su concepción dogmática de que "*todas cosas conocidas tenían número*" (Boyer, 1968), y cuya lectura sintáctica nos dice que *el cuadrado de un número natural **n** coincide con la suma de los **n primeros impares*** (el último de los cuales se obtiene como 2n-1)(2). La misma idea con otra lectura podría indicarnos que *si de un número natural voy restando impares consecutivos, comenzando desde uno, y reduzco tal número a cero, ese número es cuadrado perfecto.*

Pero, en tal caso, al observar nuevamente (1) *el número de impares restados **n*** no es otra cosa que *la raíz cuadrada de ese*



Cuadro 3

número; y si la reducción hecha anteriormente no hubiera dado cero como resultado, el valor obtenido no sería otro que *el resto.* Veamos dos ejemplos :

81-1 = 80
80-3 = 77
77-5 = 72
72-7 = 65
65-9 = 56
56-11 = 45
45-13 = 32
32-15 = 17
17-17 = 0

(se han restado 9 impares, el último de los cuales es 2x9-1=17, o lo que es lo mismo, el valor del último impar más una unidad coincide con el doble del número de impares restados) (3).

83-1 = 82
82-3 = 79
79-5 = 74
74-7 = 67
67-9 = 58
58-11 = 47
47-13 = 34
34-15 = 19
19-17 = 2

83 no es cuadrado perfecto y excede en dos unidades (resto) al último cuadrado perfecto.

El proceso, relativamente útil en números pequeños, resulta laborioso y lento en números mayores. Veamos un ejemplo :

121-1-3-5-7........

¡Un momento!, observemos que 121=100+21 y que 100 es cuadrado perfecto y por (2) suma de los *diez* primeros impares, (4)

121-100=21

Continuamos con 21, restando desde el *undécimo impar* que, por (3) es 2x11-1=21, y 21-21=0; 121 es cuadrado perfecto y su raíz es 11. Lo que hemos añadido es, por tanto, la idea expresada en (4), que consiste en *acotar* el radicando por *un cuadrado perfecto conocido anterior* que, en este caso es el de la primera decena. Veamos otro ejemplo:

225 ; 225-100=125

continuemos restando

impar número	obtención	resultado
11	2x11-1=21	125-21=104
12	2x12-1=23	104-23=81
13	2x13-1=25	81-25=56
14	2x14-1=27	56-27=29
15	**2x15-1=29**	**29-29= 0**

Así pues 225 es cuadrado perfecto y su raíz es **15**. Pero notemos que hemos restado (después de 100) 21+23+25+27+29, es de-dos (desde esa decena), y todo ello multiplicado por ese número de impares.

Es fácil comprobar que esta nueva versión contiene a la anterior y que, además, coincide con los pasos del algoritmo convencional. En su versión algebraica, significaría que el radicando puede expresarse como

$R=(10.a+b)^2$, con a, b dígitos,
por lo que
$R=100.a^2+2.10.a.b+b^2$
y entonces
$R-100.a^2=(2.10.a+b)b$
que no es otra cosa que
(20.a+b).b,
lo que puede expresarse como

"2a"b.b [1]

Cabe ahora preguntarse,

* ¿es extensible para cualquier número natural?
* ¿y para cualquier número racional?
* ¿podríamos obtener aproximaciones decimales de las raíces de números racionales?

Intentaremos dar respuesta a estas cuestiones en el siguiente apartado.

4. El algoritmo usual: justificación algebraica.

Este algoritmo, que ha sido el más usado para obtener raíces cuadradas, es al mismo tiempo el más olvidado y el que nos proporciona la posibilidad de aproximarnos a la raíz exacta tanto como queramos. Ello se debe a que posee un soporte algebraico más potente, lo que supone mayores dificultades de comprensión y justificación tanto de los pasos explícitos como de los ocultos. No obstante, pensamos que estos pasos pueden justificarse en casos particulares, sin pretender una generalización hasta edades más avanzadas.[2]

Cuando queremos obtener la raíz entera de 538 , procedemos de la siguiente manera:

1) Escribimos 5,38.

2) Buscamos un número tal que su cuadrado sea el más próximo a 5 por defecto. Obtenemos el 2 y lo escribimos en la parte superior derecha de la caja.

3) Colocamos 4 debajo de 5 y restamos, obteniendo 1.

4) Bajamos a la derecha del 1 las cifras 3 y 8, y escribimos 13,8.

5) En el otro lado de la caja bajamos el doble de 2, o sea, 4.

6) Buscamos una cifra que, añadida a la derecha del 4, forme un número que multiplicado por dicha cifra dé un número lo más cercano posible, por defecto, a 138, para lo que hacemos uso del resultado de dividir 13 entre 4.

$$13:4=3'\ldots \Rightarrow 43x3=129.$$

Subimos el 3 a la derecha del 2.

7) Colocamos 129 debajo de 138 y restamos, obteniendo 9.

Hemos terminado: la raíz entera de 538 es 23, con un resto de 9.

¿Por qué?,¿cuál es la lógica interna del algoritmo?

Vamos a intentar ponerla en claro.

I) Los números de 2 cifras tienen una raíz de 1 cifra, los de 3 y los de 4 cifras tienen una raíz de 2 cifras y así sucesivamente.

En general: si un número a tiene n cifras, o sea,

$$x=x_{n-1}10^{n-1}+\ldots+x_1 10+x_0,$$

$\sqrt{x}$ tiene $E[(n+1)/2]$ cifras,

es decir:

si n es par, $\sqrt{x}$ tiene n/2 cifras,

y si n es impar,

$\sqrt{x}$ tiene $(n+1)/2$ cifras.

Es por ello por lo que agrupamos de 2 en 2 desde las unidades.

En nuestro caso, 538, por tener 3 cifras, posee una raíz entera de 2 cifras. Dicho en otras palabras:

$$538=(10a+b)^2$$

II) $538=100a^2+20ab+b^2$

El cuadrado perfecto múltiplo de 100 más próximo a 538 es 400, por lo que $100a^2=400$, y, por tanto, $a=2$.

Ya sabemos, pues, que $538=(20+b)^2$.

Aunque escribimos 2 en la caja, en realidad es 2*0*.

III) Además, ahora nos interesa aproximarnos a la igualdad

$$138 = 40b+b^2, \qquad (1)$$

por ello es situado el 4 debajo del 5, **ocultando** la verdadera operación:

$$\begin{array}{r} 538 \\ \underline{-400} \\ 138 \end{array}$$

IV) Lo único que queda por explicar de 4) es el hecho de escribir 13,8, cuya justificación nos la da el algoritmo de la división en caja.

V) ¿Por qué se baja el doble?

Expresemos (1) de otra forma:

$$138 = 2\;2\;10b+b^2,$$

donde aparece un 2 del doble producto, otro 2 como valor de a y el 10 del lugar de las decenas. Sacando b como factor común, tenemos que

$$138 = (2\;2\;10+b)b,$$

lo que no es otra cosa que el producto de la cifra b por el número de 2 cifras formado por b en las unidades y el doble de a en las decenas.

Es decir, en realidad el paso oculto consiste en bajar 4*0*, no 4, y buscar una cifra que añadir a 40, multiplicando por ella misma a continuación.

VI) y VII) Quedan explicados los pasos 6) y 7) con lo expuesto anteriormente.

Para explicar con más detalle el último paso oculto descrito es necesario emplear números mayores. Tomemos, por ejemplo,

x=17522.

17522   1***00*** → 13***0***
1***0000***   ***200*** → 23***0*** x 3***0*** = 69***00***
075***00*** → 75***22***

Llegados a este punto, nuestro propósito es ver cómo funciona el razonamiento en el caso general, o sea, en el caso de que $\sqrt{x}$ tenga n cifras.

$$\sqrt{x} = a'... \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{17522} = a'...$$

$$\Leftrightarrow x = a^2+R =$$
$$(a_r 10^r + a_{r-1} 10^{r-1} + ... + a_1 10 + a_0)^2 + R,$$

donde $r = E[(n-1)/2]$

y R es el resto.

$17522 = (100b+10c+d)^2+R$

Dicho de otra forma:

$x = 10^{2r}a_r^2+R_r+R \Rightarrow$

$17522 = 10000b^2+R_2+R \Rightarrow$

$x - 10^{2r}a_r^2 = R_r+R =$
$a^2_{r-1}10^{2(r-1)}+2a_r a_{r-1}10^{2r-1}+R_{r-1}+R=$

$=(2a_r10^r+a_{r-1}10^{r-1})a_{r-1}10^{r-1}+R_{r-1}+R=$

"2a$_r$"a$_{r-1}$0...$^{(r-1}$0.
$10^{r-1}a_{r-1}+R_{r-1}+R$

$b=1 \quad \Rightarrow 17522-10000 = 7522$
$= 100c^2+2\ .100b\ .10c+R_1+R=$

$=(2\ .100b+10c)10c+R_1+R=$
$(200+10c)10c+R_1+R=$

$=$ *"2c0"* $10c + R_1 + R \Rightarrow$

x - $10^{2r}a_r^2$ - **"2a$_r$"a$_{r-1}$0...$^{(r-1}$0**
$.10^{r-1}a_{r-1}=R_{r-1}+R=$

$=a^2_{r-2}10^{2r-4}+2a_r a_{r-2}10^{2r-2}+$
$2a_{r-1}a_{r-2}10^{2r-3}+R_{r-2}+R=$
$=(2a_r10^r+2a_{r-1}10^{r-1}+a_{r-2}10^{r-2}).$
$10^{r-2}a_{r-2}+R_{r-2}+R=$

$=$ **"2a$_r$""2a$_{r-1}$"a$_{r-2}$0... $^{(r-2}$0**
$.\ 10^{r-2}a_{r-2}+R_{r-2}+R=$

"2"a$_r$a$_{r-1}$""a$_{r-2}$0... $^{(r-2}$0
$10^{r-2}a_{r-2}+R_{r-2}+R$

$c=3 \quad \Rightarrow 7522 - 230\ .30 =$
$7522-6900 = 622 = R_1 + R =$

$=d^2+200d+60d+R=$
$(200+60+d)d+R=$

$=(2\ .100+6\ .10+d)d+R=$
"26d" $.d + R$,

llegando a que d = 2, por lo que $\sqrt{17522} = 132$ *con resto 98.*

Y así podríamos seguir sucesivamente en el caso general

No obstante, quedan aún preguntas en el aire:

a) ¿Explica este razonamiento la obtención de aproximaciones decimales?

b) ¿Es sólo aplicable a radicandos enteros?

En cualquier caso, estas preguntas tienen fácil contestación:

Por cada decimal que queramos obtener hemos de añadir 2 ceros a la derecha, de tal forma que, si, por ejemplo, quisiéramos obtener la $\sqrt{17522}$ con una aproximación hasta las centésimas, sería lo mismo que obtener la raíz entera de 175220000 y luego correr la coma 2 lugares hacia la izquierda. También se podría actuar directamente, en función de la expresión

$$17522=(100b+10c+d+e/10+f/100)^2+R$$

Por otra parte, si es decimal el radicando, lo multiplicamos por 10 elevado al menor par tal que se convierta en número entero; una vez obtenida la raíz entera, se corre la coma hacia la izquierda tantos lugares como la mitad del mencionado par. Por ejemplo, si quisiéramos obtener $\sqrt{17'522}$, calcularíamos $\sqrt{175220}$ y luego correríamos la coma 2 lugares hacia la izquierda. Quedaría

$$\sqrt{175220}=418'...$$
$$\Rightarrow\sqrt{17'522}=4'18...$$

Además, si nos fijamos en los restos, observamos que

$$175220=418^2+496 \quad y \quad 17'522=4'18^2+0'0496,$$

lo que se debe a que

$$17'522=175220\ .10^{-4}= 418^2\ 10^{-4}+496\ .10^{-4}=$$

$$=(418\ \ 10^{-2})^2+0'0496. \qquad (2)$$

(La imposición de que sea par la potencia de 10 a la hora de multiplicar, como ha podido observarse, proviene de la necesidad de introducir una potencia de 10 en un cuadrado - ver (2)

Reflexiones finales

Nos gustaría volver a insistir en la conveniencia, sobre todo a nivel escolar, de la consideración de las dos componentes básicas de un algoritmo: *una relativa al campo de los hechos y la otra al de los procedimientos*. Para combinar estas dos componentes, los algoritmos deberían ser construidos de manera comprensiva, de forma que se dejen ver los *"pasos ocultos"*, fundamentando su utilidad y aplicabilidad sobre esta base comprensiva.

En este sentido, pensamos que la explicitación de los mencionados pasos ocultos favorece, no sólo la comprensión de la estructura procedimental del propio algoritmo, sino, lo que puede ser incluso más relevante, también la comprensión de la operación. Además, el estudio de dichos pasos es, de hecho, un potente elemento de análisis didáctico que, en manos del profesor, supone un dato significativo para la toma de decisiones curriculares, ya que:

a) permite interrogarse sobre la adecuación del algoritmo (en su doble vertiente) al campo de intereses y competencias de los alumnos,

b) y, en relación con lo anterior, puede plantear la necesidad de elegir un algoritmo o una justificación más adecuados.

Para ello, queremos llamar la atención sobre dos ideas básicas. En primer lugar, los alumnos utilizan estrategias personales para resolver problemas que pueden ser "algoritmizables"; y en segundo lugar, habitualmente es posible encontrar o idear una gama de justificaciones para un algoritmo a lo largo de un continuo entre lo concreto y lo abstracto.

Es el caso de la operación que hemos elegido como ejemplo, la raíz cuadrada.

Los diversos algoritmos y justificaciones expuestos anteriormente ofrecen la posibilidad de abordar la raíz cuadrada en diferentes niveles educativos.

Así, el uso de los bloques multibase favorece la comprensión de la operación en los últimos cursos de la E. Primaria; además, se puede constituir en fundamento para su posterior formalización.

El algoritmo babilónico, adecuado para el final de la E. Primaria y/o comienzos de la E. Secundaria Obligatoria (ESO), contiene, al menos, las siguientes ideas:

1) dada su estrecha vinculación a la operación que resuelve, favorece la comprensión de dicha operación (se calcula la raíz de **a** a través de la búsqueda de un número $\mathbf{a_n}$ tal que $a/a_n=a_n$),

2) permite ver el carácter aproximado del cálculo de la raíz cuadrada,

3) conecta adecuadamente con otros ámbitos curriculares que

suelen presentar dificultades a los alumnos (la simplificación de radicales sencillos, como $2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$),

4) sugiere, al ser un proceso iterado, el empleo de la calculadora (cálculo de raíces cuadradas suponiendo estropeada la tecla $\sqrt{}$).

La justificación pitagórica del algoritmo usual podría abordarse en el Segundo Ciclo de la ESO, forjando los cimientos de la justificación algebraica en base a la descomposición polinómica de los números enteros. Sin embargo, esta última, que contiene un potente instrumental matemático, no sería abordable hasta la E. Secundaria Postobligatoria.

Se constata, pues, cómo un mismo hecho puede ser abordado en varios niveles educativos, en cada uno de ellos con sus respectivas riquezas; y además esta diversidad permite adaptarse a los diferentes grados de competencia e intereses existentes dentro de un aula, algo esencial en la nueva filosofía de la enseñanza.

Bibliografía

AA. VV. (1980). Nueva **Enciclopedia Larousse. Planeta**: Barcelona.

BOYER, C.B. (1968). **A History of Mathematics. John** Wiley and Sons: New York (versión española, Historia de la matemática, Alianza: Madrid, 1986).

CARPENTER, T.P. y MOSER, J.M. (1983) "The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts". en Lesh, R. y Landau, M (Eds) **Acquisition of mathematics concepts and processes.** Academic Press: New York.

CARRILLO, J. et al. (1981). Funciones **Turing-computables.** Departamento de Álgebra y Fundamentos, Universidad de Sevilla.

COCKCROFT, W.H. (1982).**Mathematics Counts.**HMSO : London (versión española, Las matemáticas sí cuentan, M.E.C.: Madrid, 1985.

GÓMEZ, B. (1989). Numeración **y Cálculo. Síntesis**: Madrid.

GÓMEZ, B. y JAIME, A. (1983). **El Cálculo Aritmético (Los algoritmos)**. Albatros: Valencia.

MAZA, C. (1991). Enseñanza **de la suma y de la resta. Síntesis**: Madrid.

NESHER, P. (1986)."Are Mathematical Understanding and Algoritmic Performance Rela-ted?". **For the Learning of Mathematics**, 6 (3).

ORTON, A. (1988). Learning **Mathematics. Issues, Theory and Classroom Practice. Cassell**: London (versión española, Didáctica de las matemáticas, M.E.C. y Morata : Madrid, 1990).

RESNICK, L.B y FORD, W.W. (1981). The **Psycology of Mathematics for Instruction. Lawrence** Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ (versión española, La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos, MEC y Paidós: Barcelona, 1990).

REY PASTOR, J. y BABINI, J. (1984). Historia **de la Matemática. Vol. 1. De la Antigüedad a la Baja Edad Media. Gedisa**: Madrid.

THORNDIKE, E.L. (1981). The **Psychology of Arithmetic. Macmillan**: New York.

UDINA, F. (1989). Aritmética **y Calculadoras. Síntesis**: Madrid.

VALIENTE, S. (1988). Diccionario **de matemáticas. Alhambra** Mexicana: México.

Notas

[1] Expresamos **"2a"** para resaltar el número (de una o dos cifras) que se obtiene al multiplicar por 2 el dígito **a,** valor absoluto de la decena por defecto.

[2] Una demostración formal puede encontrarla el lector en cualquier libro de Análisis Algebraico bajo el epígrafe de "Teoremas fundamentales de la raíz cuadrada"